Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 46—54

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.51

Задача Коши для сингулярной системы уравнений теплопроводности с фредгольмовым оператором при производной по времени в банаховых пространствах *

О. В. Сластная
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе построена матричная фундаментальная оператор-функция для вырожденного оператора теплопроводности с фредгольмовым оператором при производной по времени. Получены формулы для обобщенного решения соответствующей задачи Коши.

Ключевые слова: вырожденный оператор теплопроводности; матричная фундаментальная оператор-функция; фредгольмов оператор.

1. Введение

В данной работе рассматривается система уравнений теплопроводности вида

$$B\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \Lambda A \Delta \overline{u}(t,\overline{x}) + \overline{f}(t,\overline{x}) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$\overline{u}(t,\overline{x})|_{t=0} = \overline{u}_0(\overline{x}). \tag{1.2}$$

Здесь B, A — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{u}(t,\overline{x})$ — вектор-функция размерности s, каждая компонента которой $u_\nu(t,\overline{x})$ является функцией со значениями в E_1, $\overline{f}(t,\overline{x})$ —

* Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт №П696.

вектор-функция размерности s, имеющая компоненты $f_\nu(t,\overline{x})$ со значениями в E_2, $\nu = 1,\dots,s$, оператор B необратим, $\overline{R(B)} = R(B)$, под записью $A\Delta\overline{u}(t,\overline{x})$ понимается вектор-функция с компонентами $A\Delta u_\nu(t,\overline{x})$, $\nu = 1,\dots,s$, Λ — невырожденная квадратная матрица порядка s.

В работах [7,8,12] исследовались различные типы вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, для построения обобщенных решений которых использовался подход, разработанный на кафедре математического анализа ИМЭИ ИГУ М. В. Фалалеевым. Основным инструментом этого подхода является фундаментальная оператор-функция [7,8,12], соответствующая сингулярному дифференциальному оператору и позволяющая получить обобщенное решение в виде свертки фундаментальной оператор-функции с правой частью уравнения — свободной функцией. Знание фундаментальной оператор-функции позволяет записать в замкнутой форме обобщенное решение, принадлежащее классу распределений с ограниченным слева носителем, а также определить условия существования непрерывного решения задачи, избегая непосредственного его построения.

В работах [5,6,9] идеи работ [7,8,12] были перенесены на системы вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, для исследования которых была введена матричная фундаментальная оператор-функция. Были построены матричные фундаментальные оператор-функции для ряда дифференциальных операторов в случае фредгольмовости, нетеровости оператора B, спектральной, секториальной и радиальной ограниченности оператора A относительно B.

В настоящей работе результаты, полученные в [10,11] для вырожденного уравнения теплопроводности, распространяются на сингулярные системы уравнений теплопроводности.

2. Вспомогательные сведения

1. Жордановы наборы фредгольмовых операторов. Пусть оператор B фредгольмов, т.е. $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $\{\varphi_i,\ i = 1,\dots,n\}$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i,\ i = 1,\dots,n\}$ — базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i \in E_1^*,\ i = 1,\dots,n\}$, $\{z_i \in E_2,\ i = 1,\dots,n\}$ — соответствующие биортогональные системы [1], т.е. $\langle \varphi_i^{(1)}, \gamma_j\rangle = \langle z_i, \psi_j^{(1)}\rangle = \delta_{ij}$; $i,j = 1,\dots,n$.

Введем оператор $\widetilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i\rangle z_i$.

Тогда по обобщенной лемме Шмидта [1] оператор $\Gamma = \widetilde{B}^{-1}$ существует и ограничен. Оператор Γ называется *оператором Треногина – Шмидта* для фредгольмова оператора B.

Пусть выполнено условие

А) оператор B имеет *полный A-жорданов набор* [1] $\{\varphi_i^{(k)},\ i=1,\ldots,n,$ $k=1,\ldots,p_i\}$, т.е. существуют элементы $\varphi_i^{(1)}=\varphi_i,\quad \varphi_i^{(k)}\in E_1,\quad i=1,\ldots,n,\quad k=2,\ldots,p_i$, удовлетворяющие соотношениям

$$B\varphi_i^{(1)}=0,\ B\varphi_i^{(k)}=A\varphi_i^{(k-1)},\quad i=1,\ldots,n,\ k=2,\ldots,p_i,$$

