Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 1. С. 118—134

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.5

Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости *

М. В. Фалалеев
Иркутский государственный университет

С. С. Орлов
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье для линейного интегро-дифференциального операторного уравнения с вырожденной дифференциальной частью высокого порядка и интегральным членом Вольтерра типа свертки рассмотрена задача Коши. Построена фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора, соответствующего рассматриваемому уравнению, доказаны теоремы существования и единственности обобщенного (в классе распределений с ограниченным слева носителем) и классического (N раз сильно непрерывно дифференцируемого) решений задачи Коши. Полученные результаты применены к исследованию начально-краевых задач, возникающих в математической теории упругости.

Ключевые слова: банахово пространство; фредгольмов оператор; жорданов набор; распределение; фундаментальная оператор-функция.

Введение

Исследования линейных интегро-дифференциальных уравнений с интегральным слагаемым сверточного типа в банаховых пространствах проводились в [8, 5, 6]. В монографии [8] доказана теорема о явном виде фундаментальной оператор функции интегро-дифференциального оператора первого порядка с фредгольмовым оператором при производной, этот результат применен к решению некоторых содержательных

* Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной Росии» на 2009-2013 годы, госконтракт № П696, и гранта для поддержки НИР аспирантов и молодых сотрудников ИГУ, тема № 091-08-104 (приказ № 370 от 24.12.2010).

начально-краевых задач [5]. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка с аналогичным вырождением была исследована авторами в [6], там же рассмотрены ее приложения в математической теории упругости. В представляемой работе полученные ранее результаты обобщаются на случай интегро-дифференциального уравнения с вырожденной полной дифференциальной частью произвольного порядка N. Исследования однозначной разрешимости начальной задачи проводятся методами теории обобщенных функций в банаховых пространствах с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции, доказательство теоремы о виде которой проводится с помощью методики, отличной от предложенной в [8]. Полученные результаты иллюстрируются на примерах задач Коши — Дирихле для интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков по переменной времени.

1. Обобщенные жордановы наборы фредгольмовых операторов

Пусть $E_1,\ E_2$ — вещественные банаховы пространства, B — замкнутый линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = E_1$. Кроме того, $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n$, т. е. оператор B фредгольмов. Обозначим $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — базисы в $N(B)$ и $N(B^*)$ соответственно, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$ и $\{z_i\}_{i=1}^n \subset E_2$ — биортогональные им системы элементов, т. е. $\langle \varphi_i,\ \gamma_j \rangle = \langle z_i,\ \psi_j \rangle = \delta_{ij},\ i,\ j = 1, \dots, n$. Введем в рассмотрение проекторы $P:\ E_1 \to N(B),\ Q:\ E_2 \to span\,\{z_i\}_{i=1}^n$, действия которых задаются формулами

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle\, \varphi_i,\ Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \psi_i \rangle\, z_i,$$

и ограниченный оператор $\Gamma:\ E_2 \to D(B)$,

$$\Gamma = \tilde{B}^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle\, z_i \right)^{-1},$$

называемый оператором Треногина — Шмидта [1]. Справедливы равенства $\Gamma z_i = \varphi_i,\ \Gamma^* \gamma_i = \psi_i,\ \Gamma B = \mathbb{I}_1 - P,\ B\Gamma = \mathbb{I}_2 - Q$. Здесь и далее в работе $\mathbb{I}_1,\ \mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в пространствах E_1 и E_2.

Пусть $\mathcal{F}(t)$ — сильно непрерывное достаточно гладкое однопараметрическое семейство замкнутых линейных операторов из E_1 в E_2. *Обобщенной $\mathcal{F}(t)$-жордановой цепочкой* длины $p_i \in \mathbb{N}$ элемента $\varphi_i \in N(B)$ называется конечный набор элементов $\left\{ \varphi_i^{(1)},\ \varphi_i^{(2)}, \dots,\ \varphi_i^{(p_i)} \right\} \subset E_1$, удовлетворяющих уравнениям

$$B\varphi_i^{(1)} = 0,\ B\varphi_i^{(k+1)} = l_k(\varphi_i),\ k = 1, \dots, p_i - 1,$$

которые, в соответствии с альтернативой Фредгольма [1], разрешимы, если $\langle l_k(\varphi_i),\ \psi_j\rangle = 0, j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_i-1$. Здесь введено обозначение $l_k(\varphi_i) = \sum\limits_{q=1}^{k} \mathcal{F}^{(k-q)}(0)\varphi_i^{(q)}$. Вектор $\varphi_i^{(k+1)},\ k = 1,\ldots,p_i-1$, принято называть $\mathcal{F}(t)$-*присоединенным элементом k-го порядка* к элементу φ_i, причем справедлива формула $\varphi_i^{(k+1)} = \Gamma l_k(\varphi_i)$. Условие обрыва цепочки присоединенных элементов на p_i-м шаге состоит в том, что не все числа $\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle$ равны нулю. Построив по описанному правилу для каждого $\varphi_i \in N(B)$ свою $\mathcal{F}(t)$-жорданову цепочку, получим систему элементов

$$\left\{\varphi_i^{(k)},\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_i\right\} \subset E_1,$$

называемую *обобщенным* $\mathcal{F}(t)$-*жордановым набором* фредгольмова оператора B и являющуюся *полной*, если $\det\|\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle\| \neq 0$. Базис в $N(B^*)$ можно выбрать таким, что условие полноты $\mathcal{F}(t)$-жорданова набора эквивалентно соотношению $\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n$, в этом случае $z_i = l_{p_i}(\varphi_i)$.

