Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 61—68

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.956.3

К обоснованию корректности задачи оптимального управления волновым уравнением с управляемым дифференциальным оператором *

В. А. Терлецкий
Иркутский государственный университет

О. В. Бочкова
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются подходы к построению обобщенных решений волнового уравнения с разрывным по пространственной переменной коэффициентом дифференциального оператора.

Ключевые слова: волновое уравнение; гиперболические системы; метод характеристик; метод последовательных приближений.

1. Введение

Исследования задач оптимального управления во многом зависит от свойств обобщенного решения уравнений или систем, определяющих фазовую и сопряженную траектории для допустимых, как правило, разрывных управлений. В работе [1] рассматривается задача оптимального управления нелинейным волновым уравнением с нелинейными граничными условиями первого, второго и третьего рода. Обоснованием существования и единственности фазовой и сопряженной траекторий при произвольном фиксированном допустимом управлении в таких задачах служат результаты работы [2]. Настоящая статья преследует цель развития подхода из [2] для более общих задач оптимального управления нежели чем в [1]. Предполагается, что в них, как и в [1], наря-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 11–01–00713) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

ду с расширенными в области независимых переменных граничными управлениями будет присутствовать еще и управление коэффициентом волнового дифференциального оператора. Понятно, что это обобщение существенно расширяет круг возможных приложений такого рода задач оптимального управления. В частности, в математической модели малых упругих колебаний струны появляется возможность оптимизации выбора композитных материалов при конструировании струны. Дело в том, что с физической точки зрения коэффициент дифференциального оператора фактически определяется величиной модуля упругости материала, из которого изготовлен тот или иной участок струны. Однако платой за указанное обобщение задачи оптимального управления является существенное усложнение понятия обобщенного решения как фазовой, так и, в особенности, сопряженной задачи. Причиной этого служит разрывность допустимых управлений по пространственной переменной, приводящая к разрывности коэффициента дифференциального оператора.

В статье предлагаются приемы, позволяющие распространить результаты работы [2] на указанный более сложный класс задач.

2. Постановка задачи

В прямоугольнике $\Pi = S \times T$ плоскости переменных (s,t) с границей $\partial\Pi$, $\Pi \cup \partial\bar{\Pi} = \bar{\Pi}$, $S = (s_0, s_1)$, $T = (t_0, t_1)$ рассмотрим волновое уравнение

$$x_{tt} - a(s)\frac{\partial}{\partial s}(a(s)x_s) = f(x, x_t, x_s, s, t) \tag{2.1}$$

с начальными

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad x_t(s, t_0) = x^1(s), s \in S \tag{2.2}$$

и граничными условиями

$$x_t(s_0, t) = q^0(x(s_0, t), t), \quad x_s(s_1, t) = q^1(x(s_1, t), t), t \in T. \tag{2.3}$$

Здесь $x = x(s,t)$ искомое решение . На заданные функции $a = a(s)$, $f = f(x, x_t, xs, s, t)$, $x^0 = x^0(s)$, $x^1 = x^1(s)$, $q^i = q^i(x,t)$, $i = 0, 1$, наложены следующие предположения: a – суммируемая по Лебегу функция, f, q^0, q^1 непрерывны по Липшицу по переменным x, x_t, x_s при фиксированных s,t и суммируемы по Лебегу по независимым переменным s,t при фиксированных x, x_t, x_s, т. е. $a, x^0, x^{0\prime}, x^1 \in L_\infty(S)$; $f(x, x_t, x_s, \cdot, \cdot) \in L_\infty(\Pi)$, $q^i(x, \cdot) \in L_\infty(T)$.

Поясним выбор граничных условий (2.3). Первое равенство является по своей сути условием первого рода, хотя по виду отличается от соответствующего классического равенства. Однако, будучи обыкновенным дифференциальным уравнением относительно следа $x(s_0, \cdot)$ решения x, оно вместе с условием Коши $x(s, t_0) = x^0(s)$ однозначно определяет все значения $x(s_0, \cdot)$ при вполне естественных предположениях на функцию q^0. В то же время второе равенство в (2.3) служит условием второго рода, когда функция q^1 не зависит от следа $x(s_1, t)$, в противном случае при наличии такой зависимости – условием третьего рода. На самом деле роли границ по номерам родов граничных условий могут меняться. В общем случае возможно 9 различных вариантов постановки задачи (2.1) — (2.3): первый род на обеих границах; первый — на левой, второй — на правой; первый — на левой, третий — на правой и т. д. Указанная же нами фиксация типов условий на левой и правой границах приведена лишь для определенности, а полученные результаты могут быть переписаны для любой возможной постановки задачи.

