Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 55—60

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 511.218

Группа автоморфизмов решетки разбиений натуральных чисел

А. А. Старовойт
Уральский федеральный университет им Б. Н. Ельцина

Аннотация. В работе доказывается, что решетка всех разбиений натуральных чисел NPL обладает только тривиальными автоморфизмами.

Ключевые слова: разбиение натурального числа; автоморфизм; решетка.

1. Введение

Разбиением натурального числа n называется последовательность целых неотрицательных чисел

$$U = (u_1, u_2, ...)$$

такая, что $u_1 \geq u_2 \geq ...$, причем U содержит лишь конечное число ненулевых компонент и их сумма равна n.

Длиной разбиения назовем число t – количество ненулевых элементов в разбиении. При длине разбиения t мы будем записывать разбиение в виде

$$U = (u_1, u_2, ..., u_t).$$

Разбиения удобно представлять в виде диаграмм Ферре.

Введем следующие обозначения:
$NPL(n)$ — множество всех разбиений натурального числа n ,
$NPL(n, t)$ — множество всех разбиений натурального числа n длины t.

Введем понятие элементарного преобразования разбиения

$$(u_1, u_2, ..., u_t).$$

Предположим, что существуют i, j, для которых выполняется
– $1 \leq i < j$,

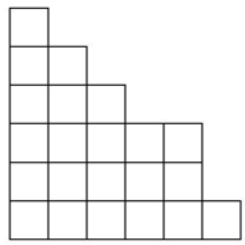

Рис. 1. Диаграмма Ферре для разбиения (6,5,4,3,3,1) числа 22

– $u_i - 1 \geq u_{i+1}$ и $u_{j-1} \geq u_j + 1$,
– $u_i = u_j + \delta$.

Будем говорить, что разбиение $(u_1, u_2, ..., u_i - 1, ..., u_j + 1, ...)$ получено *элементарным преобразованием* (или *перекидыванием блока*) разбиения $(u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_j, ...)$.

Введем отношение $\geq$ на множестве $NPL(n)$, полагая $u \geq v$, если v можно получить из u с помощью последовательного выполнения конечного числа элементарных преобразований. Относительно этого отношения множества $NPL(n)$ и $NPL(n, t)$ являются решетками [1].

Если $j = i + 1$, то мы будем называть такое элементарное преобразование *падением блока.* В случае, если $i + 1 < j$ и $u_i = u_{i+1} + 1$, $u_{i+1} = u_{i+2} = ... = u_{j-1}, u_{j-1} = u_j + 1$, будем говорить о *сдвиге блока* В [1] показывается, что одно разбиение покрывает другое тогда и только тогда, когда второе разбиение получается из первого в результате падения или сдвига блока. Поэтому для определения нашего отношения достаточно этих двух операций.

Примеры:

Падение блока из второй компоненты $(5, 4, 1) \to (5, 3, 2)$.

Сдвиг блока из первой компоненты $(5, 4, 4, 3, 1) \to (4, 4, 4, 4, 1)$.

Запись $A \to B$ означает, что разбиение B получается из A с помощью элементарного преобразования. Обозначим через NPL множество всех

Рис. 2. Падение и сдвиг блока

разбиений всех натуральных чисел.

Определим *элементарные преобразования* разбиений из NPL. В их число включим все ранее рассматриваемые элементарные преобразования и добавим новое, которое будем называть отбрасыванием блока. Элемент U' получен из U с помощью отбрасывания блока, если $U = (u_1, \ ..., \ u_t, 1)$ и $U' = (u_1, \ ..., \ u_t)$.

На множестве NPL введем отношение $\geq$, полагая $U \geq V$, если V можно получить из U с помощью последовательного выполнения конечного числа элементарных преобразований. В [1] доказано, что множество NPL с порядком $\geq$ является решеткой с нулем.