В цикле работ Б. В. Логинова (см., например, статью [3] и библиографию к ней) показано, что, если оператор B имеет полный обобщенный $\mathcal{F}(t)$-жорданов набор, то существует *полный обобщенный* $\mathcal{F}^*(t)$-*жорданов набор* оператора B^*, который строится по тем же правилам, причем базисы в $N(B)$ и $N(B^*)$ можно выбрать так, что элементы φ_i и ψ_i с одинаковыми номерами имеют обобщенные жордановы цепочки одинаковой длины. В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что все указанные перестройки базисов уже выполнены.

Полным $\mathcal{F}^*(t)$-жордановым набором оператора B^* называется система элементов $\psi_i^{(k)} \in E_2^*,\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_i$, которые удовлетворяют уравнениям

$$B^*\psi_i^{(1)} = 0,\ B^*\psi_i^{(k+1)} = l_k^*(\psi_i),\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_i-1,$$

условиям разрешимости

$$\langle\varphi_i,\ l_k^*(\psi_j)\rangle = 0,\ i,j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_j-1,$$

и полноты

$$\left\langle\varphi_i,\ l_{p_j}^*(\psi_j)\right\rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n,$$

где $l_k^*(\psi_i) = \sum\limits_{q=1}^{k}\left(\mathcal{F}^{(k-q)}(0)\right)^*\psi_i^{(q)}$. Для восстановления $\mathcal{F}^*(t)$-присоединенных элементов справедливы формулы

$$\psi_i^{(k+1)} = \Gamma^* l_k(\psi_i),\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_i-1,$$

а из последнего соотношения следует, что $\gamma_i = l_{p_i}^*(\psi_i),\ i = 1,\ldots,n$.

Следует отметить, что условия разрешимости уравнений для определения $\mathcal{F}(t)$- и $\mathcal{F}^*(t)$-присоединенных элементов могут быть записаны в следующем эквивалентном виде:

$$\left\langle \varphi_i^{(k+1)},\ \gamma_j \right\rangle = \left\langle z_j,\ \psi_i^{(k+1)} \right\rangle = 0,\ i,j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,p_i - 1.$$

2. Обобщенные функции в банаховых пространствах

Пусть E —вещественное банахово пространство, E^* — сопряженное к нему банахово пространство. Отнесем к множеству $K(E^*)$ *основных функций* все финитные бесконечно дифференцируемые функции $s(t)$ со значениями в E^*. *Носителем supp* $s(t)$ основной функции $s(t)$ называется замыкание в $\mathbb{R}$ множества значений t, при которых $s(t) \neq 0$. Сходимость в $K(E^*)$, которая вводится следующим образом: говорят, что последовательность функций $\{s_n(t)\}$ сходится к $s(t)$ в $K(E^*)$, если

а) $\exists\ R > 0$ такое, что $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\ supp\ s_n(t) \subset [-R,\ R]$;

б) $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}$ выполняется $\sup\limits_{t\in[-R,\ R]} \left\| s_n^{(\alpha)} - s^{(\alpha)}(t) \right\|_{E^*} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$;

наделяет векторное пространство $K(E^*)$ топологической структурой. *Обобщенной функцией (распределением)* $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E называется всякий линейный непрерывный функционал $(f, s(t))$, заданный на $K(E^*)$. Обозначим $K'(E)$ множество всех обобщенных функций со значениями в E, которое относительно введенной в нем слабой сходимости: $\{f_n\} \subset K'(E)$ сходится к $f \in K'(E)$, если $(f_n, s(t)) \xrightarrow{n\to+\infty} (f, s(t))$, $\forall\ s(t) \in K(E^*)$; является полным векторным пространством и называется *пространством обобщенных функций*. Понятия нулевого множества и носителя распределения, равенства двух обобщенных функций, операции сложения, умножения на бесконечно дифференцируемую числовую функцию, дифференцирования (последние две непрерывны из $K'(E)$ в $K'(E)$) определяются так же, как и для классических обобщенных функций Соболева — Шварца, множество которых, следуя монографии В. С. Владимирова [2], будем обозначать $\mathcal{D}'$. Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $f(t)$ со значениями в E порождает распределение

$$(f(t), s(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f(t), s(t) \rangle\, dt,\ s(t) \in K(E^*).$$

Все обобщенные функции, которые можно задать по приведенному правилу, принято называть *регулярными*, остальные — *сингулярными*. Примеры регулярной и сингулярной обобщенных функций из $K'(E)$ доставляют аналоги функции Хевисайда и дельта-функции Дирака

$$(a\theta(t-t_0), s(t)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \langle a, s(t)\rangle\, dt,\ \ (a\delta(t-t_0), s(t)) = \langle a, s(t_0)\rangle\,,$$

соответственно, где $a \in E$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $s(t) \in K(E^*)$. При этом легко показать, что $(a\theta(t-t_0))' = a\delta(t-t_0)$. Через $K'_+(E)$, $K'_+(E) \subset K'(E)$, будем обозначать *пространство распределений с ограниченным слева носителем*.

Пусть $\mathcal{K}(t)$ — сильно непрерывная оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, $h(t) \in \mathcal{D}'$, тогда произведение $\mathcal{K}(t)h(t)$ (формальное выражение) назовем *обобщенной оператор-функцией*. Далее интегро-дифференциальному оператору вида

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = Bu^{(N)}(t) - A_{N-1}u^{(N-1)}(t) - \ldots - \\ - A_1u'(t) - A_0u(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds$$

поставим в соответствие следующую обобщенную оператор-функцию:

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A_{N-1}\delta^{(N-1)}(t) - \ldots - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t).$$

Условия на операторные коэффициенты и ядро будут приведены ниже.

