Серия «Математика»
2015. Т. 12. С. 79—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.24

Численный вероятностный анализ для оптимизационных задач гидроэнергетики

О. А. Попова
Сибирский федеральный университет

Аннотация.

В работе рассмотрена задача оптимизации выработки электроэнергии гидроэлектростанцией в условиях неопределенности входных данных. Для решения оптимизационных задач гидроэнергетики со случайными входными данными используется аппарат численного вероятностного анализа. Численный вероятностный анализ — новый раздел вычислительной математики, предназначенный для решения различных задач со случайными входными данными. Основой численного вероятностного анализа являются понятие вероятностного расширения и численные операции над плотностями вероятности случайных величин. Рассмотрены источники возникновения различных типов неопределенности и способы их представления. Приводится пример решения задачи оптимизации выработки электроэнергии ГЭС, которая зависит от прогноза притока воды в водохранилище, представленной в виде стохастической функции. Показано, что в дискретном случае задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений со случайными коэффициентами. Приведены результаты численного моделирования в виде гистограмм, аппроксимирующих плотности вероятности оптимального количества воды, проходящей через турбины в различные моменты времени, и совместных функций плотностей вероятности.

Ключевые слова: численный вероятностный анализ, оптимизация, неточные данные, гидроэнергетика.

1. Введение

Задачи гидроэнергетики характеризуются высоким уровнем неопределенности, которая проявляется на всех стадиях информационного процесса принятия управленческого решения. Поэтому поиск методов и подходов к построению эффективных решений в условиях неопределенности является важной и практически значимой задачей. Решением разнообразных задач со стохастическими неопределенностями в данных занимается стохастическая гидрология (см. например [1]). Для решения оптимизационных задач со стохастическими входными данными используется аппарат стохастического программирования. Особое место занимают оптимизационные задачи с неопределенными входными данными. В случае, когда входные параметры содержат различные типы неопределенности, используется математический аппарат неопределенного программирования [16]. Следует отметить работы в области интервальных неопределенностей [7; 12]. Работа чешских авторов [12] посвящена задачам линейной оптимизации в условиях интервальной и нечеткой неопределенности.

В статье для решения оптимизационных задач гидроэнергетики со случайными входными данными предлагается использовать аппарат численного вероятностного анализа [6; 14; 15; 17], представляющего собой раздел математического программирования и использующий методы численного моделирования и анализа для построения функции плотности вероятности множества возможных оптимальных решений для линейных и нелинейных оптимизационных задач. В отличие от аналогичных работ в области стохастического программирования [13; 18], данный подход существенно использует численные операции над плотностями вероятности случайных величин и вероятностные расширения функций от случайных аргументов.

Численный вероятностный анализ направлен прежде всего на разработку методов представления, обработки, численных процедур моделирования и анализа данных, способствующих снижению уровня неопределенности в зависимости от ее типа, характера, специфических особенностей, объема и источников на всех стадиях информационного процесса, сопровождающего принятие управленческого решения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации выработки электроэнергии гидроэлектростанцией в условиях неопределенности входных данных.

Для этого представим мощность p выработки электроэнергии ГЭС в виде [11]

$$p = Chu,$$

где C — некоторая константа; h — высота уровня воды в водохранилище, $h \in [h_{min}, h_{max}]$, u — количество воды проходящей через турбины в единицу времени, $u \in [u_{min}, u_{max}]$.