причем

$$\det\ \left\|\langle A\varphi_i^{(p_i)},\psi_j\rangle\right\|\neq 0,\quad i,j=1,\ldots,n;$$

элементы $\varphi_i^{(k)}$ строятся следующим образом:

$$\varphi_i^{(k)}=(\Gamma A)^{k-1}\varphi_i,\ \varphi_i^{(1)}=(\Gamma A)\varphi_i^{(p_i)},\quad i=1,\ldots,n,\ k=2,\ldots,p_i.$$

Из условия А) следует, что существует *полный A^*-жорданов набор* оператора B^*, т. е. существуют такие элементы $\psi_i^{(1)}=\psi_i,\ \psi_i^{(k)}\in E_2^*$, $i=1,\ldots,n,\ k=2,\ldots,p_i$, что справедливы соотношения

$$B^*\psi_i^{(1)}=0,\ B^*\psi_i^{(k)}=A^*\psi_i^{(k-1)},\quad i=1,\ldots,n,\ k=2,\ldots,p_i,$$

причем

$$\det\ \left\|\langle\varphi_i,A^*\psi_j^{(p_j)}\rangle\right\|\neq 0,\quad i,j=1,\ldots,n;$$

элементы $\psi_i^{(k)}$ строятся аналогично элементам $\varphi_i^{(k)}$, а именно:

$$\psi_i^{(k)}=(\Gamma^*A^*)^{k-1}\psi_i,\ \psi_i^{(1)}=(\Gamma^*A^*)\psi_i^{(p_i)},\quad i=1,\ldots,n,\ k=2,\ldots,p_i.$$

2. Сведения из теории матриц. Пусть Λ — числовая матрица, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu$ — ее характеристические числа. Тогда [3] существует невырожденная матрица T порядка s такая, что

$$\Lambda=T\cdot J\cdot T^{-1}, \tag{2.1}$$

где

$$J=\mathrm{diag}\ \left\{\lambda_1E^{(q_1)}+H^{(q_1)},\ \lambda_2E^{(q_2)}+H^{(q_2)},\ \ldots,\ \lambda_\mu E^{(q_\mu)}+H^{(q_\mu)}\right\}-$$

квазидиагональная матрица, $\lambda_iE^{(q_i)}+H^{(q_i)}$ — жорданова клетка порядка q_i, $i=1,\ldots,\mu$, вида

$$\lambda_iE^{(q_i)}+H^{(q_i)}=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}.$$

Здесь $E^{(q_i)}$ — единичная матрица порядка q_i, $H^{(q_i)}$ — матрица порядка q_i, у которой элементы первой «наддиагонали» равны единице, а все остальные элементы равны нулю, $q_1 + q_2 + \ldots + q_\mu = s$. J называется *нормальной жордановой формой* матрицы Λ.

Если все элементарные делители матрицы Λ первой степени, то жорданова форма имеет диагональный вид и в этом случае

$$\Lambda = T \cdot \mathrm{diag}\ \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\} \cdot T^{-1}.$$

3. Понятие матричной фундаментальной оператор-функции. В обобщенных функциях [2] задачу Коши (1.1)–(1.2) можно записать как систему сверточных уравнений относительно $\widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x})$

$$\big(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})\big) * \widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) = \overline{f}(t,\overline{x})\theta(t) + B\overline{u}_0(\overline{x})\delta(t),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда [2], $\delta(t,\overline{x})$ — дельта-функция Дирака, под записью $B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x})$ будем понимать $E^{(s)}B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x})$, где $E^{(s)}$ — единичная матрица порядка s.

Определение. *Матричной фундаментальной оператор-функцией* $E_N(t,\overline{x})$ для вырожденного оператора теплопроводности $(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x})$ — $\Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}))$ назовем такую матричную оператор-функцию, для которой выполняются следующие два равенства

$$(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) * E_N(t,\overline{x}) * \widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) = \widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) \quad \forall\, \widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) \in K'(R^{N+1}, E_2) \tag{2.2}$$

и

$$E_N(t,\overline{x}) * (B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) * \widetilde{\overline{v}}(t,\overline{x}) = \widetilde{\overline{v}}(t,\overline{x}) \quad \forall\, \widetilde{\overline{v}}(t,\overline{x}) \in K'(R^{N+1}, E_1). \tag{2.3}$$

Здесь под $\widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) \in K'(R^{N+1}, E_2)$ (или $\widetilde{\overline{v}}(\overline{x}) \in K'(R^{N+1}, E_1)$) понимается вектор-столбец, каждая компонента которого является обобщенной функцией с ограниченным слева носителем со значениями в E_2 (или E_1).

