Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 31—45

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.983

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами в теории моделирования развивающихся систем *

Е. В. Маркова
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет

Аннотация. Предложен метод построения параметрических семейств непрерывных решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода, возникающих в теории развивающихся систем. Ядра уравнений допускают разрывы первого рода. Построено характеристическое алгебраическое уравнение. Аналитически и численно изучается регулярный случай, когда характеристическое уравнение не имеет натуральных корней и решение интегрального уравнения единственное. В нерегулярном случае характеристическое уравнение имеет натуральные корни, а решение рассматриваемого интегрального уравнения содержит произвольные постоянные. Доказаны теоремы существования решений и строится их асимптотика. Теоретические результаты иллюстрируются численными расчетами.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра; модель Глушкова; развивающиеся системы; метод шагов; асимптотика; численные методы.

1. Введение

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \le t \le T,\ f(0) = 0. \qquad (1.1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-08-00109-а. Работа также частично поддержана грантом Минобрнауки РФ, номер госрегистрации НИР: 01200804682, и Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD), № A1200665.

Ядро $K(t,s)$ имеет в области $0 \le s \le t \le T$ разрывы первого рода на кривых $s = \alpha_i(t), i = \overline{1, n-1}$, т. е.

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & 0 \le s < \alpha_1(t), \\ K_2(t,s), & \alpha_1(t) \le s < \alpha_2(t), \\ \dots & \dots\dots\dots \\ K_n(t,s), & \alpha_{n-1}(t) \le s < t, \end{cases}$$

где $\alpha_0(t) \equiv 0 < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < \alpha_n(t) = t$. Функции $K_i(t,s)$, $f(t)$, $\alpha_i(t)$ имеют непрерывные производные по t при $0 \le t \le T, K_n(t,t) \ne 0$. Функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ возрастают в малой окрестности $0 \le t \le \tau$, $\alpha_i(0) = 0$. В работе предполагается, что кривые $s = \alpha_i(t)$ делят треугольную область $0 \le s \le t \le T$ на n непересекающихся областей $D_i = \{s, t; \alpha_{i-1}(t) \le s < \alpha_i(t)\}, i = \overline{1, n}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, являющихся секторами с вершинами в нуле в плоскости s, t.

Требуется построить непрерывное решение $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T]}$, имеющее предел (возможно, бесконечный) при $t \to +0$.

Теория и численные методы решения уравнения (1.1) при $K_i(t,s) \equiv 0$, $i = \overline{1, n-1}$, подробно исследованы в монографии А. С. Апарцина [1] и в диссертации Е. В. Марковой [4]. Численные методы решения такого уравнения рассматривались также в работе H. Brunner [10].

Уравнения первого рода играют важную роль в теории обратных и некорректных задач, созданной в трудах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и их учеников.

Интегральные уравнения с разрывными ядрами представляют теоретический интерес и возникают во многих физических и биологических моделях. Например, некоторые интегральные модели прикладной математики (см., например, [1, 5, 12]) можно трактовать как уравнения Вольтерра с кусочно-непрерывными ядрами. Первые результаты в области интегральных уравнений с разрывными ядрами были получены G. C. Evans в начале XX века. А именно, в работе [11] доказана теорема существования единственного непрерывного решения интегрального уравнения Вольтерра II рода с разрывным ядром и при определенных условиях методом мажорант обоснована сходимость метода последовательных приближений. Результаты в спектральной теории классов интегральных операторов с разрывным ядром получены в работах А. П. Хромова [8]. Асимптотические приближения решений интегральных уравнений Вольтерра I рода с аналитическим ядром $K(t,s)$ исследовал Н. А. Магницкий (см., например, работу [3]). В отличие от работы [3] дифференцирование уравнения (1.1) приводит не к интегральным уравнениям Вольтерра II (III) рода, а к интегро-функциональным уравнениям. Поэтому рассмотрение этого класса уравнений типа Вольтерра требует специальных исследований.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе в предположении существования локального решения $x_0(t)$ уравнения (1.1) предлагается метод его глобального продолжения. В третьем разделе доказана теорема существования единственного непрерывного решения на замкнутом интервале [0,T]. В четвертом разделе построена асимптотика единственного непрерывного решения, сформулировано и доказано второе достаточное условие разрешимости уравнения (1.1) в пространстве $\mathbb{C}_{[0,T]}$. В пятом разделе теоретические результаты иллюстрируются численными расчетами. В шестом разделе отмечается случай существования параметрических семейств решений исходного уравнения.