Заметим, что в волновом уравнении (2.1) дифференциальный оператор записан в форме, которую нельзя считать общепринятой. Сделано это для удобства и большей компактности дальнейших выкладок. Вместе с тем подчеркнем, что выбранная запись не умоляет общности рассматриваемой задачи. Действительно, оператор

$$\mathcal{D}x = x_{tt} - a(s)\frac{\partial}{\partial s}(a(s)x_s),$$

используемый в уравнении (2.1) и оператор

$$\tilde{\mathcal{D}}x = x_{tt} - \frac{\partial}{\partial s}(k(s)x_s),$$

который, как правило, является наиболее употребимым в литературе, совпадают друг с другом, если положить

$$k(s) = a^2(s/2).$$

Ввиду разрывности функции f по переменным $(s, t) \in \Pi$, функции a по переменной $s \in S$ и функций q^0, q^1 по $t \in T$ решение задачи (2.1) – (2.3) может существовать только в обобщенном смысле. Построению такого решения и посвящена настоящая статья.

3. Сведение к смешанной задаче для гиперболической системы

Построим систему дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентную уравнению (2.1) на его классических (гладких) решениях. В этом случае частные производные x_t, x_s являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в замкнутой области $\bar{\Pi}$ функциями. Введем в рассмотрение две новые функции $r^{\pm} = r^{\pm}(s, t)$, положив по определению

$$r^{\pm} = x_t \mp a x_s. \tag{3.1}$$

Тогда очевидно, что

$$x_t = \frac{r^- + r^+}{2}, \ \ x_s = \frac{r^- - r^+}{2a}. \tag{3.2}$$

Через $D^{\pm}$ обозначим производные по направлению $(1, \pm a)$, т. е. для любой дифференцируемой в Π функции $z = z(s,t)$ справедливы равенства

$$D^{\pm} z = z_t \pm a z_s.$$

Таким образом, уравнение (2.1) будет эквивалентно системе

$$D^{\pm} x = r^{\mp}, \quad D^{\pm} r^{\pm} = f(x, \frac{r^- + r^+}{2}, \frac{r^- - r^+}{2a}, s, t). \tag{3.3}$$

Убедимся в справедливости этого утверждения.

$$f = D^{\pm} r^{\pm} = D^{\pm}(D^{\mp} x) = D^{\pm}(x_t \pm a x_s) = (x_t \pm a x_s)_t \mp a(x_t \pm a x_s)_s =$$

$$= x_{tt} \pm a x_{st} \mp a x_{ts} - a(a x_s)_s = x_{tt} - a(a x_s)_s.$$

Таким образом, если функции x, $r^{\pm}$ удовлетворяют системе уравнений (3.3), то функция x является решением уравнения (2.1)и наоборот.

Для упрощения записи введем дополнительное обозначение. Под записью $g[s,t]$ будем понимать значение функции g, все аргументы которой вычислены в точке (s,t), т. е. если $g = g(x, r^-, r^+, s, t)$, то $g[s,t] = g(x(s,t), r^-(s,t), r^+(s,t), s, t)$.

Ввиду (3.1) начальные условия для функций x и $r^{\pm}$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} x(s,t_0) = x^0(s), \\ r^{\pm}(s,t_0) = x^1(s) \mp a(s) x^{0\prime}(s), \quad s \in S, \end{cases} \tag{3.4}$$

тогда как на боковых границах должны выполняться равенства

$$\begin{cases} r^+(s_0,t) = -r^-(s_0,t) + 2q^0[s_0,t], \\ r^-(s_1,t) = r^+(s_1,t) + 2a(s_1) q^1[s_1,t], \quad t \in T. \end{cases} \tag{3.5}$$

Как известно, скачкообразные возмущения решений гиперболических систем распространяются вдоль характеристик. К таким разрывам решения приводят разрывы во входных данных. Система (3.3) (впрочем, как и уравнение (2.1)) имеет два семейства характеристик, которые являются семействами интегральных кривых обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = \pm a(s).$$

Решения этих уравнений будем обозначать функциями $s = s^{\pm}(\xi, \tau; t)$. Здесь $(\xi, \tau) \in \Pi$ – точка, через которую проходит характеристика в момент времени $t = \tau$.