Если известна матричная фундаментальная оператор-функция $E_N(t,\overline{x})$ оператора теплопроводности $(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}))$ и существует свертка $\widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) = E_N(t,\overline{x}) * g(t,\overline{x})$, то $\widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x})$ является единственным решением уравнения

$$\big(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})\big) * \widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) = g(t,\overline{x})$$

в классе тех обобщенных функций, для которых существует свертка с $E_N(t,\overline{x})$.

Действительно, если $\widetilde{\overline{u}}_1(t,\overline{x})$ другое решение, тогда

$$\begin{gathered}\widetilde{\overline{u}}_1(t,\overline{x}) = I\delta(t,\overline{x}) * \widetilde{\overline{u}}_1(t,\overline{x}) = \\ = E_N(t,\overline{x}) * (B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) * \widetilde{\overline{u}}_1(t,\overline{x}) = \\ = E_N(t,\overline{x}) * g(t,\overline{x}) = \widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}).\end{gathered}$$

3. Основные результаты

Рассмотрим вырожденный оператор теплопроводности

$$\big(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})\big)$$

с непрерывно обратимым оператором A, причем отдельно рассмотрим случаи четного и нечетного количества пространственных переменных.

Теорема 1. *Пусть в системе (1.1)* $\det\Lambda \neq 0$*, оператор A непрерывно обратим, оператор B фредгольмов, выполнено условие A) и существует пара констант $K > 0$ и $C \geq 0$ таких, что*

$$\max\left(\|e^{-\alpha(A\Gamma)^{-1}}\|, \|e^{-\alpha(\Gamma^* A^*)^{-1}}\|\right) \leq Ke^{-\alpha C}, \quad \forall\alpha \geq 0.$$

Тогда вырожденный оператор теплопроводности $(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}))$ имеет на классе $K'(R^1_+\otimes R^{2N}, E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида

$$E_{2N}(t,\overline{x}) = T\delta(t,\overline{x}) * \left\{E^1_{2N}(t,\overline{x}),\, E^2_{2N}(t,\overline{x}),\, \ldots,\, E^{\mu}_{2N}(t,\overline{x})\right\} * T^{-1}\delta(t,\overline{x}).$$

Здесь T — невырожденная квадратная матрица порядка s из формулы (2.1), $\left\{E^1_{2N}(t,\overline{x}),\, E^2_{2N}(t,\overline{x}),\, \ldots,\, E^{\mu}_{2N}(t,\overline{x})\right\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s вида

$$\begin{pmatrix} E^1_{2N}(t,\overline{x}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E^2_{2N}(t,\overline{x}) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & E^{\mu}_{2N}(t,\overline{x}) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

диагональные блоки которой $E^{\nu}_{2N}(t,\overline{x})$ являются верхнетреугольными квадратными матрицами порядка q_ν вида $E^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) = E^{(q_\nu)}\mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) *$ $*\omega(\mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}))$,

$$\omega(\mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x})) = \tag{3.2}$$

$$\begin{pmatrix} I\delta(t,\overline{x}) & A\delta(t)\Delta\delta(\overline{x}) * \mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) & \cdots & (A\delta(t)\Delta\delta(\overline{x}) * \mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}))^{q_\nu-1} \\ 0 & I\delta(t,\overline{x}) & \cdots & (A\delta(t)\Delta\delta(\overline{x}) * \mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}))^{q_\nu-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I\delta(t,\overline{x}) \end{pmatrix},$$

здесь $\nu = 1, \dots, \mu$ *и*

$$\mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) = \Gamma\delta(t,\overline{x}) * \tfrac{1}{(4\pi\lambda_\nu t)^N}\left((A\Gamma)^{-1}\right)^N \exp\left(-\tfrac{(A\Gamma)^{-1}|\overline{x}|^2}{4\lambda_\nu t}\right)\cdot$$
$$\cdot\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\lambda_\nu^{-k-1}\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}(V_m(\overline{x})*)^{k+1}\cdot\delta^{(k)}(t)\right],$$
$$V_m(\overline{x}) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\overline{x}|}, & m=2,\\ \frac{1}{(m-2)\cdot\sigma_m\cdot|\overline{x}|^{m-2}}, & m\ge 3,\end{cases}$$

σ_m — *площадь поверхности единичной сферы в* R^m.