2. Продолжение локального решения

Предположим, что уравнение (1.1) имеет локальное решение $x_0(t)$. Предлагается метод его глобального продолжения сочетанием метода последовательных приближений [7] и последующим применением «метода шагов» [9]. Отметим, что в работах [13, 6] был изложен метод построения асимптотического локального решения уравнения (1.1).

В силу неравенств $0 = \alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \cdots < \alpha_{n-1}(t) < \alpha_n(t) = t$ и известного свойства аддитивности интеграла Римана относительно промежутка интегрирования [2] справедливо операторное тождество

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds \equiv \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s)x(s)ds, \text{ при } \forall x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T]}.$$

Поэтому, продифференцировав уравнение (1.1) по t, в силу последнего тождества и условия $f(0) = 0$ придем к эквивалентному интегрофункциональному уравнению

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} K_n(t,t)x(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)\Big\{K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\Big\}x(\alpha_i(t)) +$$

$$+\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i'(t,s)x(s)ds - f'(t) = 0. \tag{2.1}$$

Поделив обе части равенства (2.1) на $K_n(t,t)$, получим уравнение

$$x(t) + Ax + \int_0^t Q(t,s)x(s)ds = \hat{f}(t). \tag{2.2}$$

Здесь введены обозначения

$$Ax \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i'(t)\Big\{K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\Big\}x(\alpha_i(t)),$$

$$\int\limits_0^t Q(t,s)x(s)ds \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,s)\frac{\partial}{\partial t}K_i(t,s)x(s)ds,$$

$$\hat{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)f'(t).$$

Справедливо утверждение

Лемма 1. *(О продолжении локального решения). Пусть существует $\tau > 0$ такое, что при $t \in (0,\tau]$ уравнение (1.1) имеет непрерывное решение $x_0(t)$. Пусть $\min\limits_{i=\overline{1,n},\tau\le t\le T}(t-\alpha_i(t)) = h > 0$. Тогда уравнение (1.1) имеет при $t \in (0,T]$ непрерывное решение $\hat{x}(t)$, сужением которого на интервал $(0,\tau]$ является локальное решение $x_0(t)$.*

Доказательство. Введем $\Delta > 0$ и интервалы $I_0 = (0,\tau],\ldots,I_k = [\tau + (k-1)\Delta, \tau + k\Delta]$, $k = \overline{1,N}$, $(0,T] \subset \bigcup\limits_{k=0}^{N} I_k$. Заметим, что $\alpha_i(t) : (0,\tau] \to (0,\tau)$, $i = \overline{1,n-1}$. При $t \in (\tau,T]$ в силу условий леммы справедливо неравенство $\alpha_i(t) \le t - h$.

Оно дает возможность подобрать такое $\Delta > 0$, чтобы

$$\alpha_i(t) :\, I_k \to \bigcup_{j=0}^{k-1} I_j. \tag{2.3}$$

Данное включение будет выполнено, если

$$\max_{i=1,\overline{n-1},t\in I_k} \alpha_i(t) \le \tau + (k-1)\Delta. \tag{2.4}$$

В силу неравенств $\alpha_i(t) \le t - h$ при $t \in [\tau,T],\ i = \overline{1,n-1}$ и непрерывности функций $\alpha_i(t)$, в интервале I_k найдется точка t^* такая, что будут выполнены оценки

$$\max_{i=\overline{1,n-1},\, t\in I_k} \alpha_i(t) = \alpha_{i^*}(t^*) \le t^* - h \le \tau + k\Delta - h.$$

Поэтому, если взять $\Delta \le h$, то неравенство (2.4) и включение (2.3), очевидно, выполнится. Установленная справедливость включения (2.3) дает возможность непрерывно продолжить локальное решение $x_0(t)$ с интервала $(0,\tau]$ методом шагов с шагом $\Delta = h$ на весь интервал $[\tau,T]$.

Действительно, построим искомое продолжение решения на отрезке I_1. Для этого решим интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$x(t)+\int_{\tau}^{t} Q(t,s)x(s)ds = -Ax_0 - \int_{0}^{\tau} Q(t,s)x_0(s)ds + \hat{f}(t), t \in (\tau, \tau+\Delta] = I_1, \tag{2.5}$$

где в правой части стоит уже известная функция $x_0(t)$.