Отметим, что система (3.3) записана в инвариантах Римана, т. е. каждый формирующий ее дифференциальный оператор можно рассматривать как производную одного из инвариантов Римана по направлению, определяемому характеристикой, или как производную сложной функции с аргументами $(s^{\pm}(\xi, \tau; t), t)$ по переменной t.

Этот факт позволяет построить интегральный эквивалент дифференциальной задачи в инвариантах Римана. Пусть $(\check{s}^{\pm}(s,t), \check{t}^{\pm}(s,t)) \in \partial\Pi$ — начальная точка соответствующей характеристики, проходящей через точку (s,t). Тогда, проинтегрировав уравнения системы (3.3) вдоль соответствующих характеристик, получим равносильную (3.3)–(3.5) интегральную систему уравнений типа Вольтерра

$$\begin{cases} x(s,t) = x^+(s,t) = x^+(\check{s}^+(s,t), \check{t}^+(s,t)) + \int\limits_{\check{t}^+}^{t} r^-(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau, \\ x(s,t) = x^-(s,t) = x^-(\check{s}^-(s,t), \check{t}^-(s,t)) + \int\limits_{\check{t}^-}^{t} r^+(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau, \\ r^-(s,t) = r^-(\check{s}^-(s,t), \check{t}^-(s,t)) + \int\limits_{\check{t}^-}^{t} f[s^-(s,t;\tau),\tau]d\tau, \\ r^+(s,t) = r^+(\check{s}^+(s,t), \check{t}^+(s,t)) + \int\limits_{\check{t}^+}^{t} f[s^+(s,t;\tau),\tau]d\tau. \end{cases} \tag{3.6}$$

Справедливость обратного перехода от интегральной системы (3.6) к дифференциальной системе (3.3) устанавливается непосредственной проверкой.

4. Обобщенное решение

Как было установлено в предыдущем пункте, интегральная система (3.6) эквивалентна дифференциальной начально-граничной задаче в инвариантах (3.3)-(3.5). Введем определение.

Определение 1. *Функция x является обобщенным решением волнового уравнения (2.1), если наряду с функциями $r^{\pm}$, связь с которыми описывается системой (3.3), она удовлетворяет интегральной системе (3.6). При этом функции $r^{\pm}$ определяют обобщенные производные x_s, x_t по правилам (3.2).*

Таким образом, как условия существования и единственности, так и свойства обобщенного решения x начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) полностью определяются условиями существования, единственности и свойствами решения интегральной задачи (3.6), которое, в свою очередь, естественно считать обобщенным решением дифференциальной задачи (3.3)-(3.5).

Существование, единственность и оценки роста решения системы интегральных уравнений (3.6) будем доказывать с помощью метода последовательных приближений. Однако здесь мы опишем лишь схему указанного метода.

Сначала построим прямоугольник $\Pi' \subseteq \Pi$ так, чтобы для любой точки $(s,t) \in \Pi'$ из двух характеристик $\xi = s^-(s,t;\tau)$ и $\xi = s^+(s,t;\tau)$ до боковых границ доходило бы не более одной. Очевидно, что $\Pi' = S \times (t_0, t')$, где t' служит корнем уравнения $s^+(s_0,t_0;t') = s^-(s_1,t_0;t')$. Если $t' \geq t_1$, то положим $\Pi' = \Pi$. Прямоугольник Π' разобьем в свою очередь на три криволинейных треугольника Π_{10}, Π_{00} и Π_{01} по правилу

$$\begin{gathered}\Pi_{10} = \{(\xi,\tau) \in \Pi' :\ s_0 < \xi < s^+(s_0,t_0;\tau)\},\\ \Pi_{00} = \{(\xi,\tau) \in \Pi' :\ s^+(s_0,t_0;\tau) \leq \xi \leq s^-(s_1,t_0;\tau)\},\\ \Pi_{01} = \{(\xi,\tau) \in \Pi' :\ s^-(s_1,t_0;\tau) < \xi < s_1\}.\end{gathered}$$

Доказательство существования и единственности обобщенного решения в области Π' является достаточным для утверждения существования и единственности его во всем прямоугольнике Π. Действительно, прямоугольник Π может быть «урезан» на прямоугольник Π' путем переноса начальных условий с границы $t = t_0$ на границу $t = t'$. Данную процедуру достаточно повторить конечное число раз, после чего обобщенное решение будет продолжено на весь прямоугольник Π.