Доказательство. В соответствии с определением матричной фундаментальной оператор-функции для доказательства достаточно проверить справедливость равенств (2.2) и (2.3).

Действительно, $\forall\ \widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x}) \in K'(R^1_+ \otimes R^{2N}, E_2)$

$$(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) * E_{2N}(t,\overline{x}) * \widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x}) =$$
$$= (B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) * T\delta(t,\overline{x}) *$$
$$*\big\{E^1_{2N}(t,\overline{x}),\, E^2_{2N}(t,\overline{x}),\,\dots,\,E^{\mu}_{2N}(t,\overline{x})\big\} * T^{-1}(t,\overline{x}) * \widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x}) =$$
$$= T\delta(t,\overline{x}) * T^{-1}\delta(t,\overline{x}) * (B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) * T\delta(t,\overline{x}) *$$
$$*\big\{E^1_{2N}(t,\overline{x}),\, E^2_{2N}(t,\overline{x}),\,\dots,\,E^{\mu}_{2N}(t,\overline{x})\big\} * T^{-1}\delta(t,\overline{x}) * \widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x}) =$$
$$= T\delta(t,\overline{x}) * (B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - JA\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) *$$
$$*\big\{E^1_{2N}(t,\overline{x}),\, E^2_{2N}(t,\overline{x}),\,\dots,\,E^{\mu}_{2N}(t,\overline{x})\big\} * T^{-1}\delta(t,\overline{x}) * \widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x}),$$

где J — матрица подобная Λ, т.е. $J = T^{-1}\cdot\Lambda\cdot T$.

Для завершения доказательства осталось проверить, что при всех $\nu = 1, \dots, \mu$

$$\Big(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \big(\lambda_\nu E^{(q_\nu)} + H^{(q_\nu)}\big)A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})\Big) * E^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) = E^{(q_\nu)}\delta(t,\overline{x}).$$

Согласно работам [10,11]

$$\big(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \lambda_\nu A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})\big) * \mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) = I\delta(t,\overline{x}).$$

Так как

$$(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \lambda_\nu A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x})) * \mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) *$$
$$* (A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}) * \mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}))^i - A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}) *$$
$$*\mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}) * (A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}) * \mathcal{E}^{\nu}_{2N}(t,\overline{x}))^{i-1} \equiv 0,$$

то

$$(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x})-\Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}))*E_{2N}(t,\overline{x})*\widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x})=$$
$$=T\delta(t,\overline{x})*I\delta(t,\overline{x})*T^{-1}\delta(t,\overline{x})*\widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x})=$$
$$=I\delta(t,\overline{x})*\widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x})=\widetilde{\widetilde{u}}(t,\overline{x}),$$

что и завершает доказательство равенства (2.2).

Равенство (2.3) доказывается аналогично. □

Если оператор A позитивен [4], т.е. $\forall\ t\geq 0$ оператор $tI+A$ непрерывно обратим, причем

$$\|(tI+A)^{-1}\|\leq\frac{C_1}{1+t},\quad t\geq 0,$$

то существуют ограниченные операторы

$$\sqrt{A}^{-1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(tI+A)^{-1}}{\sqrt{t}}\,dt,\quad A^{-1}=\left(\sqrt{A}^{-1}\right)^2$$

и результат теоремы 1 можно распространить на операторы теплопроводности с нечетным количеством пространственных переменных.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и оператор $A\Gamma$ позитивен. Тогда вырожденный оператор теплопроводности $(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x})-\Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}))$ имеет на классе $K'(R^1_+\otimes R^{2N+1},E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E_{2N+1}(t,\overline{x})=T\delta(t,\overline{x})*$$
$$*\big\{E^1_{2N+1}(t,\overline{x}),\,E^2_{2N+1}(t,\overline{x}),\,\ldots,\,E^{\mu}_{2N+1}(t,\overline{x})\big\}*T^{-1}\delta(t,\overline{x}).$$