Высота уровня воды h зависит от объема воды в водохранилище V:

$$h = h(V).$$

Объем воды в водохранилище $V(t)$ в свою очередь зависит от $u(t)$, притока воды в водохранилище $q(t)$ и $u_x(t)$ — холостого сброса.

$$V(t) = V_0 + \int_0^t q(\xi) - u(\xi) - u_x(\xi) d\xi.$$

Пусть необходимо максимизировать выработку электроэнергии на временном отрезке $[0, T]$. Ставится задача оптимального управления

$$P(u) = \int_0^T C\ h\biggl(V_0 + \int_0^t q(t) - u(t) - u_x(t)dt\biggr)\ u(t)dt \to \max,$$

где u — управление, количество воды проходящей через турбины в единицу времени, функцию $u \in [u_{min}, u_{max}]$ будем искать в пространстве кусочно-постоянных функций. При небольших изменениях h объем воды в водохранилище можно записать как функцию от h: $V_1(h) = V_1(h_0) + V_1'(\xi)(h - h_0)$. Полагая $S = V_1'(\xi)$ получаем

$$V_1(h) = V_0 + S(h - h_0),$$

где V_0 и h_0 — объем и уровень воды в водохранилище в момент времени $t = 0$ соответственно, S можно интерпретировать как площадь поверхности водохранилища. Уровень воды h в водохранилище зависит от $u(t)$, $q(t)$ и $u_x(t)$

$$h(V(t)) = h_0 + (V(t) - V_0)/S = h_0 + (\int_0^t q(\xi) - u(\xi) - u_x(\xi)d\xi)/S.$$

Таким образом

$$P(u) = C\int_0^T \biggl(h_0 + (\int_0^t q(\xi) - u(\xi) - u_x(\xi)d\xi)/S\biggr)\ u(t)dt \to \max. \tag{2.1}$$

где $q(t)$ — приток воды в водохранилище; $u_x(t)$ — холостой сброс; u — количество воды через турбины, $u \in [u_{min}, u_{max}]$.

3. Дискретная модель

Отметим, что построенная оптимизационная модель отражает непрерывный характер изменения мощности во времени от входных параметров. Однако в реальной практике управления режимами функционирования ГЭС многие процессы носят дискретный характер, например количество воды, проходящей через турбины в единицу времени, осуществляется операторами ГЭС и является кусочно-постоянной функций. Поэтому далее рассмотрим дискретное приближение для модели (2.1). Это позволит свести решение исходной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для этих целей построим на отрезке $[0, T]$ сетку: $\omega = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\}$, приток воды в водохранилище за время $[t_{i-1}, t_i]$ приблизим гистограммой q_i, соответственно u_{xi} — гистограммы холостого сброса за время $[t_{i-1}, t_i]$, u_i — гистограммы количества воды через турбины за время $[t_{i-1}, t_i]$ и $U = \{u_i | i = 1, \ldots, n\}$. Дискретная модель

$$P_d(U) = C \sum_{i=1}^{n} \left(h_0 + (\sum_{j=1}^{i} q_j - u_j - u_{xj})/S \right) u_i \to \max . \tag{3.1}$$

Задачу (3.1) в случае известного u_x можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$AU = b,$$

где U — вектор решения, $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$ — матрица и вектор правой части. Для этих целей градиент от (3.1) приравняем к нулю. В нашем случае

$$2u_1 + u_2 + \ldots + u_n = Sh_0 + q_1,$$
$$u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_i + \ldots + u_n = Sh_0 + q_1 + q_2,$$
$$u_1 + u_2 + \ldots + 2u_i + \ldots + u_n = Sh_0 + \sum_{j=1}^{i} q_j,$$
$$u_1 + u_2 + \ldots + 2u_n = Sh_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j.$$

Заметим, что матрица A — симметричная, прямые вычисления показывают, что угловые миноры матрицы A положительные. Следовательно, в силу критерия Сильвестра матрица $A = A' > 0$ — положительно определенная. Вследствие этого задача сильно выпуклая, решение дискретной модели единственное.

Поскольку матрица A детерминированная, то оптимальное количество воды проходящей через турбины u_i, $i = 1, \ldots, n$ можно представить в виде линейных комбинаций от q_i, $i = 1, \ldots, n$.

