Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 1. С. 109—117

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.968, 517.965

Об одном классе нелинейных уравнений I рода с однородными интегральными операторами *

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет

Аннотация. Строятся обобщенные решения нелинейных уравнений первого рода, содержащих однородные интегральные операторы Вольтерра. Решения строятся в виде суммы сингулярной и регулярной компоненты. Сингулярная компонента имеет носитель в нуле и состоит из функционала Дирака и его производных. Коэффициент при старшей производной функционала Дирака удовлетворяет определенному полиному. Остальные коэффициенты сингулярной части вычисляются рекуррентным образом из линейных алгебраических уравнений. Регулярная компонента решения является непрерывной функцией и строится по вычисленной сингулярной части последовательными приближениями.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения первого рода, последовательные приближения, функционал Дирака, ряд Вольтерра, blow-up пределы.

1. Введение

Введем непрерывные функции $K_n(\bar{t})$ где $\bar{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n = \overline{1, N}$, имеющие непрерывные производные по t_0 в окрестности нуля и представимые при $|\bar{t}| \leq \rho$ в виде рядов $K_n(\bar{t}) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} K_{nij}(t_0, t_i)$. Рассмотрим при $0 \leq t \leq \rho$ нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \int\limits_0^t K_{nij}(t,s)x(s)ds = f(t). \tag{1}$$

Левая часть уравнения (1) разложена по n-однородным интегральным операторам и является частичной суммой известного ряда Вольтерра, играющего важную роль в теории динамических систем. Оператор в

* Работа частично поддержана РФФИ, грант № 09–01–00377.

левой части уравнения (1) можно рассматривать и как специальный случай интегро-степенного оператора Ляпунова-Шмидта, использованного А. М. Ляпуновым и позднее Л. Лихтенштейном (L. Lichtenstein) при исследовании классических задач механики.

При построении модели (1) в теории динамических систем надо уметь находить ядра K_{nij}. Для решения это задачи можно использовать метод А. С. Апарцина [2], основанный на подаче специальных тестовых сигналов $x(t)$ и измерения соответствующих откликов $f(t)$. В настоящее время этот подход получил дальнейшее развитие в теоретических и прикладных исследованиях. Вопросы построения непрерывных решений уравнения (1) изучались в частных случаях. Исследование разрешимости уравнения (1) в пространстве распределений [4] впервые строго рассмотрено в [7], но лишь для класса "степенных" уравнений

$$\sum_{n=1}^{N}\Big(\int\limits_0^t K_n(t-s)x(s)ds\Big)^n = f(t).$$

В этой работе, продолжающей исследование [7], [8], решение уравнения общего вида строится в классе обобщенных функций ${D_{(-\rho,\rho)}}'$. Показано, что число решений зависит от количества корней определенного алгебраического уравнения. Предложен метод построения искомых решений. Отмечается, что в случае $f(0) = 0$ при определенных условиях существует и последовательными приближениями строится непрерывное решение уравнения (1).

Статья организована следующим образом. В п. 2 рассмотрены решения с сингулярностью нулевого порядка. В п. 3 строятся решения с сингулярностью m-го порядка, при $m \geq 1$. В п. 4 содержит заключение.

2. Решения с сингулярностью нулевого порядка

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = c\delta(t) + v(t), \tag{2}$$

где $\delta(t)$ – функционал Дирака, $v(t)$ – непрерывная функция. Решение (2) рассматривается как элемент пространства $D'_{(-\rho,\rho)}$ [6], определенного на множестве бесконечно-дифференцируемых финитных функций $\phi(t)$ из $D'_{(-\rho,\rho)}$ с носителями на $(-\rho,\rho)$. Функция $f(t)$ в правой части уравнения (1) считается продолженной нулем в левую полуплоскость точки $t=0$. В пространстве $D'_{(-\rho,\rho)}$ имеет место тождество

$$\int\limits_0^t K_{iij}(t,s)(c\delta(s)+v(s))ds = K_{nij}(t,0)c + \int\limits_0^t K_{nij}(t,s)v(s)ds.$$

Поэтому уравнение (1) подстановкой (2) сводится к уравнению относительно непрерывной функции $v(t)$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}(K_{nij}(t,0)c+\int\limits_{0}^{t}K_{nij}(t,s)v(s)ds)=f(t) \tag{3}$$

с неизвестной постоянной . Полагая в (3) $t=0$ получим алгебраическое уравнение

$$L(c)\stackrel{\triangle}{=}\sum_{n=1}^{N}c^n\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}K_{nij}(0,0)=f(0). \tag{4}$$

Уравнение (4) назовем характеристическим.