Пусть $f(t) \in K'_+(E_1)$, $h(t) \in \mathcal{D}'_+$, тогда *сверткой* обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)h(t)$ и обобщенной функции $f(t)$ называется распределение $\mathcal{K}(t)h(t) * f(t) \in K'_+(E_2)$ определяемое равенством

$$(\mathcal{K}(t)h(t) * f(t),\ s(t)) = (h(t),\ (f(\tau),\ \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau)))\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*).$$

Корректность этого определения гарантируется ограниченностью слева носителей функций $h(t) \in \mathcal{D}'_+$ и $f(t) \in K'_+(E_1)$ и доказывается по схеме, аналогичной применяемой в [2] при доказательстве существования свертки в алгебре $\mathcal{D}'_+$. Отметим, что в классах распределений с ограниченным слева носителем операция свертки ассоциативна.

Далее введем ключевое понятие. *Фундаментальной оператор-функцией* интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ назовем обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}(t)$, удовлетворяющую равенствам

$$\mathcal{E}(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = v(t),\ \forall\ v(t) \in K'_+(E_1),$$

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) * w(t) = w(t),\ \forall\ w(t) \in K'_+(E_2).$$

Смысл этой конструкции состоит в следующем: если известна фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$ интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$, то, в силу второго равенства, сверточное уравнение вида $\mathcal{L}_N(\delta(t)) * u(t) = f(t)$, где $f(t) \in K'_+(E_2)$, имеет своим решением обобщенную функцию $u(t) = \mathcal{E}(t) * f(t) \in K'_+(E_1)$, причем это решение единственно. Действительно, если существует $v(t) \in K'_+(E_1)$ такая, что $v(t) \neq u(t)$ и $\mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = f(t)$, то, с учетом первого равенства из определения фундаментальной оператор-функции и свойства ассоциативности свертки, получим

$$v(t) = \big(\mathcal{E}(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t))\big) * v(t) = \mathcal{E}(t) * \big(\mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t)\big) = \mathcal{E}(t) * f(t) = u(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения $u(t) = \mathcal{E}(t) * f(t)$ исходного сверточного уравнения в классе $K'_+(E_1)$.

3. Фундаментальная оператор-функция вырожденного интегро-дифференциального оператора

Теорема 1. *Пусть B, $A_{N-1}, \ldots, A_1$, A_0 — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $C^\infty(t \geq 0)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t, причем*

$$\overline{D(B)} = \overline{\bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k)} = E_1, \ D(B) \subseteq \bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k),$$

$k(t)$ сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B фредгольмов и имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t) = A_{N-1} + A_{N-2}t + \ldots + A_0\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}k(s)ds$, тогда интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}(t) = \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t),$$

здесь Γ — оператор Треногина — Шмидта, $R(t)$ и $N(t)$ — резольвенты ядер $\mathcal{F}(t)\Gamma$ и $(-\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i R^{(p_i)}(t))$ соответственно, функция $G(t)$ задается следующим образом: $G(t) = ((\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t))$; $\left\{\psi_i^{(j)}, \ i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный обобщенный $\mathcal{F}^*(t)$-жорданов набор оператора B^* (см. п. 1).

Доказательству теоремы 1 предпошлем вспомогательную лемму.

Лемма. *Если выполнены условия теоремы 1, то*

1^0. $Q_iR^{(k-1)}(0) = \begin{cases} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(k+1)} \right\rangle z_i, & k = 1, \dots, p_i - 1, \\ Q_i, & k = p_i; \end{cases}$

2^0. $(\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t) = (\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t);$

3^0. $(Q_iR^{(p_i)}(t)\theta(t) + Q_i\delta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) = Q_i\delta(t);$

4^0. $QR(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t) = -Q\delta(t);$

5^0. $G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$
$= (\mathbb{I}_2\delta(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} Q_iR^{(p_i)}(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}(t)\Gamma\theta(t)) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t).$

Доказательство. Последовательно докажем пять этих равенств. Исходя из соотношения $R(t) = \mathcal{F}(t)\Gamma + \int_0^t \mathcal{F}(t-s)\Gamma R(s)ds$ для резольвенты $R(t)$ и формулы $\mathcal{F}^*(t)$-присоединенных элементов, индукцией по k можно доказать, что $Q_iR^{(k-1)}(0) = \langle \cdot, \Gamma^* l_k^*(\psi_i) \rangle z_i$, откуда и следует требуемое равенство 1^0.

Так как $(\mathbb{I}_2 - Q)z_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, то имеют место соотношения

$$(\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) * N(t)\theta(t) = (\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) * \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t) = \mathbb{O}_2,$$

где $\mathbb{O}_2$ — нулевой оператор в пространстве E_2, которые в совокупности со свойством идемпотентности проектора $\mathbb{I}_2 - Q$, доказывают 2^0.