В данной модели основная входная информация $q(t)$ — приток воды в водохранилище. В силу многих причин функция $q(t)$ носит случайный характер. В этом случае мы получаем систему линейных алгебраических уравнений со случайной правой частью. Важное значение имеет способ построения $q(t)$ и соответственно аппроксимаций q_i, $i = 1, ..., n$ и возможность вычислять линейные комбинации от q_i, которые будут представлены своими гистограммами. Для этих целей будем использовать численный вероятностный анализ.

4. Способы представления и обработки информации

Значительную часть моделей притока воды в водохранилище $q(t)$ можно представить в виде функциональной зависимости [5]

$$q(t) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_k), \tag{4.1}$$

где t — время, x_i — входные параметры (осадки, запас влаги в почве, влажность, температура воздуха и т.п.).

Подобные модели можно рассматривать как модели с полураспределенными параметрами. Например, водосбор разбивается на частные водосборы, также применяется метод высотного районирования. Для водосборов определенного высотного положения осуществляется дополнительное деление на высотные зоны. Каждую высотную зону можно подразделить на подзоны по типу растительности, например лесные и не лесные территории и т. п.

Последовательность формирования стока представляет собой функцию реагирования, преобразующую избыточную почвенную влагу в сток. Она также учитывает осадки, выпадающие непосредственно на поверхность озер, рек и других увлажненных территорий и испарение с них.

Необходимой входной информацией для модели являются количество осадков (суточные суммы), температура воздуха (среднесуточные значения) и оценки возможного суммарного испарения. В качестве альтернативы, суточные значения можно рассчитать как пропорциональные температуре воздуха, но с коэффициентами пропорциональности ежемесячных значений. Некоторые модели работают с данными более высокого временного разрешения, т. е. ежечасными данными.

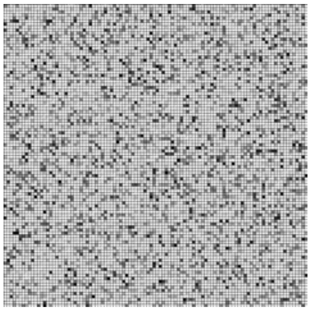
Рассмотрим в качестве примера входной параметр — температура воздуха. Одним из способов оперативного нахождения температуры на значительных областях является дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ).

Предположим, что мониторинг температуры ведется по области Ω, которую представим как объединение подобластей Ω_i. ДЗЗ позволяет для каждой подобласти Ω_i представить N_i значений температуры x_i — $x_{i,j}, j = 1, ..., N_i$ и т. п. Таким образом, каждый x_i как правило представляется как среднее значение

$$x_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j}.$$

далее эти средние значения используются для вычисления $q(t)$.

Следуя работе [5] для каждой входной величины x_i может быть использована агрегация данных — построена гистограмма P_i. На рис. 1



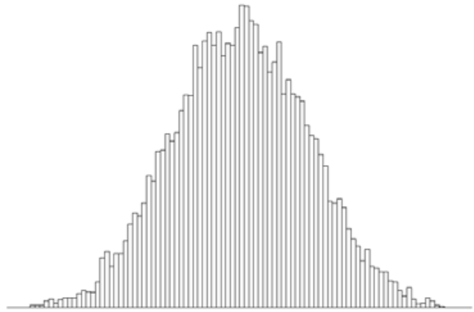


Рис. 1. Построение гистограммы по данным мониторинга

приведен модельный пример построения гистограммы P по значениям в некоторой области Ω. Область Ω представляет прямоугольник, состоящий из 100×100 пикселей, каждому пикселю сопоставлено значение x_i. Для наглядности на рис. 1 значения представлены оттенками серого цвета. Более светлые цвета соответствуют более высокой температуре. Таким образом, построенная гистограмма характеризует частоты распределения температуры в области Ω. Таким образом построение гистограммы является хорошей агрегацией. Поскольку гистограмма требует для хранения значительно меньше памяти и несет в себе значительную информацию о данных: математическое ожидание, дисперсию, носитель и т.п.