Введем условие

A) c^* – простой вещественный корень уравнения (4).

Тогда, полагая в (3) $c=c^*$ и дифференцируя полученное равенство по t, получим уравнение

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\left(K'_{nlj}(t,0)c^*+K_{nlj}(t,t)v(t)+\int\limits_{0}^{t}\frac{\partial K_{nlj}(t,s)}{\partial t}v(s)ds\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1,\,i\neq l}^{n}\left(K_{nij}(t,0)c^*+\int\limits_{0}^{t}K_{nij}(t,s)v(s)ds\right)=f'(t). \tag{5}$$

Полагая в (5) $t=0$ получим алгебраическое линейное уравнение относительно $v(0)$:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\left(K'_{nlj}(0,0)c^*+K_{nlj}(0,0)v(0)\right)\prod_{i=1,\,i\neq l}^{n}K_{nij}(0,0)c^*=f'(0). \tag{6}$$

Коэффициент при $v(0)$ в уравнении (6) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}K_{nlj}(0,0)\prod_{i=1,\,i\neq l}K_{nij}(0,0)c^*.$$

Он преобразуется к виду

$$L'(c^*)=\sum_{n=1}^{N}nc^{*n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}K_{nij}(0,0)$$

и поэтому в силу условия А) не равен нулю. Следовательно, $v(0)$ из уравнения (6) определяется единственным образом.

Уравнение (5) преобразуем к виду

$$a(t)v = F(v,t) + b(t), \tag{7}$$

где

$$a(t) = \sum_{n=1}^{N} c^{*n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \prod_{i=1,\, i\neq l}^{n} K_{nij}(t,0) K_{nlj}(t,t),$$

$F(v,0) = 0$. Таким образом, вопрос свелся к построению непрерывной функции $v(t) \to 0$ при $t \to 0$, удовлетворяющей уравнению (7).

Т.к. $a(0) = L'(c^*) \neq 0$, $v(0) = \frac{b(0)}{L'(c^*)}$, то существуют положительные числа $\rho > 0, r > 0$, такие, что уравнение (7) в пространстве $C_{[-\rho,\rho]}$ при $v \in S(v(0), r)$ будет удовлетворять всем условиям принципа сжимающих отображений ([9], с.381). При этом приближения

$$v_n(t) = \frac{1}{a(t)}(F(v_{n-1},t) + b(t)),\ v_0 = \frac{b(0)}{L'(c^*)}$$

при $|t| \leq \rho$ равномерно сходятся к регулярной части $v(t)$ обобщенного решения (2).

Если выполнено условие

B) $f(0) = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} K_{11j}(0,0) \neq 0$, то c^* будет простым решением уравнения (4) и уравнение (1) имеет классическое решение. Конечно при выполнении условия **B)** уравнение (4) кроме нулевого может иметь и другие простые вещественные решения. Поэтому уравнение (1) в общем случае наряду с классическим может иметь несколько обобщенных решений. Если $f(0) \neq 0$, то непрерывных решений у уравнения (1) нет. Из изложенного вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* **A)**. *Тогда уравнение (1) имеет обобщенное решение вида (2), где $c^* \neq 0$ – простой корень уравнения (4), а непрерывная функция $v(t)$ определяется единственным образом последовательными приближениями. Если выполнено условие* **B)**, *то уравнение (1) в классе непрерывных функций имеет единственное решение и его можно построить последовательными приближениями в окрестности точки $t = 0$.*

Пример 1.

$$\left(\int_0^t x(s)ds\right)^2 + \int_0^t x(s)ds + t = 0,\ t > 0.$$

В этом примере равенство $c^2 + c = 0$ является характеристическим уравнением. Оно имеет два простых решений $c_1 = 0$, $c_2 = -1$. Поэтому на основании теоремы 1 данное интегральное уравнение имеет в пространстве D' ровно два решения $x_1(t) = -\delta(t) - \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$, $x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$. Точка $t_0 = \frac{1}{4}$ является точкой blow-up предела этих решений, т.е. при приближении к этой точке решение принимает сколь угодно большие значения по абсолютной величине.