Используя $Q_iQ_j = \delta_{ij}Q_i$, равенство 3^0 можно установить, с учетом $N(t)\theta(t) = -\sum\limits_{k=1}^{n} Q_kR^{(p_k)}(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t))$, следующим образом:

$$\begin{aligned}(Q_iR^{(p_i)}(t)\theta(t) + Q_i\delta(t)) * (I\delta(t) + N(t)\theta(t)) &= \\ = Q_i\delta(t) * (\sum_{k=1}^{n} Q_kR^{(p_k)}(t)\theta(t) + \mathbb{I}_2\delta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) &= \\ = Q_i\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t) - N(t)\theta(t)) &= Q_i\delta(t).\end{aligned}$$

Применяя 1^0, 3^0, а затем $\left\langle z_k,\ \psi_i^{(j+1)} \right\rangle = 0$, $j = 1, \dots, p_i - 1$, из пункта 1 и легко проверяемые соотношения $Q_i(\mathbb{I}_2 - Q) = \mathbb{O}_2$, $Q_iz_j = \delta_{ij}z_i$, покажем равенство 4^0 тождественными преобразованиями, а именно

$$\begin{aligned}&QR(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} Q_iR(t)\theta(t) * \delta^{(p_i)}(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\theta(t) * G(t) =\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(Q_i R^{(p_i)}(t)\theta(t) + Q_i\delta(t) + \sum_{j=2}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)\Big)*$$

$$* \left(\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)\right) * \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\theta(t) * G(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(Q_i\delta(t) + \sum_{j=2}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)\Big)*$$

$$* \Big((\mathbb{I}_2 - Q)\frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\theta(t) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\Big\langle \cdot,\ \psi_k^{(j)}\Big\rangle z_k\delta^{(p_k-p_i+1-j)}(t)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=2}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\theta(t) - \Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(1)}\Big\rangle z_i\delta(t) -$$

$$- \sum_{j=2}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\theta(t)\Big) = -Q\delta(t),$$

Справедлива цепочка равенств

$$G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = G(t) * (B\delta(t) - \mathcal{F}(t)\theta(t)) * \delta^{(N)}(t) =$$

$$= \Big(B\delta(t) - (\mathbb{I}_2 - Q)\mathcal{F}(t)\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\delta^{(p_i-1-j)}(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\delta^{(p_i-1-j)}(t) * \mathcal{F}(t)\theta(t)\Big) * \delta^{(N)}(t),$$

в последнее из которых подставим выражение

$$\delta^{(p_i-1-j)}(t) * \mathcal{F}(t)\theta(t) = \mathcal{F}^{(p_i+1-j)}(t)\theta(t) + \mathcal{F}^{(p_i-j)}(0)\delta(t) +$$
$$+ \mathcal{F}^{(p_i-j-1)}(0)\delta'(t) + \ldots + \mathcal{F}'(0)\delta^{(p_i-j-1)}(t) + \mathcal{F}(0)\delta^{(p_i-j)}(t),$$

а затем приведем подобные слагаемые относительно производных $\delta(t)$. В результате этих преобразований, в силу уравнений для определения $\mathcal{F}^*(t)$-присоединенных векторов, получим

$$G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$$

$$= \Big(\tilde{B}\delta(t) - (\mathbb{I}_2 - Q)\mathcal{F}(t)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\mathcal{F}^{(p_i+1-j)}(t)\theta(t)\Big) * \delta^{(N)}(t) =$$

$$= \Big(\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}(t)\Gamma\theta(t) + Q\mathcal{F}(t)\Gamma\theta(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle z_i\mathcal{F}^{(p_i+1-j)}(t)\Gamma\theta(t)\Big) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t).$$

Далее, с учетом 1^0 и $R(t) = \mathcal{F}(t)\Gamma + \int_0^t R(t-s)\mathcal{F}(s)\Gamma ds$, находим

$$Q\mathcal{F}(t)\Gamma\theta(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle z_i\mathcal{F}^{(p_i+1-j)}(t)\Gamma\theta(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i\Big(\mathcal{F}^{(p_i)}(t)\Gamma + R(0)\mathcal{F}^{(p_i-1)}(t)\Gamma + R'(0)\mathcal{F}^{(p_i-2)}(t)\Gamma + \ldots +$$
$$+R^{(p_i-2)}(0)\mathcal{F}'(t)\Gamma + R^{(p_i-1)}(0)\mathcal{F}(t)\Gamma\Big)\theta(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i\Big(R^{(p_i)}(t) - \int\limits_0^t R^{(p_i)}(t-s)\mathcal{F}(s)\Gamma ds\Big)\theta(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i R^{(p_i)}(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}(t)\Gamma\theta(t)),$$

что и завершает доказательство равенства 5^0 и всей леммы. □

Доказательство теоремы 1. Согласно определению фундаментальной оператор-функции (см. п. 2), требуется установить равенства

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) = \mathbb{I}_2\ \delta(t),\ \mathcal{E}(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \mathbb{I}_1\ \delta(t).$$

Раскрывая первую свертку, получим

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) =$$
$$= ((\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - \mathcal{F}(t)\Gamma\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t) =$$
$$= \Big(\mathbb{I}_2\delta(t) - Q\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R(t)\theta(t))\Big) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t) =$$
$$= \Big((\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - QR(t)\theta(t))\Big) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t).$$

Отсюда, в силу 2^0 и 4^0, $\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) = (\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) + Q\delta(t) = \mathbb{I}_2\delta(t)$.

Для доказательства второго равенства воспользуемся соотношением 5^0 из леммы.

$$\mathcal{E}(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$$
$$= \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) * G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$$

$$= \Gamma \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N(t)\theta(t)) *$$

$$* (\mathbb{I}_2\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} Q_i R^{(p_i)}(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}(t)\Gamma\theta(t)) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t) =$$

$$= \Gamma \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t) = \mathbb{I}_1\delta(t).$$

Таким образом, теорема 1 доказана. □

Пусть $u(t)$, $f(t)$ — функции неотрицательного вещественного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим задачу Коши вида

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = f(t),\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \qquad (1)$$

где $B,\ A_{N-1}, \ldots,\ A_1,\ A_0,\ k(t)$ из теоремы 1. В обобщенных функциях эта задача принимает вид сверточного уравнения

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t),$$

единственным решением которого в классе $K'_+(E_1)$ (*обобщенным* решением задачи Коши (1)), как показано в пункте 2, является