Здесь T — невырожденная квадратная матрица порядка s из формулы (2.1), $\big\{E^1_{2N+1}(t,\overline{x}),\,E^2_{2N+1}(t,\overline{x}),\,\ldots,\,E^{\mu}_{2N+1}(t,\overline{x})\big\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s вида (3.1), диагональные блоки которой $E^{\nu}_{2N+1}(t,\overline{x})$ находятся по формуле

$$E^{\nu}_{2N+1}(t,\overline{x})=E^{(q_\nu)}\mathcal{E}^{\nu}_{2N+1}(t,\overline{x})*\omega(\mathcal{E}^{\nu}_{2N+1}(t,\overline{x})),$$

где $\omega(\mathcal{E}^{\nu}_{2N+1}(t,\overline{x}))$ имеет вид (3.2) и

$$\mathcal{E}^{\nu}_{2N+1}(t,\overline{x})=\Gamma\delta(t,\overline{x})*\tfrac{1}{(2\sqrt{\pi\lambda_\nu t})^{2N+1}}\left(\sqrt{A\Gamma}^{-1}\right)^{2N+1}\cdot$$
$$\cdot\exp\left(-\tfrac{(A\Gamma)^{-1}|\overline{x}|^2}{4\lambda_\nu t}\right)\left[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\lambda_\nu^{-k-1}\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}(V_m(\overline{x})*)^{k+1}\cdot\delta^{(k)}(t)\right].$$

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 (или 2) все элементарные делители матрицы* Λ *первой степени, то матричная фундаментальная оператор-функция вырожденного оператора теплопроводности* $(B\delta'(t)\cdot\delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\overline{x}))$ *имеет на классе* $K'(R^1_+\otimes R^N, E_2)$ *вид*

$$E_N(t,\overline{x}) = T\delta(t,\overline{x}) * \left\{E^1_N(t,\overline{x}),\, E^2_N(t,\overline{x}),\, \ldots,\, E^s_N(t,\overline{x})\right\} * T^{-1}\delta(t,\overline{x}).$$

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 1 (или 2), то единственное обобщенное решение задачи Коши (1.1)–(1.2) в классе* $K'(R^1_+\otimes R^N, E_1)$ *записывается следующим образом*

$$\widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) = E_N(t,\overline{x}) * \left(\overline{f}(t,\overline{x})\theta(t) + B\overline{u}_0(\overline{x})\delta(t)\right). \qquad (3.3)$$

Если теперь в обобщенном решении (3.3) выделить регулярную и сингулярную составляющие, потребовать обращения в нуль последней и удовлетворения регулярной составляющей начальному условию (1.2), то полученные условия будут описывать совокупность начальных данных $\overline{u}_0(\overline{x})$ и правых частей $\overline{f}(t,\overline{x})$, при которых задача Коши (1.1)–(1.2) однозначно разрешима в классе непрерывных функций, остающаяся при этом регулярная составляющая будет являться искомым непрерывным решением.

Список литературы

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций/ М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. – М. : Наука, 1966. – 499 с.
5. Коробова (Сластная) О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений с нетеровым оператором при производной в банаховых пространствах / О. В. Коробова (Сластная) // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2007. – Т. 1. – С. 132–140.
6. Коробова (Сластная) О. В. Задача Коши для сингулярной системы дифференциально-разностных уравнений в банаховых пространствах / О. В. Коробова (Сластная)// Интеллектуальные и материальные ресурсы Сибири : материалы регион. науч.-практ. конф. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2008. – С. 28–32.
7. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.
8. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1393–1406.

9. Фалалеев М. В. Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев, О. В. Коробова (Сластная) // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 916–927.
10. Фалалеев М. В. Задача Коши для вырожденного уравнения теплопроводности в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 8. – С. 1120–1130.
11. Фалалеев М. В. Фундаментальная оператор-функция вырожденного уравнения теплопроводности в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, № 6. – С. 745–749.
12. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.

O. V. Slastnaya

The Cauchy problem for singular systems of heat equations with Fredholm operator of time-derivative in Banach spaces

Abstract. In this paper matrix fundamental operator-function for singular heat operator with Fredholm operator of time-derivative is built. The formula for the generalized solution of the corresponding Cauchy problem are got.

Keywords: singular heat operator; matrix fundamental operator-function; Fredholm operator

Сластная Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (ollis@mail.ru)

Olga Slastnaya, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242210 (ollis@mail.ru)