Ставится задача: зная гистограммы P_i, аппроксимирующие плотности вероятности x_i, построить оценку плотности вероятности величины q. Обычно для этих целей используют метод Монте-Карло. Альтернативой методу Монте-Карло является численный вероятностный анализ (ЧВА) [3].

5. Основные теоретические сведения

Предметом численного вероятностного анализа является решение различных задач со стохастическими неопределенностями в данных с использованием численных операций над плотностями вероятностей случайных величин и функций со случайными аргументами. Для этого предлагается разнообразный инструментарий, включающий такие понятия как гистограммная арифметика, вероятностные, естественные и гистограммные расширения, гистограммы второго порядка.

ЧВА представляет собой непараметрический подход и может успешно применяться для вероятностного описания систем в рамках визуально-интерактивного моделирования, повышая тем самым качество исследования систем [8]. На тестовых примерах и ряде практических задач доказаны преимущества данного подхода перед методом Монте-Карло [14].

5.1. Способы представления функций плотности случайных величин

Представим виды функций плотности вероятности случайных величин, над которыми могут осуществляться арифметические операции.

Дискретные случайные величины. Дискретная случайная величина ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и существует такая функция $p(x)$, значение которой в каждой точке x_i есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_i.

Гистограммы. Гистограммой называется случайная величина, плотность распределения которой представлена кусочно-постоянной функцией. Гистограмма P — определяется сеткой $\{x_i | i = 0, ..., n\}$, на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ гистограмма принимает постоянное значение p_i, максимальный шаг сетки $d = \max_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1}$.

Гистограммы второго порядка. В случае эпистемической неопределённости наряду с интервальными гистограммами возможно использование *гистограмм второго порядка*, т. е. таких гистограмм каждый столбец которой — гистограмма [3; 15].

Кусочно-полиномиальные функции. Кусочно-полиномиальные функции также могут рассматриваться как инструмент аппроксимации функции плотности распределения случайной величины.

Аналитически заданные плотности вероятности. Рассматриваются случайные величины, плотность распределения которых задана аналитически.

5.2. Операции над плотностями вероятности случайных величин

В качестве примера рассмотрим арифметические операции над гистограммными переменными.

Реализация арифметических операций основана на работе с $p(x, y)$ — совместной плотностью вероятности двух случайных величин x, y. Пусть p_z — гистограмма, приближающая плотность вероятности, арифметической операции над двумя случайными величинами $x * y$, где $* \in \{+, -, \cdot, /, \uparrow\}$. Тогда вероятность попадания величины z в интервал $[z_i, z_{i+1}]$ определяется по формуле [6]

$$P(z_k < z < z_{k+1}) = \int_{\Omega_k} p(x, y) dx dy, \tag{5.1}$$

где $\Omega_k = \{(x, y) | z_k \leq x * y \leq z_{k+1}\}$.

Мы расширим отношение порядка $\succ \in \{<, \leq, \geq, >\}$ на случайные переменные:

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x \succ y \text{ для всех реализаций } x \in \operatorname{supp} \boldsymbol{x}, y \in \operatorname{supp} \boldsymbol{y}.$$

Если носители supp $\boldsymbol{x}$, supp $\boldsymbol{y}$ пересекаются, можно говорить о вероятности $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$

$$P(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) = \int_\Omega p(x, y)dxdy,$$

где $\Omega = \{(x, y)|x \succ y\}$, $p(x, y)$ — совместная плотность вероятности $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