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t). \qquad (2)$$

Здесь $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ задается формулой

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + (Bu_{N-1} - A_{N-1}u_{N-2} - \ldots - A_1u_0)\delta(t) +$$
$$+ (Bu_{N-2} - A_{N-1}u_{N-3} - \ldots - A_2u_0)\delta'(t) + \ldots +$$
$$+ (Bu_1 - A_{N-1}u_0)\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда задача Коши (1) имеет единственное обобщенное решение вида (2).*

Замечание 1. Применяя методику работы [4], можно установить, что решение (2) имеет следующую структуру:

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t) = u(t)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i-N} \sum_{k=1}^{p_i-N+1-j} c_{i\ [k+j+N-1]}\varphi_i^{(j)}\delta^{(j-1)}(t),$$

где $u(t)$ в случае $\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in \mathcal{C}^{p_i-j+1}(\mathbb{R}_+)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, принадлежит классу $\mathcal{C}_+^N(E_1) = \mathcal{C}(t \geq 0;\ E_1) \cap \mathcal{C}^N(t > 0;\ E_1)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1) и следующим начальным условиям:

$$u^{(k-1)}(0) = u_{k-1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i-N+k} c_{i\ [j+N-k]}\varphi_i^{(j)},\ k = 1, \ldots, N.$$

Коэффициенты $c_{i\ [j]} \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,p_i$, определяются единственным образом по формулам

$$c_{i\ [j]} = -\sum_{k=1}^{p_i-j+1} \left\langle h^{(p_i-j-k+1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,p_i,$$

здесь $h(t) = f(t) - \mathcal{L}_N(p(t)),\ p(t) = u_0 + u_1 t + \ldots + u_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}$. Если положить $c_{i\ [j]} = 0,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,p_i$, то решение (2) представляет собой регулярную обобщенную функцию вида $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$, где $u(t) \in \mathcal{C}_+^N(E_1)$ обращает в тождество рассматриваемое уравнение и удовлетворяет исходным начальным условиям, т. е. является *классическим* решением задачи Коши (1). Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и*

$$\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in \mathcal{C}^{p_i-j+1}(\mathbb{R}_+),\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,p_i,$$

тогда, если

$$\sum_{k=1}^{p_i-j+1} \left\langle h^{(p_i-j-k+1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle = 0,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,p_i,$$

то задача Коши (1) имеет единственное классическое решение.

Замечание 2. Полученные в теореме 3 условия описывают множество правых частей интегро-дифференциального уравнения и начальных данных (1), при которых рассматриваемая задача Коши однозначно разрешима в классе $\mathcal{C}_+^N(E_1)$.

4. Приложения

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^m$ с границей $\partial\Omega$ класса $\mathcal{C}^\infty$, переменная t принимает неотрицательные действительные значения, т. е. $t \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$. В цилиндре $\mathbb{R}_+ \times \Omega = \{(t,\bar{x}) :\ t \in \mathbb{R}_+,\ \bar{x} \in \Omega\}$ рассмотрим интегро-дифференциальные уравнения

$$(\nu - \Delta)u_t - \Delta u - \int_0^t g(t-s)\Delta u(s,\bar{x})ds = f(t,\bar{x}), \qquad (3)$$

$$(\alpha - \Delta)u_{tt} - \beta\Delta u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s,\bar{x})ds = f(t,\bar{x}), \qquad (4)$$

и дифференциальные уравнения

$$(\Delta-\lambda_2)u_{ttt}-k\Delta(\Delta-\lambda_1)u_{tt}-\gamma\Delta^2u_t+k\Delta^3u=f(t,\bar{x}), \qquad (5)$$

$$\tau(\Delta-\lambda_3)u_{tttt}+(\Delta-\lambda_2)u_{ttt}-\Delta((\tau\gamma+k)\Delta-k\lambda_1)u_{tt}- \\ -\gamma\Delta^2u_t+k\Delta^3u=f(t,\bar{x}), \quad (6)$$

где $\nu,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ k,\ \tau$ — отличные от нуля вещественные постоянные, причем $\lambda_2\neq\lambda_1$ в уравнении (5), $\tau>0$ и $\lambda_3\neq\lambda_2$ в уравнении (6), ядро $g(t):\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ в (3) и (4) является аналитической функцией.

Перечисленные уравнения представляют интерес с точки зрения приложений. Например, уравнение (3) возникает при решении задач нелинейной динамики наследственно упругих тел [7]. В случае $m=3$ и $f(t,x_1,x_2,x_3)\equiv 0$ уравнение (4) моделирует вязкоупруго-динамическое состояние среды [7], при этом $u=u(t,x_1,x_2,x_3)$ определяет смещение, числа α и β представляют собой нелинейные соотношения между постоянными характеристиками среды, а функция $g=g(t)$ отражает ее реологические свойства (ползучесть). При $m=2$ и $f(t,x_1,x_2)\equiv 0$ уравнение (5) описывает колебания термоупругой пластины [9], а уравнение (6) — этот же процесс в нестационарном тепловом поле, распространяющемся согласно закону Каттанео — Вернотте [10], причем функция $u=u(t,x_1,x_2)$ определяет прогиб пластины, коэффициенты λ_2 и λ_3 обратно пропорциональны квадрату ее толщины, вещественный параметр $\tau>0$ задает время релаксации теплового потока, остальные постоянные отражают механические и тепловые характеристики, которые в рамках моделируемых процессов предполагаются неизменными.