Очевидно, что разбиение U покрывает разбиение V в $NPL, \geq$ тогда и только тогда, когда V получается из U с помощью сдвига, падения или отбрасывания блока (будем записывать $U \to V$). Далее мы будем подразумевать под элементарными преобразованиями только эти три вида преобразований.

2. Автоморфизмы решетки NPL

Рассмотрим произвольную решетку L с нулем 0 (т. е. наименьшим элементом), удовлетворяющую условиям:

1) в решетке L все цепи конечные,

2) каждый элемент решетки покрывает лишь конечное число элементов,

3) каждый элемент решетки покрывается лишь конечным числом элементов.

Ясно, что решетка NPL удовлетворяет этим свойствам.

Назовем *высотой элемента* максимальную длину цепи от данного элемента до наименьшего элемента решетки.

Элемент решетки L называется *однопокрывающим*, если он покрывает точно один элемент. Пару элементов a, b решетки L будем назвать *однородной*, если

1) $a \neq b$,

2) a, b – однопокрывающие элементы,

3) a и b – покрывают один и тот же элемент,

4) a и b имеют одинаковое число покрывающих их элементов.

Ясно, что если a и b – однородная пара элементов, то $a \wedge b = c$, где c - элемент покрываемый a и b.

Лемма 1. *Пусть ψ – автоморфизм решетки L и a – элемент наименьшей высоты такой, что $\psi(a) = a$. Тогда a, $\psi(a)$ – однородная пара элементов.*

Доказательство. Очевидно, $a \neq 0$. Пусть $a \gtrdot c$ в решетке L. Тогда $\psi(a) \gtrdot \psi(c) = c$ и поэтому $a \wedge \psi(a) = c$. С учетом равенства $\psi^{-1}\psi(a) = a$ отсюда вытекает заключение леммы. □

Отметим, что в силу леммы 1 решетка L, обладающая нетривиальными автоморфизмами, обязательно имеет однородные пары элементов.

Лемма 2. *Разбиение C в решетке NPL является однопокрывающим элементом тогда и только тогда, когда оно представимо в виде*

1) *$C = (a_1, ..., a_t)$, где $a_1 = a_2 = ... = a_t = 1$ и $t > 1$,*
2) *$C = (x)$, для некоторого натурального числа $x > 1$,*
3) *$C = (a_1, ..., a_t)$, где $x + 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_t = x > 1$, для некоторого натурального числа x.*

Доказательство. Возьмем произвольное разбиение C

$$C = (a_1, ..., a_t).$$

Если это разбиение имеет вид 1) или 2), то, очевидно, оно покрывает только один элемент - $(a_1, ..., a_{t-1})$ и $(x - 1, 1)$ соответственно. Поэтому, будем считать, что разбиение C имеет вид отличный от 1) и 2).

Рассмотрим случай $a_t = 1$. Если разбиение C имеет вид

$$C = (a_1, ..., a_t),\ 2 = a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_t = 1.$$

то, очевидно, оно покрывает два разбиения: первое получается откидыванием последнего блока, а второе – сдвигом блока с последней двойки. Теперь допустим, что вид разбиения C отличен от рассмотренного. Тогда в решетке $NPL(a_1 + ... + a_t, t)$ данное разбиение не является наименьшим элементом, и, следовательно, оно покрывает некоторое разбиение, длина которого равна t. Из C мы можем получить еще одно разбиение – с помощью отбрасывания последней единицы. Поэтому C будет покрывать не менее двух разбиений.

Допустим, что $a_t > 1$. Тогда разбиение C покрывает разбиение

$$K = (a_1, ..., a_t - 1, 1).$$

Если разбиение C имеет вид отличный от 3), то в решетке $NPL(a_1 + ... + a_t, t)$ данное разбиение не является наименьшим элементом, и, следовательно, оно покрывает некоторое разбиение, длина которого равна t, поэтому разбиение C покрывает не менее двух разбиений.