Непрерывная функция $x_1(t)$, удовлетворяющая уравнению (2.5) при $t \in I_1$, является непрерывным продолжением решения $x_0(t)$ на интервал $[\tau, \tau+\Delta]$. Фиксируем $q \in (0,1)$. Пусть $\sup\limits_{s,t}|Q(t,s)| = c < \infty$ и $\Delta \leq \min(h, \dfrac{q}{c})$. Тогда интегральный оператор $\int\limits_{\tau}^{t} Q(t,s)x(s)ds$ в пространстве $\mathbb{C}_{[\tau,\tau+\Delta]}$ будет сжимающим с коэффициентом сжатия q. Следовательно, уравнение (2.5) имеет единственное решение $x_1(t) \in \mathbb{C}_{[\tau,\tau+\Delta]}$. Таким образом строится функция

$$\hat{x}_1 = \begin{cases} x_0(t), & 0 < t \leq \tau, \\ x_1(t), & \tau \leq t < \tau+\Delta, \end{cases}$$

которая непрерывно продолжает решение $x_0(t)$ на интервал $[\tau, \tau+\Delta]$.

Следующее продолжение $x_2(t) \in \mathbb{C}_{[\tau+\Delta,\tau+2\Delta]}$. Для его нахождения решаем интегральное уравнение Вольтерра с уже известной функцией $\hat{x}_1$:

$$x(t) + \int_{\tau+\Delta}^{t} Q(t,s)x(s)ds = -A\hat{x}_1 - \int_{0}^{\tau+\Delta} Q(t,s)\hat{x}_1(s)ds$$

при $t \in [\tau+\Delta, \tau+2\Delta]$. В результате мы построим функцию

$$\hat{x}_2(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 < t \leq \tau, \\ x_1(t), & \tau \leq t \leq \tau+\Delta, \\ x_2(t), & \tau+\Delta \leq t \leq \tau+2\Delta. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс, за конечное число шагов построим на интервале $(0, T]$ искомое непрерывное решение $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T]}$, удовлетворяющее уравнению (1.1). При этом на каждом шаге решается интегральное уравнение Вольтерра II рода со сжимающим оператором. Лемма доказана. □

Замечание 1. Так как на основании работ [13, 6] уравнение (1.1) может иметь решение, неограниченное при $t \to +0$, то в условиях леммы 1 мы не исключили такой случай. А именно, в лемме 1 мы строили решение $x(t)$ на открытом интервале $(0, T]$, оставляя возможность его непрерывного продолжения на замкнутый интевал $[0, T]$ в случае существования конечного предела локального решения $x_0(t)$ при $t \to +0$.

3. Достаточные условия существования единственного непрерывного решения на замкнутом интервале $[0, T]$

Введем функцию

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \Big| \ \alpha_i'(t) K_n^{-1}(t,t) \Big\{ K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)) \Big\} \Big|.$$

Пусть выполнено условие
(A) $D(0) < 1, \ \sup\limits_{0 \le s \le t \le T} |K_n^{-1}(t,t) K(t,s)| \le c < \infty.$

В силу непрерывности функции $D(t)$ найдется окрестность $[0, \tau]$, в которой $D(t) < q < 1$. Отметим справедливость неравенства $\max\limits_{i=\overline{1,n-1},\, t \in [0,\tau]} |x(\alpha_i(t))| \le ||x||$, где $||x|| = \max\limits_{0 \le t \le \tau} |x(t)|$. Поэтому имеем неравенство $||Ax|| \le q||x||$. Заметим, что в пространстве непрерывных функций $\mathbb{C}_{[0,\tau]}$ с нормой $||x|| = \max\limits_{0 \le t \le \tau} |x(t)|$ справедливо неравенство

$$|| \int_0^t Q(t,s) x(s) ds || \le c\tau ||x||.$$

Выберем $\tau < \dfrac{1-q}{c}$. Тогда в уравнении (2.1) оператор $A + \int_0^t Q(t,s)[\cdot] ds$ будет сжимающим в пространстве $\mathbb{C}_{[0,\tau]}$. Таким образом, найдется $\tau > 0$ такое, что при $t \in [0, \tau]$ уравнение (1.1) имеет непрерывное локальное решение $x_0(t)$ и последовательность $x^n(t)$, где $x^n = -Ax^{n-1} - \int_0^t Q(t,s) x^{n-1}(s) ds + \hat{f}(t)$, при $t \in [0, \tau]$ сходится равномерно к этому локальному решению. Из изложенного вытекает