Для каждого из уравнений (3), (4), (5) и (6) зададим начальные

$$\left.\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}u(t,\bar{x})\right|_{t=0}=u_{k-1}(\bar{x}),\ k=1,\dots,N,\ \bar{x}\in\Omega, \qquad (7)$$

при $N=1,\ 2,\ 3$ и 4 соответственно, и однородное граничное

$$u(t,\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,\ (t,\bar{x})\in\mathbb{R}_+\times\partial\Omega, \qquad (8)$$

условия, т. е. поставим задачи Коши — Дирихле. Здесь функции $u_{k-1}(\bar{x})$, $k=1,\dots,N$, для уравнений (3) и (4) имеют на множестве Ω по совокупности переменных порядок гладкости $l+2$, а для (5) и (6) — $l+6$, где $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, причем $u_{k-1}(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,\ k=1,\dots,N$.

Начально-краевые задачи (3), (7), (8) и (4), (7), (8) допускают редукцию к задаче Коши (1) при $N=1$ и $N=2$, если положить

$$E_1=\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega)\equiv\left\{v(\bar{x})\in\mathcal{L}_2(\Omega):\ v(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0\right\},\ E_2=\mathcal{L}_2(\Omega),$$

а операторы $B=\nu-\Delta,\ A_0=\Delta$ и $B=\alpha-\Delta,\ A_1=\beta\Delta,\ A_0=\Delta$, ядра интегральных частей $k(t)=g(t)\Delta$ и $k(t)=-g(t)\Delta$ заданными в

$\overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Omega) \equiv \left\{ v(\bar{x}) \in W_2^{l+2}(\Omega) : \ v(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0 \right\}$. Здесь и далее через $\mathcal{L}_2(\Omega)$ и $W_2^l(\Omega) \equiv H^l(\Omega)$ обозначены пространства Лебега и Соболева.

Выбирая $E_1 = \overset{\circ}{H}{}^{l+6}(\Omega)$, $E_2 = H^l(\Omega)$ и полагая области определения операторов $B = \Delta - \lambda_2$, $A_2 = k\Delta(\Delta - \lambda_1)$, $A_1 = \gamma\Delta^2$, $A_0 = -k\Delta^3$, $k(t) \equiv \mathbb{O}$ и $B = \tau(\Delta - \lambda_3)$, $A_3 = -(\Delta - \lambda_2)$, $A_2 = \Delta((\tau\gamma + k)\Delta - k\lambda_1)$, $A_1 = \gamma\Delta^2$, $A_0 = -k\Delta^3$, $k(t) \equiv \mathbb{O}$, совпадающими с E_1, сведем задачи Коши — Дирихле (5), (7), (8) и (6)-(8) к начальной задаче (1) с порядками $N = 3$ и $N = 4$ дифференциальных частей интегро-дифференциального уравнения. Здесь $\mathbb{O} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ — нуль-оператор.

Будем предполагать $\nu, \ \alpha, \ \lambda_2, \ \lambda_3 \in \sigma(\Delta)$, где $\sigma(\Delta)$ — спектр однородной задачи Дирихле $\Delta\phi(\bar{x}) = \mu\phi(\bar{x}), \ \phi(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0$, что, с учетом выбора E_1 и $D(B)$, соответствует случаям самосопряженных, а, значит, фредгольмовых операторов $B = \nu - \Delta$, $B = \alpha - \Delta$, $B = \Delta - \lambda_2$ и $B = \tau(\Delta - \lambda_3)$, размерности ядер которых совпадают с конечными кратностями собственных чисел $\nu, \ \alpha, \ \lambda_2$ и λ_3 соответственно.

Обозначим $\sigma(\Delta) = \{\mu_i\}_{i=1}^{+\infty}$, где собственные числа μ_i занумерованы в порядке убывания с учетом кратности, $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — система собственных функций, ортонормированная в смысле скалярного произведения пространства $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Пусть $\phi_i(\bar{x}), \ \mu_i = \nu$ отвечают $\nu \in \sigma(\Delta)$, т. е. являются базисными элементами ядра оператора $B = \alpha - \Delta$. В качестве базиса в $N(B^*)$ выберем функции $\psi_i(\bar{x}) = \frac{1}{\nu}\phi_i(\bar{x}), \ \mu_i = \nu$. Тогда имеет место соотношение $\langle l_1(\varphi_i), \ \psi_j \rangle = \int\limits_\Omega \Delta\phi_i(\bar{x})\psi_j(\bar{x})d\bar{x} = \delta_{ij}$, которое означает отсутствие присоединенных элементов у образующих полный жорданов набор элементов $\phi_i(\bar{x}), \ \mu_i = \nu$, т. е. все $p_i = 1$ (см. п. 1). В аналогичных обозначениях то же самое можно показать для операторов $B = \alpha - \Delta$, $B = \Delta - \lambda_2$ и $B = \tau(\Delta - \lambda_3)$ из уравнений (4), (5) и (6), выбирая базисные элементы в $N(B^*)$ следующим образом:

$$\psi_i(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha\beta}\ \phi_i(\bar{x}), \ \mu_i = \alpha, \ \psi_i(\bar{x}) = \frac{1}{k\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\ \phi_i(\bar{x}), \ \mu_i = \lambda_2, \ \lambda_2 \neq \lambda_1,$$

$$\psi_i(\bar{x}) = -\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2}\ \phi_i(\bar{x}), \ \mu_i = \lambda_3, \ \lambda_3 \neq \lambda_2.$$

Далее как следствия теорем 2 и 3 сформулируем утверждения об однозначной разрешимости рассматриваемых начально-краевых задач.