Особенности траекторий характеристик, проходящих через точки областей Π_{10}, Π_{00} и Π_{01} определяют технические отличия в построении метода последовательных приближений в каждой из них. Более подробно рассмотрим эту процедуру в области Π_{00}. Пусть $(s,t) \in \Pi_{00}$ – произвольная фиксированная точка, $\xi_+ = s^+(s,t;t_0)$, $\xi_- = s^-(s,t;t_0)$. Область определения решения x в точке (s,t) имеет вид

$$G(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \Pi_{00} :\ s^+(s,t;\tau) < \xi < s^-(s,t;\tau),\ \tau \in (t_0,t)\}.$$

последовательность приближений $\{x^{(k)}, r^{\pm(k)}\},\ k = 0,1,\ldots$ определим в соответствии с системой (3.6) равенствами

$$\begin{cases} x^{(k+1)}(s,t) = x^{+(k+1)}(s,t) = x^{(k)}(\xi_+,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} r^{-(k)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau, \\ x^{(k+1)}(s,t) = x^{-(k+1)}(s,t) = x^{(k)}(\xi_-,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} r^{+(k)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau, \\ r^{-(k+1)}(s,t) = r^{-(k)}(\xi_-,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f^{(k)}[s^-(s,t;\tau),\tau]d\tau, \\ r^{+(k+1)}(s,t) = r^{+(k)}(\xi_+,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f^{(k)}[s^+(s,t;\tau),\tau]d\tau, \end{cases}$$

в которых начальные функции $x^{(0)}$, $r^{\pm(0)}$ считаем равными нулю, под символом $f^{(k(}[\xi,\tau]$ понимается значение функции, вычисленное в точке $[\xi,\tau]$ на k приближении $x^{(k)}$, $r^{\pm(k)}$, начальные значения $x(\xi_+,t_0)$, $x(\xi_-,t_0)$, $r^+(\xi_+,t_0)$, $r^-(\xi_-,t_0)$ определяются условиями (3.4).

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, проведенным в статье [2]. Можно установить, что последовательности $\{x^{(k)}, r^{\pm(k)}\}, =0,1,\ldots,$ почти всюду в Π_{00} имеют пределы, которые мы обозначим через $x(s,t)$, $r^{\pm}(s,t)$. Точно так же рассматриваются треугольники Π_{10} и Π_{01}. Таким образом, обобщенное решение задачи (3.3)-(3.5) существует и единственно. Следовательно существует единственное обобщенное решение x исходной задачи (2.1)-(2.3).

Список литературы

1. Терлецкий В. А. Вариационный принцип максимума в задаче оптимального управления нелинейными волновыми процессами / В. А. Терлецкий, Е. А. Лутковская // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 105–117.
2. Терлецкий В. А. Обобщенное решение нелинейного волнового уравнения с нелинейными граничными условиями первого, второго и третьего рода / В. А. Терлецкий, Е. А. Лутковская // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 3. – С. 403–415.

V. A. Terletsky, O. V. Bochkova

To substantiate correctness of optimal control problem of wave equation with controllable differentiation operator

Abstract. We consider ways to construct generalized solutions of wave equation with discontinuous coefficient with respect to spacial variable of differentiation operator.

Keywords: wave equation, hyperbolic systems, method of characteristics, method of successive approximations.

Терлецкий Виктор Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)521282 (terletsky@math.isu.ru)

Бочкова Ольга Витальевна, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)521282 (bochkova1.88@mail.ru)

Terletsky Viktor, Ph. D., Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)521282 (terletsky@math.isu.ru)

Bochkova Olga, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)521282 (bochkova1.88@mail.ru)