Теорема 1. *Пусть при $t \in [0, T]$ выполнены следующие условия: непрерывные функции $K_i(t,s)$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i(t)$ и $f(t)$ имеют непрерывные производные по t, $K_n(t,t) \neq 0$, $0 = \alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \cdots < \alpha_{n-1}(t) < \alpha_n(t) = t$ при $t \in (0, T]$, $\alpha_i(0) = 0$, $f(0) = 0$. Пусть выполнено условие* **(A)**. *Тогда уравнение (1.1) в пространстве $\mathbb{C}_{[0,T]}$ имеет единственное решение.*

Доказательство. Так как $\alpha_i(t) < t$ при $t \in (0, T]$, то при любом $\tau > 0$ $\min\limits_{i=\overline{1,n},\, \tau \le t \le T} (t - \alpha_i(t)) = h$, где $h > 0$. Действительно, минимум непрерывной функции на замкнутом множестве $[\tau, T]$ достигается в некоторой точке $t_* \in [\tau, T]$. Поэтому $h = t_* - \alpha_i(t_*)$. Случай $h = 0$ невозможен, так как $\alpha_i(t) < t$ при $t \in [\tau, T]$. По вышедоказанному существует локальное решение $x^0 \in \mathbb{C}_{[0,\tau]}$, удовлетворяющее уравнению (1.1). Таким образом, будут выполнены все условия леммы 1 и локальное решение $x_0(t)$ может быть продолжено методом шагов с шагом $\Delta = \min(h, \tau)$ последовательными приближениями на весь интервал $[0, T]$. Теорема доказана. □

Замечание 2. Пусть в представлении кусочно-заданного ядра $K(t, s)$ функции $K_i(t, s) = 0, i = \overline{1, n-1}$, и рассматривается уравнение

$$\int\limits_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t),\, 0 \le t \le T.$$

Пусть $f(t) \in \mathbb{C}^{(1)}_{[0,T]}$, $f(0) = 0$, $K(t,t) \neq 0$, $K(t,s)$, $K'_t(t,s)$ — непрерывны, $\alpha(t) \in \mathbb{C}^{(1)}_{[0,T]} \cap \mathbb{C}^{(1)}_{+[0,\tau]}$, $\alpha(0) = 0$, $0 < \alpha'(0) < 1$, $\alpha(t) < t$ при $0 < t < T$. Здесь τ может быть сколь угодно малым положительным числом, $\mathbb{C}^{(1)}_{+[0,\tau]}$ — пространство функций, имеющих непрерывные положительные производные. Условие **(A)** очевидно выполнено, так как $D(0) = \alpha'(0) < 1$. Поэтому на основании теоремы 1 уравнение (1.1) имеет в классе $\mathbb{C}_{[0,T]}$ единственное решение. Приведенное замечание 2 усиливает результат теоремы 3.3.1 из монографии [1], так как в теореме 3.3.1 [1] предполагалось, что производная $\alpha'(t)$ положительна на всем интервале $[0, T]$.

Замечание 3. Если условие **(A)** усилить, потребовав, чтобы $\max\limits_{0 \le t \le T} D(t) = q < 1$, то в норме $||x||_L \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{0 < t \le T} e^{-Lt}|x(t)|$, где L – достаточно велико, последовательные приближения

$$x^n(t) = -Ax^{n-1} - \int\limits_0^t Q(t,s)x^{n-1}(s)ds + \hat{f}(t),$$

$x^0(t) = \hat{f}(t)$, сходятся равномерно на промежутке $[0, T]$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q к единственному непрерывному решению уравнения (1.1). При этом имеет место оценка

$$||x - x^n||_L = \mathcal{O}(q^n).$$

4. Построение асимптотики единственного непрерывного решения и второе достаточное условие разрешимости уравнения

Пусть $0 \leq \alpha_i'(0) < 1$, $\alpha_i(0) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $T' \in (0, T]$ такое, что $\max\limits_{i=\overline{1,n-1},\, t\in[0,T']} |\alpha_i'(t)| \leq \varepsilon$ и $\sup\limits_{i=\overline{1,n-1},\, t\in(0,T']} \dfrac{|\alpha_i(t)|}{t} \leq \varepsilon$.