Теорема 4. *Пусть* $\nu \in \sigma(\Delta)$ *и* $\int\limits_\Omega f(t, \bar{x})\phi_i(\bar{x})d\bar{x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+), \ \mu_i = \nu$, *тогда задача Коши — Дирихле (3), (7), (8) имеет единственное обобщенное* *решение, определяемое формулой*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) =$$
$$= \Bigg[u_0(\bar{x}) + \sum_{\mu_i\neq\nu} \frac{1}{\nu-\mu_i} \int\limits_0^t \Big(1 + \int\limits_0^{t-s} p_i(\tau)d\tau\Big) a_{\mu_i}(s)ds\phi_i(\bar{x}) -$$
$$- \frac{1}{\nu}\sum_{\mu_i=\nu}\Big(a_{\mu_i}(t) + \int\limits_0^t p(t-s)a_{\mu_i}(s)ds\Big)\phi_i(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

причем функция $u = u(t,\bar{x}) \in \mathcal{C}^1_+(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *является классическим решением этой задачи, если выполнены соотношения*

$$\int\limits_\Omega \Big(f(0,\bar{x}) + \nu u_0(\bar{x})\Big)\phi_i(\bar{x})d\bar{x} = 0,\ \mu_i = \nu.$$

Здесь $p_i(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\mu_i}{\nu-\mu_i}\ (1 + \int\limits_0^t g(s)ds)$, $p(t)$ *— резольвента ядра* $-g(t)$, *функция* $a_{\mu_i}(t)$ *задается следующим образом:*

$$a_{\mu_i}(t) = \int\limits_\Omega \Big[f(t,\bar{x}) + \mu_i\Big(1 + \int\limits_0^t g(s)ds\Big)u_0(\bar{x})\Big]\phi_i(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 5. *Пусть* $\alpha \in \sigma(\Delta)$ *и* $\int\limits_\Omega f(t,\bar{x})\phi_i(\bar{x})d\bar{x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, $\mu_i = \alpha$, *тогда задача Коши — Дирихле (4), (7), (8) имеет единственное обобщенное решение, определяемое формулой*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + tu_1(\bar{x}) +$$
$$+ \sum_{\mu_i\neq\alpha} \frac{1}{\alpha-\mu_i} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \Big(1 + (t-s-\tau)q_i(\tau)\Big) b_{\mu_i}(s)d\tau ds\phi_i(\bar{x}) -$$
$$- \frac{1}{\alpha\beta}\sum_{\mu_i=\alpha}\int\limits_0^t \Big(1 + \int\limits_0^{t-s} q(\tau)d\tau\Big) b_{\mu_i}(s)ds\phi_i(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

причем функция $u = u(t,\bar{x}) \in \mathcal{C}^2_+(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *является классическим решением этой задачи, если выполнены соотношения*

$$\int\limits_\Omega \Big(f(0,\bar{x}) + \alpha\beta u_1(\bar{x}) + \alpha u_0(\bar{x})\Big)\phi_i(\bar{x})d\bar{x} = 0,\ \mu_i = \alpha.$$

Здесь $q_i(t)$, $q(t)$ *— резольвенты ядер* $\frac{\mu_i}{\alpha-\mu_i}$ $(\beta+t-\int\limits_0^t(t-s)g(s)ds)$ *и* $-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^t g(s)ds$ *соответственно, функция* $b_{\mu_i}(t)$ *имеет вид*

$$b_{\mu_i}(t)=\int\limits_{\Omega}\Big[f(t,\bar{x})+\mu_i\Big(\beta+t-\int\limits_0^t(t-s)g(s)ds\Big)u_1(\bar{x})+$$
$$+\mu_i\Big(1-\int\limits_0^t g(s)ds\Big)u_0(\bar{x})\Big]\phi_i(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\lambda_2\in\sigma(\Delta)$, $\lambda_2\neq\lambda_1$ *и* $\langle f(t,\bar{x}),\ \phi_i(\bar{x})\rangle_{H^l(\Omega)}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, $\mu_i=\lambda_2$, *тогда задача Коши — Дирихле (5), (7), (8) имеет единственное обобщенное решение, определяемое формулой*

$$\tilde{u}(t,\bar{x})=u(t,\bar{x})\theta(t)=\Big[u_0(\bar{x})+tu_1(\bar{x})+\frac{t^2}{2}u_2(\bar{x})+$$
$$+\sum_{\mu_i\neq\lambda_2}\frac{1}{\mu_i-\lambda_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\Big((t-s-\tau)+\frac{(t-s-\tau)^2}{2}r_i(\tau)\Big)c_{\mu_i}(s)d\tau ds\phi_i(\bar{x})-$$
$$-\frac{1}{k\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\sum_{\mu_i=\lambda_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\Big(1+(t-s-\tau)r(\tau)\Big)c_{\mu_i}(s)d\tau ds\phi_i(\bar{x})\Big]\theta(t),$$

причем функция $u=u(t,\bar{x})\in\mathcal{C}^3_+(\overset{\circ}{H}{}^{l+6}(\Omega))$ *является классическим решением этой задачи, если выполнены соотношения*

$$\Big\langle f(0,\bar{x})+k\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)u_2(\bar{x})+\gamma\lambda_2^2u_1(\bar{x})-k\lambda_2^3u_0(\bar{x}),\ \phi_i(\bar{x})\Big\rangle_{H^l(\Omega)}=0,$$
$$\mu_i=\lambda_2.$$