5.3. Вероятностные расширения

Рассмотрим задачу определения закона распределения функции нескольких случайных аргументов. Приведем метод решения этой задачи для случая функции двух аргументов. Пусть имеется система двух непрерывных случайных величин $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ с плотностью распределения $p(x, y)$. Случайная величина $\boldsymbol{z}$ связана с $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ функциональной зависимостью:

$$\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Тогда закон распределения P_z величины $\boldsymbol{z}$ [4]:

$$P_z(r) = P(f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < r).$$

Пусть, гистограмма p_z определяется сеткой $\{z_i|i = 0, ..., n\}$. Определим область $\Omega_i = \{(x, y)|z_i < f(x, y) < z_{i+1}\}$. Тогда p_{zi} имеет вид

$$p_{zi} = \int\int_{\Omega_i} p(x, y)dxdy/(z_{i+1} - z_i).$$

Пусть $f(x_1, ..., x_k)$ — рациональная функция, тогда для вычисления гистограммы F заменим арифметические операции на гистограммные, а переменные x_1, x_2, ... , x_k — их гистограммными значениями X_1, X_2, ... , X_k. Полученную гистограмму F будем называть — *естественным гистограммным расширением.*

Теорема 1. *[4] Пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$ — рациональная функция, каждая переменная которой встречается только один раз и $x_1, \ldots, x_k$ — независимые случайные величины. Тогда естественное гистограммное расширение аппроксимирует вероятностное расширение с точностью $O(d)$, где d — максимальный шаг сетки для всех гистограмм X_1, X_2, ... , X_k.*

Пример 1. Для рациональной функции $f(x, y) = xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$ только второе представление попадает под условие теоремы 1 и, следовательно, естественное гистограммное расширение будет аппроксимировать вероятностное с некоторой точностью $O(h^\alpha)$.

Теорема 1 легко обобщается на следующий случай.

Замечание 1. Пусть для функции $f(x_1, ..., x_m)$ возможна замена переменных, такая что $f(z_1, \dots, z_k)$ — рациональная функция от переменных $z_1, \dots, z_k$, удовлетворяющая условиям Теоремы 1 и z_i — функции от множества переменных $x_i, i \in Ind_i$, причем множества Ind_i попарно не пересекаются. Пусть для каждой z_i существуют вероятностные расширения. Тогда естественное расширение $f(z_1, \dots, z_k)$ будет аппроксимировать вероятностное с некоторой точностью.

Пример 2. Пусть $f(x_1, x_2) = (-x_1^2 + x_1)sin(x_2)$. Тогда, полагая $z_1 = (-x_1^2 + 1)$ и $z_2 = sin(x_2)$. Заметим, что можно построить вероятностные расширения функций z_1, z_2 и $f = z_1 z_2$ — рациональная функция, попадающая под условия теоремы 1. Следовательно, ее естественное расширение будет аппроксимировать вероятностное с некоторой точностью.

Рассмотрим случай, когда для $f(x_1, ..., x_m)$ необходимо найти вероятностное расширение $\boldsymbol{f}$, но не удается построить замену переменных согласно замечанию 1. Пусть для определенности только x_1 встречается несколько раз. Заметим, что если подставить вместо случайной величины x_1 детерминированную t, то для функции $f(t, x_2 ..., x_n)$ можно построить естественное вероятностное расширение.

Пусть t — дискретная случайная величина, аппроксимирующая x_1 следующим образом: t принимает значения t_i с вероятностью P_i и пусть для каждой $f(t_i, x_2 ..., x_n)$ можно построить естественное вероятностное расширение φ_i. Тогда вероятностное расширение $\boldsymbol{f}$ функции $f(x_1, ..., x_n)$ можно аппроксимировать плотностью вероятности φ следующим образом [4]:

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} P_i \varphi_i(\xi).$$

6. Численный пример

Рассмотрим численное решение дискретной модели. Пусть $q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i]$ — равномерные случайные величины. Для определенности $n = 3$, $S = 1$, носители $q_1 = [0.1, 0.2]$, $q_2 = [0.2, 0.3]$, $q_3 = [0.3, 0.4]$, $h_0 = 0.9$.