Пусть выполнено условие

(B) При фиксированных q и T', где $q \in (0,1)$, $T' \in (0, T]$, выполняется неравенство

$$\max_{t\in[0,T']} \varepsilon^{N^*} |K_n^{-1}(t,t)| \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i'(t)| \cdot |K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))| \leq q < 1.$$

Очевидно, что условие **(B)** выполняется при достаточно большом N^*.

Введем дополнительное условие локальной гладкости:

(C) существуют полиномы $\mathcal{P}_i(t,s) = \sum\limits_{\nu+\mu=1}^{M} K_{i\nu\mu} t^\nu t^\mu, i = \overline{1,n}, M \geq N^*$, $f^M(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{M} f_\nu t^\nu$, $\alpha_i^M(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{M} \alpha_{i\nu} t^\nu$, $i = \overline{1, n-1}$, где $0 < \alpha_{11} < \alpha_{12} < \cdots < \alpha_{n-1,n} < 1$ такие, что при $t \to +0$, $s \to +0$ справедливы оценки $K_i(t,s) - \mathcal{P}_i(t,s) = \mathcal{O}((t+s)^{M+1})$, $i = \overline{1,n}$, $f(t) - f^M(t) = \mathcal{O}(t^{M+1})$, $\alpha_i(t) - \alpha_i^M(t) = \mathcal{O}(t^{M+1}), i = \overline{1, n-1}$.

Приведенные разложения по степеням s, t очевидно являются полиномами Тейлора соответствующих функций.

Введем алгебраическое уравнение

$$B(j) \equiv K_n(0,0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)) = 0$$

и назовем его *"характеристическим уравнением"* интегрального уравнения (1.1).

Будем искать асимптотическое приближение искомого локального решения в виде полинома

$$x^M(t) = \sum_{i=0}^{M} x_i t^i.$$

Подставляя этот полином в уравнение (2.1), методом неопределенных коэффициентов получим рекуррентную последовательность линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов x_j:

$$B(j) x_j = D_j(x_0, \ldots, x_{j-1}),\ j = \overline{0, M}.$$

Здесь $D_0 = f'(0)$. Остальные D_j выражаются определенным образом через решения $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$ предыдущих уравнений и коэффициенты полиномов Тейлора, введенных в условии **(C)**. Систему $B(j)x_j = D_j(x_0, \ldots, x_{j-1})$, $j = \overline{0, M}$, можно записать в матричном виде

$$\mathfrak{A}\,\overline{x} = \overline{b},$$

где $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_M)'$, $\overline{b} = \left(f^{(1)}(0), \dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}, \ldots, \dfrac{f^{(M)}(0)}{M!}\right)'$, $\mathfrak{A}$ — треугольная матрица вида:

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} A_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{10} & A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{M0} & A_{M1} & \cdots & \cdots & A_{MM} \end{bmatrix}$$

с элементами

$$A_{jk} = \frac{1}{(j+1)!}\left[\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\int\limits_0^t K(t,s)s^k ds\right]_{t=0}, \; j = \overline{0, M}, \; k = \overline{0, j}.$$

Учет структуры ядра $K(t,s)$ и непосредственные вычисления дают явный вид коэффициентов матрицы $\mathfrak{A}$:

$$A_{jk} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{j-k}\sum_{l_1+2l_2+\cdots+(1+s)l_{1+s}=1+j}(\alpha_i^{(1)}(0))^{l_1}(\alpha_i^{(2)}(0))^{l_2}\cdots(\alpha_i^{(1+s)}(0))^{l_{1+s}}\times$$
$$\times[K_i^{(s)}(0,0) - K_{i+1}^{(s)}(0,0)], \; j = \overline{0, M}, k = \overline{0, j}. \tag{4.1}$$

При $k = j$ из общей формулы (4.1) получаются диагональные элементы $A_{jj} \equiv B(j)$:

$$A_{jj} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i'(0))^{1+j}[K_i(0,0) - K_{i-1}(0,0)] \equiv B(j), \; j = \overline{0, M},$$

указанные выше в координатной форме этой системы. Явный вид СЛАУ позволяет использовать ее при построении асимптотики решений методом неопределенных коэффициентов.