На основании результатов работы [4] и в общем случае решение $v(t)$ уравнения (7) за конечное время t может уйти в ∞ (или разветвиться). Оценку снизу интервала, на котором регулярная часть решения (2) существует и единственна можно получить, используя схему Л.В.Канторовича (см. [5], гл. 12, п.2) и работу [12] при построении и исследовании мажорантных интегральных и алгебраических уравнений для уравнения (7).

Таким образом, в конкретных примерах, сочетая результаты этого параграфа с методами работы [12], можно вычислять нижнюю границу t^*, при прохождении которой у решений интегрального уравнения (1), могут быть точки ветвления или явления взрыва (blow-up пределы в зарубежной литературе). Такие явления в последнее время привлекали внимание многих математиков (см. [9], с.15, с.247). В случае нелинейных интегральных уравнений Вольтерра это явление остается неизученным, проявляет себя при численных расчетах. Некоторые результаты в этом направлении см. в [1].

3. Решения уравнения с сингулярностью порядка m, $m \geq 1$.

В этом параграфе рассматривается нелинейное уравнение в свертках вида

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n} K_{nij} * x = f(t),\, t \geq 0, \tag{8}$$

где $K_{nij} * x = \int\limits_0^t K_{nij}(t-s)x(s)ds$.

Пусть выполнено условие

C) функции $K_{nij}(t), f(t)$– m-раз дифференцируемы, причем первые $m-1$ производных функций $K_{nij}(t)$ в точке $t = 0$ равны нулю, причем в окрестности нуля $K_{nij}(t) \sim \alpha_{nij} t^m$ при $t \to 0$.

Будем строить решение уравнения (1) вида

$$x(t) = c_m \delta^{(m)}(t) + c_{m-1}\delta^{(m-1)}(t) + \cdots + c_0\delta(t) + v(t), \tag{9}$$

где c_i – искомые постоянные, $v(t) \in C_{[0,\rho)}$. Подстановка функции (9) в уравнение (8) преобразует его в пространство D'_n [6] к виду

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\Big(K_{nij}^{(m)}(t)c_m + K_{nij}^{(m-1)}(t)c_{m-1} + \dots K_{nij}(t)c_0 + K_{nij} * v\Big) = f(0). \tag{10}$$

Полагая в (10) $t = 0$ получим алгебраическое уравнение для определения c_m :

$$L(c) \overset{\triangle}{=} \sum_{n=1}^{N} c_m^n \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} m!\alpha_{nij} = f(t). \tag{11}$$

Пусть

D) c_m^* - простой вещественный корень уравнения (11).

Положим в (10) $c_m = c_m^*$. Далее, последовательно дифференцируя уравнение (10) по t и полагая затем $t = 0$, придем к рекуррентной последовательности линейных алгебраических уравнений вида

$$L'(c_m^*)c_{m-i} = f^{(i)}(0) + b_i(c_m^*, c_{m-1}^*, \dots, c_{m-(i-1)}^*),\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Проводя $(m+1)$-ое дифференцирование по t, с уже вычисленными c_i^*, $i = m, m-1, .., 0$, получим эквивалентное нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида (7), где теперь

$$a(t) = \sum_{n=1}^{N} {c_m^*}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} K_{nlj}^{(m)}(t) \prod_{i=1\, i\neq l}^{n} m!\alpha_{nij}.$$

Отметим, что

$$a(0) = \sum_{n=1}^{N} n{c_n^*}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} m!\alpha_{nij}.$$

Поэтому в силу условия **D)** $a(t) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0$. Следовательно, соответствующее интегральное уравнение относительно функции $v(t)$ в пространстве $C_{(0,\rho]}$ в шаре $S(v(0), r) \in C_{(0,\rho]}$ при достаточно малых $\rho > 0, r > 0$ удовлетворит условиям принципа сжимающих отображений [9], с. 381.

Из изложенного вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **C)** *и* **D)**. *Тогда уравнение (1) в классе* $D'_{(-\rho,-\rho)}$ *имеет решение (9), где* c_m^* *– простой вещественный корень уравнения (11),* $c_{m-1}, \dots, c_0$ *вычисляются однозначно из последовательности линейных алгебраических уравнений. Непрерывная функция* $v(t)$ *строится однозначно последовательными приближениями.*

4. Заключение

В п. 2 рассмотрены обобщенные решения с сингулярностью порядка $m \geq 1$ нелинейных уравнений с ядрами, зависящих от разностей. Покажем, что обобщенные решения можно строить и в случае ядер общего вида. Действительно, вместо условия **C)** введем условие
C') Пусть в уравнении (1) функции $K_{nij}(t,s)$ имеют вид

$$K_{nij}(t,s) = \sum_{\nu=0}^{m} K_{nij}^{m-\nu} t^{m-\nu} s^{\nu} + O((|t|+|s|)^{m+1})$$

и алгебраическое уравнение

$$L(c) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{n=1}^{N} c^n \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} (-1)^m K_{nij}^0 = f(0) \tag{12}$$

имеет простое вещественное решение c^*.