При $n = 3$ решив систему линейных алгебраических уравнений, в силу детерминированности матрицы, получаем оптимальное количество воды проходящей через турбины в виде линейной комбинации притоков воды:

$$u_1 = \frac{-q_3 - 2q_2 + q_1 + Sh_0}{4},$$

$$u_2 = \frac{-q_3 + 2q_2 + q_1 + Sh_0}{4},$$

$$u_3 = \frac{3q_3 + 2q_2 + q_1 + Sh_0}{4}.$$

В предположении независимости q_i вычисления u_i попадают в условия теоремы 1 и достаточно использовать гистограммную арифметику.

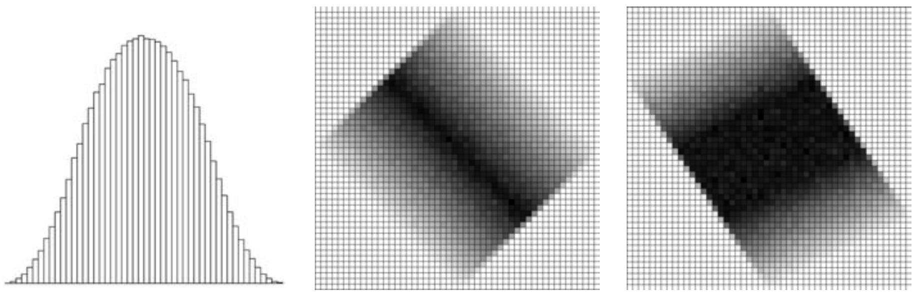


Рис. 2. Гистограмма u_1 и совместные плотности вероятности для (u_1, u_2), (u_2, u_3)

На рис. 2 представлена гистограмма плотности вероятности решения u_1, значения совместных плотностей вероятности для (u_1, u_2), (u_2, u_3) представлены оттенками серого. Носители

$$u_1 = [0.0, 0.1] \text{ и } u_2 = [0.25, 0.35], u_3 = [0.575, 0.725].$$

Лицу, принимающему решения, представляется визуальная информация о плотности вероятности компонент решения и их совместных плотностей вероятности, что значительно облегчает принятие решений.

Выбрав конкретные представители для вектора u, например $u_1 = 0.05$, $u_2 = 0.3$, $u_3 = 0.6$, можно вычислить плотность вероятности выработки электроэнергии $P(u)$. На рис. 3 представлено гистограммное приближение плотности вероятности выработки электроэнергии P_h. Носитель P_h определяется $[0.6325, 0.8775]$, математическое ожидание $\mathrm{M}[P_h] = 0.7550$. Используя гистограмму P_h можно вычислить риски, что выработка электроэнергии $P(u) < P_1$ или $P(u) > P_2$.

Для нашего примера, вероятности того, что $P(u) < 0.68$, $P(u) > 0.8$ оцениваются в 0.040 и 0.136 соответственно.

7. Заключение

В работе рассмотрена оптимизация выработки электроэнергии гидроэлектростанцией в условиях случайных входных данных, в частности, случайного характера притока воды в водохранилище. В работе использовался подход, основанный на численном вероятностном анализе. В качестве решения использовалось количество воды проходящей

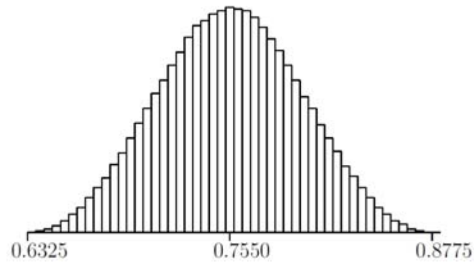


Рис. 3. Гистограммное приближение плотности вероятности выработки электроэнергии

через турбины. В результате построены плотности вероятности решений, которые представлены в виде гистограмм. Далее эта информация о решении может быть использована для оценки рисков.