Таким образом, если $B(j) \neq 0$ при $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то все коэффициенты x_j вычисляются однозначно из СЛАУ. Построив полином $x^M(t)$ с порядком $M \geq N^*$, будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$x(t) = x^M(t) + t^{N^*}u(t).$$

Отметим, что в силу построения полинома $x^M(t)$ модуль невязки $|F(x^M(t))|$ удовлетворяет асимптотической оценке $|F(x^M(t))| = o(t^M)$

при $t \to +0$. Относительно $u(t)$ получим интегро-функциональное уравнение, подобно уравнению (2.1), удовлетворяющее принципу сжимающих отображений [7] на замкнутом интервале $[0,\tau]$. Поэтому функция $u(t)$ в классе $\mathbb{C}_{[0,\tau]}$ строится однозначно методом последовательных приближений, а уравнение (1.1) на отрезке $[0,\tau]$ имеет непрерывное локальное решение $x(t) = x^M(t) + t^{N^*}u(t)$. На основании леммы 1, определив локальное решение, можно его продолжить с интервала $[0,\tau]$ на весь интервал $[0,T]$, сочетая «метод шагов» [9] с последовательными приближениями [7].

Из изложенного вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **(B)**, **(C)** *при* $B(j) \neq 0$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Тогда уравнение (1.1) имеет в классе* $\mathbb{C}_{[0,T]}$ *единственное решение* $x(t)$*. Более того, при* $t \to +0$ *полином* $x^M(t)$ *является асимптотическим приближением* M*-го порядка этого решения.*

Замечание 4. Условие $D(0) < 1$, используемое в теореме 1, в теореме 2 не используется. Поэтому теорема 2 усиливает результат теоремы 1.

Замечание 5. Если не предполагать, что кривые $s = \alpha_i(t), i = \overline{0,n}$, делят треугольную область $D = \{0 \leq s \leq t \leq T\}$ на n непересекающихся секторов $D_i = \{s,t; \alpha_{i-1}(t) \leq s < \alpha_i(t)\}$, $i = \overline{1,n}$, то интегральный оператор $Ix \equiv \sum\limits_{i=1}^{M} \int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s)x(s)ds$ нельзя будет рассматривать как один интегральный оператор Вольтерра с кусочно-непрерывным ядром. В этом случае требуется отдельное исследование с учетом конкретной ситуации.

5. Численные примеры

Рассмотрим численное решение уравнения (1.1) в случае двух слагаемых ($n = 2$). А именно, рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра вида

$$\int\limits_0^{\alpha(t)} K_1(t,s)x(s)ds + \int\limits_{\alpha(t)}^{t} K_2(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,T], \tag{5.1}$$

где $0 < \alpha(t) < t\ \forall t \in (0,T]$, $\alpha(0) = 0$, функции $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$, $f(t)$ — непрерывные и достаточно гладкие, $f(0) = 0$, $K_2(t,t) \neq 0\ \forall t \in [0,T]$.

Специфика таких уравнений требует, в частности, адаптации численных процедур, используемых для решения классических интегральных уравнений. Основная цель данного раздела — выяснение применимости разработанных ранее (см., например, [1]) квадратурных методов для численного решения (5.1).

Для начала исследуем метод правых прямоугольников. Введем сетку узлов $t_i = t_0 + ih,\ \ i = \overline{1,n},\ t_0 = 0,\ nh = T$, и, аппроксимируя интегралы в (5.1) суммами, в очевидных обозначениях запишем сеточный аналог:

$$h\sum_{j=1}^{l-1} K_1(t_i,t_j)x^h(t_j) + (\alpha(t_i) - t_{l-1})K_1(t_i,\alpha(t_i))x^h(\alpha(t_i)) +$$

$$+(t_l - \alpha(t_i))K_2(t_i,t_l)x^h(t_l) + h\sum_{j=l+1}^{i} K_2(t_i,t_j)x^h(t_j) = f(t_i) \ \ i = \overline{1,n}, \quad (5.2)$$

где $l = \left[\frac{\alpha(t_i)}{h}\right] + 1$. Появление слагаемых, не входящих под знак суммы, обусловлено тем, что значение $a(t_i)$ в общем случае не попадает в узел сетки.