Тогда решение уравнения (1) в классе $D'_{m(-\rho,\rho)}$ можно искать в виде

$$x(t) = c^* \delta^{(m)}(t) + c_{m-1}\delta^{(m-1)}(t) + \cdots + c_0\delta(t) + v(t). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (1) и полагая $t = 0$ с учетом условия **C')** придем к уравнению (12) относительно c^*. Аналогично доказательству Теоремы 2 для определения коэффициентов $c_{m-1}, \ldots, c_0$ получим линейные алгебраические уравнения. Для вычисления непрерывной функции $v(t)$ после необходимого числа дифференцирований придем к нелинейному интегральному уравнению вида (7), в котором теперь $a(t) \sim \alpha t^p$, $\alpha \neq 0$, $0 \leq p \leq m$. Напомним, что в п.1 и в п. 2 в соответствующем уравнении (7) выполнялось условие $a(0) \neq 0$, то есть оно содержало интегральный оператор Вольтерра второго рода. При выполнении условия **C')** может оказаться, что $p \geq 1$. Тогда $a(0) = 0$ и соответствующее интегральное уравнение вида (7) будет интегральным уравнением Вольтерра третьего рода. Решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в окрестности особой точки $t = 0$ можно строить, сочетая метод неопределенных коэффициентов для определения начального приближения с дальнейшим его уточнением последовательными приближениями (см. детали, например, в доказательстве теоремы 1 в [4]).

Список литературы

1. Апарцин А. С. Об эквивалентных нормах в теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода / А. С.Апарцин // Изв. Иркут. гос. Ун-та. Сер.: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 19–29.

2. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода. Теория и классические методы / А. С. Апарцин. – Новосибирск : Наука, 1999.
3. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М : Наука, 1988. – 512 с.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер. – М. ; Л., 1950.
6. Сидоров Н. А. Существование и построение обобщенных решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1243–1247.
7. Сидоров Д. Н. Обобщенные решения полиномиальных интегральных уравнений первого рода в одной модели нелинейной динамики / Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров // Автоматика и телемеханика. – 2011 (в печати).
8. Сидоров Д. Н. Моделирование нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерра: идентификация и приложения / Д. Н. Сидоров // Сиб. журн. индустр. математики. – 2000. – Т. 3, № 1. – С. 182–194.
9. Треногин В. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. А. Треногин. – М. : Физматлит, 2009. — 311 с.
10. Belbas S. A. Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations / S. A. Belbas, Y. Bulka // Applied Mathematics and Computation. - 2011. – Vol. 217, Issue 9. – P. 4791–4804.
11. Lichtenstein L. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-differentialgleichungen nebst Anwendungen / L. Lichtenstein. – Berlin : Julius Springer, 1931.
12. Sidorov D. N. Convex Majorants Method in the Theory of Nonlinear Volterra Equations / D. N.Sidorov, N. A.Sidorov. – arXiv:1101.3963v2 [math.DS].

D. N. Sidorov, N. A. Sidorov

Method of monotone majorants of the theory of nonlinear Volterra equations

Abstract. The authors have constructed the main solutions of nonlinear operator-integral equations of Volterra in sense of Kantorovich. Convergence of the successive approximations is established through studies of majorants of integral and algebraic equations. Estimates are given for the solutions and for the intervals on which right margin the solution has the blow-up limit or start branching.

Keywords: majorants, Volterra operator-integral equations, blow-up limit, successive approximations.

Сидоров Денис Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт систем энергетики СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермнотова, 130, тел. (3952)429440; Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210
(dsidorov@isem.se.irk.ru)

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (petrov@math1.isu.ru)

Sidorov Denis, Energy Systems Institute SB RAS, 130 Lermontov Str., Irkutsk, 664003 Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)428440 (dsidorov@isem.sei.irk.ru)

Sidorov Nikolay, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)242210 (sidorovisu@gmail.com)