Важно отметить, что в процессе осуществления расчетов в режиме реального времени формируется таблица значений, по которой и строится графическое представление совместной функции плотности вероятности параметров управления. Имея данную информацию, визуализированную в виде соответствующей области вероятностного пространства принятия решений, у ЛПР появляются дополнительные основания для выбора наилучшего управленческого решения. На основе ЧВА можно получить также дополнительные вероятностно-статистические характеристики такого множества и использовать их для дальнейшего поиска и обоснования эффективности принимаемого решения.

Список литературы

1. Гельфан А. Н. Динамико-стохастическое моделирование формирования талого стока / А. Н. Гельфан ; [отв. ред. Е.М. Гусев]; Ин-т вод. проблем РАН. – М. : Наука, 2007. – 279 с.
2. Венников В. А. Оптимизация режимов электростанций и энергосистем : учеб. для вузов / В. А. Венников, В. Г. Журавлев, Г. А. Филиппова. – М. : Энергоиздат, 1981. – 464 с.
3. Добронец Б. С. Численный вероятностный анализ для исследования систем в условиях неопределенности / Б. С. Добронец, О. А. Попова // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычисл. техника и информатика. – 2012. – № 4 (21). С. 39-46.
4. Добронец Б. С. Элементы численного вероятностного анализа / Б. С. Добронец, О. А. Попова // Вестн. Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. академика М.Ф. Решетнева. 2012. № 2. С. 19–23.
5. Добронец Б. С. Гистограммный подход к представлению и обработке данных космического и наземного мониторинга / Б. С. Добронец, О. А. Попова // Изв. Южн. федер. ун-та. Техн. науки. – 2014. – № 6 (155). – С. 14–22.
6. Добронец Б. С. Численный вероятностный анализ неопределенных данных: монография / Б. С. Добронец, О. А. Попова. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2014. – 167 с.

7. Перепелица В. А. Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных / В. А. Перепелица, Ф. Б. Тебуева. – М. : Акад. естествознания, 2007. – 151 с.
8. Попова О. А. Технология извлечения и визуализации знаний на основе численного вероятностного анализа неопределенных данных / О. А. Попова // Информатизация и связь. – 2013. – № 2. – С. 63–66.
9. Попова О. А. Задача линейного программирования со случайными входными данными / О. А. Попова // Вестн. ВСГУТУ. – 2013. – № 2 (41). – С. 19–23.
10. Попова О. А. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений со случайными коэффициентами / О. А. Попова // Вестн. ВСГУТУ. – 2013. – № 2 (41). – С. 5–11.
11. Цветков Е. В. Оптимальные режимы гидроэлектростанций в энергетических системах / Е. В. Цветков, Т. М. Алябышева, Л. Г. Парфенов. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 304 с.
12. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерман. – М. : Ижевск : НИЦ «Регуляр. и хаот. динамика», Ин-т компьютер. исслед., 2008. – 288 с.
13. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин. – М. : Сов. радио, 1974. – 400 с.
14. Dobronets B. S. Software implementation of numerical operations on random variables / B. S. Dobronets, A. M. Krantsevich, N. M. Krantsevich // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 168–173
15. Dobronets B. S. Numerical Probabilistic Analysis under Aleatory and Epistemic Uncertainty / B. S. Dobronets, O. A. Popova // Reliable Computing. – 2014. – Vol. 19. – P. 274–289.
16. Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming / B. Liu. – 2nd ed. – Berlin : Springer-Verlag, 2009.
17. Popova O. A. Optimization Problems with Random Data // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 506–515.
18. Prékopa A. On the probability distribution of the optimum of a random linear program // J. SIAM Control. – 1966. – Vol. 4 N 1. – P. 211–222.