Если разбиение C имеет вид 3), то оно является наименьшим элементом решетки $NPL(a_1+...+a_t,t)$. Тогда в решетке $NPL(a_1+...+a_t)$ разбиение C покрывает только элемент K. Поскольку применить элементарное преобразование откидывания блока к C мы не можем в силу условия $a_t>1$, а другие элементарные преобразования элемента C в решетке NPL совпадают с элементарными преобразованиями в решетке $NPL(a_1+...+a_t)$, в NPL разбиение C покрывает только разбиение K. $\square$

Теорема 1. *Группа автоморфизмов решетки NPL тривиальна.*

Доказательство. В силу Леммы 1 достаточно установить, что NPL не содержит однородных пар элементов. Пусть, от противного, разбиения B и D образуют однородную пару элементов.

Разбиение (1) – наименьший элемент решетки NPL, поэтому для любого автоморфизма он неподвижен.

1. Пусть разбиение B имеет вид 1) из Леммы 2

$$B=(b_1,...,b_t)=(1,...,1),t>1.$$

При $t=2$ данное разбиение является единственным разбиением покрывающим (1). Поэтому данный случай невозможен.

Допустим $t=3$. Тогда разбиение B покрывает разбиение $C=(1,1)$. Очевидно, что разбиение C, помимо B, покрывается только элементом $D=(2)$. Таким образом разбиения B и D покрывают только один элемент C. Заметим далее, что над разбиением D лежит только одно покрытие, а над B – два, что невозможно.

Допустим теперь, что $t>3$. Тогда разбиение B покрывает только разбиение длины $t-1$

$$C=(1,...,1)$$

Над разбиением C, помимо B, находится только покрытие длины $t-2$

$$D=(2,1,...,1).$$

Однако разбиение D не является однопокрывающим, поэтому мы снова пришли к противоречию.

2. Пусть разбиение B имеет вид 2) из Леммы 2

$$B=(x).$$

Можно считать, что $x>2$ поскольку разбиение вида $D=(2)$ уже было рассмотрено в п. **1**. Тогда разбиение B покрывает разбиение

$$C=(x-1,1).$$

Очевидно, что над C помимо B, находится только покрытие

$$D=(x-1,1,1).$$

В силу условия $x > 2$ разбиение D не является однопокрывающим, что невозможно.

3. Пусть разбиение B имеет вид 3) из Леммы 2

$$B = (a_1, ..., a_t),\ x + 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_t = x > 1.$$

Разбиение B покрывает разбиение

$$C = (a_1, ..., a_t - 1, 1).$$

Разбиение C может получиться из некоторого разбиения

$$D = (d_1, ..., d_{t+1}, ...)$$

$(D \neq B)$ в результате либо отбрасывания блока, либо перекидывания блока с одной из компонент $d_j,\ j \in \{1, ..., t-1\}$. Но тогда в любом случае у разбиения D первая компонента будет не меньше x, а последняя компонента будет единичная. Мы получаем, что вид разбиения D не будет совпадать ни с одним из описанных выше видов однопокрывающих элементов.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в решетке NPL не существует однородных пар элементов, поэтому не существует и нетривиальных автоморфизмов. □

Список литературы

1. Баранский В. А. Решетка разбиений натурального числа / В. А. Баранский, Т. А. Королева //Докл. Акад. наук. – 2008. – Т. 418, вып. 4. – С. 439–442.

A. A. Starovoyt

The group of automorphisms of the lattice of partitions of a positive integers

Abstract. This paper contains proof that the lattice of partitions of a positive integers NPL has no nontrivial automorphisms.

Keywords: lattice, partition of a positive integer, automorphism.

Старовойт Андрей Андреевич, аспирант, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19 тел.: 89090024725 (anstarovoyt@gmail.com)

Starovoyt Andrey, Ural Federal University 19, Mira St., Ekaterinburg, 620002 Phone: 89090024725 postgraduate, (anstarovoyt@gmail.com)