Здесь $r_i(t)$ *и* $r(t)$ *— резольвенты ядер* $\frac{\mu_i}{\mu_i-\lambda_2}\Big(k(\mu_i-\lambda_1)+\gamma\mu_i t-k\mu_i^2\frac{t^2}{2}\Big)$ *и* $\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(-\frac{\gamma}{k}+\lambda_2 t)$ *соответственно, функция* $c_{\mu_i}(t)$ *имеет вид*

$$c_{\mu_i}(t)=\Big\langle f(t,\bar{x})+\mu_i\Big(k(\mu_i-\lambda_1)+\gamma\mu_i t-k\mu_i^2\frac{t^2}{2}\Big)u_2(\bar{x})+$$
$$+\mu_i^2(\gamma-k\mu_i t)u_1(\bar{x})-k\mu_i^3u_0(\bar{x}),\ \phi_i(\bar{x})\Big\rangle_{H^l(\Omega)}.$$

Теорема 7. *Пусть* $\lambda_3\in\sigma(\Delta)$, $\lambda_3\neq\lambda_2$ *и* $\langle f(t,\bar{x}),\ \phi_i(\bar{x})\rangle_{H^l(\Omega)}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, $\mu_i=\lambda_3$, *тогда задача Коши — Дирихле (6)-(8) имеет единственное* *обобщенное решение, определяемое формулой*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + tu_1(\bar{x}) + \frac{t^2}{2}u_2(\bar{x}) + \frac{t^3}{6}u_3(\bar{x}) +$$

$$+\sum_{\mu_i\neq\lambda_3}\frac{1}{\tau(\mu_i-\lambda_3)}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\left(\frac{(t-\xi-\eta)^2}{2}+\frac{(t-\xi-\eta)^3}{6}s_i(\eta)\right)d_{\mu_i}(\xi)d\eta d\xi\phi_i(\bar{x})+$$

$$+\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}\sum_{\mu_i=\lambda_3}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\left((t-\xi-\eta)+\frac{(t-\xi-\eta)^2}{2}s(\eta)\right)d_{\mu_i}(\xi)d\eta d\xi\phi_i(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

причем функция $u = u(t,\bar{x}) \in \mathcal{C}^4_+(\overset{\circ}{H}{}^{l+6}(\Omega))$ *является классическим решением этой задачи, если выполнены соотношения*

$$\left\langle f(0,\bar{x})+(\lambda_2-\lambda_3)u_3(\bar{x})+\omega_{\mu_i}u_2(\bar{x})+\gamma\lambda_2^2u_1(\bar{x})-k\lambda_2^3u_0(\bar{x}),\ \phi_i(\bar{x})\right\rangle_{H^l(\Omega)}=0,$$

$$\mu_i = \lambda_3,\ \omega_{\mu_i} = \mu_i((\tau\gamma+k)\mu_i - k\lambda_1).$$

Здесь $s_i(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{1}{\tau(\mu_i-\lambda_3)}\left(\lambda_2-\mu_i+\omega_{\mu_i}t+\gamma\mu_i^2\frac{t^2}{2}-k\mu_i^3\frac{t^3}{6}\right)$, $s(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}((\omega_{\mu_i}+\gamma\lambda_3^2t-k\lambda_3^3\frac{t^2}{2})$, *функция* $d_{\mu_i}(t)$ *задается следующим образом:*

$$d_{\mu_i}(t) = \Bigg\langle f(t,\bar{x}) + \left(\lambda_2-\mu_i+\omega_{\mu_i}t+\gamma\mu_i^2\frac{t^2}{2}-k\mu_i^3\frac{t^3}{6}\right)u_3(\bar{x})+$$

$$+\left(\omega_{\mu_i}+\gamma\mu_i t-k\mu_i^3\frac{t^2}{2}\right)u_2(\bar{x})+\mu_i^2(\gamma-k\mu_i t)u_1(\bar{x})-k\mu_i^3u_0(\bar{x}),\ \phi_i(\bar{x})\Bigg\rangle_{H^l(\Omega)}.$$

Список литературы

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
3. Логинов Б. В. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления / Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения. – Ташкент : ФАН, 1978. – С. 133–148.
4. Сидоров Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726–728.

5. Фалалеев М. В. О приложениях теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск : Изд-во ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН. – С. 283–297.
6. Фалалеев М. В. Начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17, вып. 4. – С. 597–600.
7. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 24. – P. 1043–1053.
8. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2002. – 548 p.
9. Munoz Rivera J. E. Regularizing Properties and Propagations of Singularities for Thermoelastic Plates / J. E. Munoz Rivera, L. H. Fatori // Math. Meth. Appl. Sci. – 1998. – Vol. 21. – P. 797–821.
10. Racke R. Asymptotic Behavior of Solutions in Linear 2- or 3-d Thermoelasticity with Second Sound / R. Racke // Quart Appl. Math. – 2003. – Vol. 61. – P. 409–441.

M. V. Falaleev, S. S. Orlov

Integro-differential equations with degeneration in Banach spaces and it's applications in mathematical theory of elasticity

Abstract. Cauchy problem for linear integro-differential operator equation with degenerated differential part of high order and convolutional type Volterra integral term is considered in article. Fundamental operator-function of integro-differential operator, appropriated of examining equation, is constructed, Cauchy problem generalized (in class of distributios with left-bounded support) and classical (N times strongly continuously differentiable) solutions existence and uniqueness theorems are proved. Obtaining results are applied to the investigation of initial boundary value problems, arised in mathematical theory of elasticity.

Keywords: Banach space, Fredholm operator, Jordan set, distribution, fundamental operator-function

Фалалеев Михаил Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (`mihail@ic.isu.ru`)

Орлов Сергей Сергеевич, аспирант, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (`orlov_sergey@inbox.ru`)

Falaleev Mihail, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)242210 (`mihail@ic.isu.ru`)

Orlov Sergey, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 post-graduate student, Phone: (3952)242210 (`orlov_sergey@inbox.ru`)