Попова Ольга Аркадьевна, кандидат технических наук, доцент, Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, 660074, Красноярск, ул. Акад. Киренского, 26 (e-mail: olgaarc@yandex.ru)

O. A. Popova

The Numerical Probabilistic Analysis of Optimization Problems Hydropower

Abstract. The paper considers the problem of optimizing the hydroelectric power generation in the face of uncertainty of the input data. To solve optimization problems with random hydropower input data we used numerical probability analysis. The numerical probabilistic analysis is a new section of Computational Mathematics, for applying to different tasks with random input data. The probabilistic extensions and numerical operations on the probability densities of the random variables are the base of numerical probabilistic analysis. We explore the sources of the emergence of various types of uncertainty and their methods of presentation. To demonstrate the NPA methods we present an optimization problem example of hydroelectric power generation which depends on the prediction of lateral inflow into the reservoir provided in the form of stochastic functions. It is shown that in the discrete case the problem reduces to solving a system of linear algebraic equations with random coefficients. The results of numerical simulation are presented in the graphic form of probability density histograms approximating the joint probability density function as the optimal amount of water passing through the turbines at different times.

Keywords: numerical probabilistic analysis, optimization, uncertain data, hydropower.

References

1. Gelfan A.N. Dynamic-stochastic modeling of formation of meltwater runoff. Inst waters. Problems of RAS. Moscow, Nauka, 2007. 279 p.
2. Vennikov V.A. Optimization of power plants and power systems: A Textbook for high schools. M., Energoizdat, 1981. 464 p.
3. Dobronets B.S., Popova O.A. Numerical probabilistic analysis for the study of systems under uncertainty. *Bulletin of Tomsk State University. Management, Computer Science and Informatics*, 2012, no 21, pp. 39–46.
4. Dobronets B.S., Popova O.A. Elements of numerical probabilistic analysis. *Bulletin of the Siberian State Aerospace University*, 2012, no 2, pp. 19–23.
5. Dobronets B.S., Popova O.A. Histogram approach to representation and processing of data space and data ground monitoring. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2014, № 6 (155). C. 14–22
6. Dobronets B.S., Popova O.A. The numerical probabilistic analysis of uncertain data. Krasnoyrsk, Siberian Federal University, 2014. 167 p.
7. Perepelitsa V.A., Tebueva F.B. Discrete optimization and modeling under uncertainty data, M., The Academy of Natural Sciences, 2007.
8. Popova O.A. Extraction technology and visualization of knowledge on the basis of numerical probabilistic analysis of uncertain data. *Informatization and Communication*, 2013, no 2, pp. 63–66.
9. Popova O.A. Linear programming problem with random input data. *VSGUTU Bulletin*, 2013, no2 (41), pp. 19–23.
10. Popova O.A. Numerical solution of systems of linear algebraic equations with random coefficients. *VSGUTU Bulletin*, 2013, no2 (41), pp. 5–11.
11. Tsvetkov E.V., Alyabysheva T.M., Parfenov L.G. Optimum modes of hydro power plants in power systems. Moscow, Energoatomizdat, 1984. 304 p.
12. Fiedler M., Nedoma J., Ramík J., Rohn J. and Zimmermann K. Linear Optimization Problems with Inexact Data. *Springer Science+Business Media, New York*, 2006.
13. Yudin D.B. Mathematical methods of control under incomplete information. Moscow, Soviet Radio, 1974. 400 p.
14. Dobronets B.S., Krantsevich A.M., Krantsevich N.M. Software implementation of numerical operations on random variables. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2013, vol 6, no2, pp. 168–173.
15. Dobronets B.S., Popova O.A. Numerical Probabilistic Analysis under Aleatory and Epistemic Uncertainty. *Reliable Computing*. 2014, vol. 19, pp. 274–289.
16. Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

17. Popova O.A. Optimization Problems with Random Data *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2013, vol. 6, no4, pp. 506–515.
18. Prékopa A. On the probability distribution of the optimum of a random linear program. *J. SIAM Control*, 1966, vol. 4, no1, pp. 211–222.

Popova Olga Arkadevna, Candidate of Sciences (Technics), Associate Professor, Siberian Federal University, 79, Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660041 tel.: +7(983)2960554 (e-mail: olgaarc@yandex.ru)