Для $n = 1$ из (5.1) получаем:

$$(\alpha(t_1) - t_0)K_1(t_1,\alpha(t_1))x^h(\alpha(t_1)) +$$

$$+(t_1 - \alpha(t_1))K_2(t_1,t_1)x^h(t_1) = f(t_1). \quad (5.3)$$

Заметим, что уже для $n = 1$ приходится решать одно уравнение с двумя неизвестными: $x^h(\alpha(t_1))$ и $x^h(t_1)$. Аналогичная проблема возникает на каждом шаге (кроме частных случаев, когда $\alpha(t_i)$ попадает в узел сетки). Для решения этой проблемы можно использовать различные варианты. Например, для нахождения $x^h(\alpha(t_1))$ использовать комбинацию методов правых и левых прямоугольников:

$$x^h(\alpha(t_1)) = \frac{f(t_1)}{(\alpha(t_1) - t_0)K_1(t_1,\alpha(t_1)) + (t_1 - \alpha(t_1))K_2(t_1,\alpha(t_1))} \quad (5.4)$$

и подставить найденное $x^h(\alpha(t_1))$ в (5.3).

Можно использовать знание о решении уравнения (5.1) в нуле:

$$x(0) = \frac{f'(0)}{\alpha'(0)[K_1(0,0) - K_2(0,0)] + K_2(0,0)}, \quad (5.5)$$

а $x^h(\alpha(t_1))$ искать с помощью метода левых прямоугольников или с помощью (5.4) и экстраполировать решение в $x^h(t_1)$. В остальных $x^h(\alpha(t_i))$ целесообразнее применение процедур интерполяции или экстраполяции.

Заметим, что для существования решения необходимо, чтобы помимо условия $K_2(t,t) \neq 0$ в (5.4) и (5.5) соответствующие знаменатели были не равны нулю.

Численные расчеты на тестовых примерах показывают линейную сходимость адаптированных методов. Отметим, что в приведенных тестовых примерах характеристическое уравнение $B(j) = 0$ не имеет корней в множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$, условия теоремы 2 выполнены и уравнения имеют единственные непрерывные решения.

Пример 1.

$$\int\limits_0^{\frac{t}{3}} (1+t-s)x(s)ds - \int\limits_{\frac{t}{3}}^{t} x(s)ds = \frac{t^4}{108} - \frac{25t^3}{81},\ t \in [0,2],$$

точное решение $\bar{x}(t) = t^2$.

В табл. 1 приведены погрешности $\varepsilon_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} |\bar{x}(t_i) - x_1^h(t_i)|$ и $\varepsilon_2 = \max\limits_{0 \le i \le n} |\bar{x}(t_i) - x_2^h(t_i)|$, где x_1^h — решение, полученное с помощью (5.4) в $a(t_1)$, а x_2^h — с использованием (5.5), (5.4) и экстраполяцией в первом узле.

Таблица 1.
Погрешности численного решения для тестового примера

h	ε_1	ε_2
1/32	0,068433	0,066695
1/64	0,034362	0,034189
1/128	0,017433	0,017371
1/256	0,008662	0,008652

Видно, что методы имеют линейную сходимость и не дают преимущества друг перед другом.

Теперь рассмотрим уравнение с известной асимптотикой точного решения. Численное решение уравнения будем сравнивать с асимптотикой, полученной с помощью метода последовательных приближений.

Пример 2.

$$2\int\limits_0^{\sin\frac{t}{2}} x(s)ds + \int\limits_{\sin\frac{t}{2}}^{t} x(s)ds = t,\ t \in [0,\pi],$$

асимптотическое приближение искомого решения при $t \to 0$ имеет вид $\widetilde{x}(t) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{t^2}{27}$.

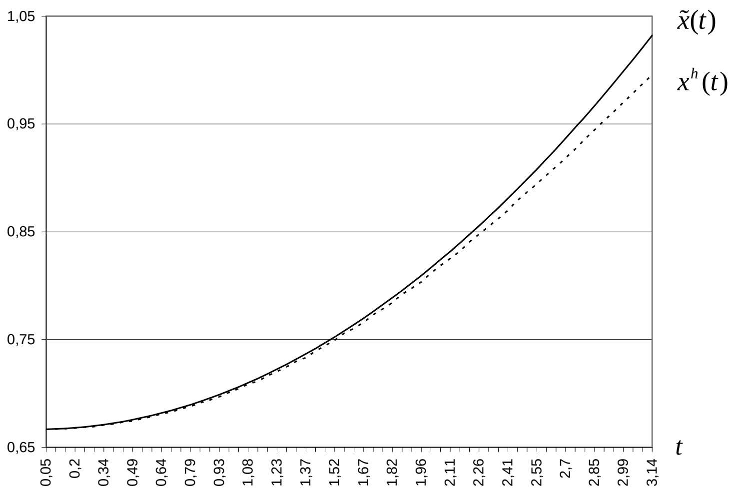

Рис. 1. Графики решений $\widetilde{x}(t)$ и $x^h(t)$.

Графики полученных решений приведены на рис. 1 и подтверждают эффективность численного метода.

6. Параметрические семейства решений

Если характеристическое уравнение $B(j) = 0$ имеет корни во множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$, то уравнение (1.1) может иметь семейство решений, зависящих от свободных параметров, см. [13]. Число свободных параметров равно числу натуральных корней характеристического уравнения $B(j) = 0$ с учетом их кратности. В этом случае асимптотическое приближение при $t \to +0$ соответствующих решений уравнения (1.1) можно построить в виде логарифмо-степенных полиномов (см. [13]), зависящих от свободных параметров. При фиксированных значениях этих параметров построенное локальное решение на основании леммы 1 непрерывно продолжается на весь интервал $(0, T]$.

Список литературы

1. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: теория и численные методы / А. С. Апарцин. – Новосибирск : Наука, 1999. – 193 с.
2. Архипов Б. И. Лекции по математическому анализу / Б. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – М. : Высш. шк., 1999. – 695 с.
3. Магницкий Н. А. Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерры первого рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. – 1983. – Т. 269, № 1. – С. 29–32.

4. Маркова Е. В. Численные методы решения неклассических линейных уравнений Вольтерра I рода и их приложения : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е. В. Маркова. – Иркутск, 1999. – 100 с.
5. Маркова Е. В. О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике / Е. В. Маркова, И. В. Сидлер, В. В. Труфанов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 20–28.
6. Сидоров Д. Н. О разрешимости уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами в классе обобщенных функций / Д. Н. Сидоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — Т. 5, № 1. – С. 80–95.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Физматлит, 2007. – 488 с.
8. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях / А. П. Хромов // Мат. сб. – 2006. – Т. 197, № 11. – С. 115–142.
9. Эльсгольц Л. А. Качественные методы в математическом анализе / Л. А. Эльсгольц. – М. : ГИТТЛ, 1955. — 300 с.
10. Brunner H. 1896–1996: One hundred years of Volterra integral equations of the first kind / H. Brunner // Applied Numerical Mathematis. – 1997. – Vol. 24. – P. 83–93.
11. Evans G. C. Volterra's Integral Equation of the Second Kind with Discontinuous Kernel / G. C. Evans // Transactions of the American Mathematical Society. – 1910. – Vol. 11, N 4. – P. 393–413.
12. Hritonenko N. Applied mathematical modelling of engineering problems / N. Hritonenko, Yu. Yatsenko. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003. – 308 p.
13. Sidorov D. Volterra Equations of the First kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control / D. Sidorov // Studia Informatica Universalis. – 2011. – Vol.9, N 3. – P. 135–146.

E. V. Markova, D. N. Sidorov

Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Modeling

Abstract. The method for solution to the Volterra integral equations of the first kind is proposed. Such equations appear in the theory of developing systems and they have kernels with discontinuities of the first kind. We construct the characteristic algebraic equation. Analytically and numerically we study the regular case when characteristic equation has no positive roots and the solution to the integral equation is unique. In the case of irregular characteristic equation has natural roots, and the solution contains arbitrary constants. We prove existence theorems and construct their asymptotics. The theoretical results are illustrated by numerical calculations.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind; Glushkov model; evolving systems; step method; asymptotics; numerical methods.

Сидоров Денис Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, снс, отдел прикладной математики, ИСЭМ СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130; Иркутский государственный университет, 664033, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: +79148822035 (contact.dns@gmail.com)

Маркова Евгения Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, снс, отдел прикладной математики, ИСЭМ СО

РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел.: +73952428440 (markova@isem.sei.irk.ru)

Sidorov Denis, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov Street, Irkutsk, 664033, Russia, senior research fellow of department of applied maths, Irkutsk State Univertsity, 1 K.Marksa Street, 664033, Irkutsk, Russia, Phone: +79148822035 (contact.dns@gmail.com)

Markova Evgenia, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov Street, Irkutsk, 664033, Russia, senior research fellow of department of applied maths, Phone: +73952428440 (markova@isem.sei.irk.ru)