Серия «Математика»
2015. Т. 12. С. 93—105

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 518.517

О построении траектории одной динамической системы с начальными данными на гиперплоскостях

О. А. Романова
Иркутский государственный университет

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассмотрены вопросы корректной разрешимости начальной задачи для одного класса дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Ключевую роль играет редукция вырожденного дифференциального уравнения к регулярным задачам с использованием свойств жордановой структуры операторных коэффициентов уравнения. В работе получены достаточные условия корректной разрешимости и устойчивости траектории $u : [0, \infty) \to X$ при $t \to +\infty$ начальной задачи для уравнений в банаховых пространствах, неразрешенных относительно производных. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: начальная задача, банаховы пространства, вырожденные уравнения, условие Шоуолтера – Сидорова, функционалы.

Введение

При решении ряда задач прикладной математики и экономики возникают дифференциально-операторные уравнения с вырождением [9], [12], [14], [20], [21], [23]. Многие прикладные начально-краевые задачи можно редуцировать к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах с необратимым операторным коэффициентом в главной части [2], [4]-[8], [12], [14] , [21]–[23]. Как правило стандартные методы при исследовании таких задач неприменимы. Наиболее изучен случай, когда этот необратимый оператор является фредгольмовым и рассматривается задача Коши [17], [18]. Ряд интересных результатов в этой области можно найти в монографиях [12], [14] и статьях [4]–[8], [15]–[18].

В работах [13], [16] была поставлена и изучена начальная задача для дифференциальных уравнений с вырождением с начальными условиями на проекции решения. В последствии задачи такого рода получили в школе профессора А. Г. Свиридюка (см. монографию [23], работы [2], [4]–[8] и др.) название "задача Шоуолтера – Сидорова"и нашли приложение при решении ряда актуальных задач [4]–[8]. Поэтому изучение классов таких начально-краевых задач представляет не только теоретический, но и прикладной интерес. В данной заметке рассмотрена неклассическая задача с начальными данными на гиперплоскостях $l_i = \{u \in X| < u, \alpha_i^* >= c_i, i = \overline{1,n}\}$ в банаховых пространствах X для слабо изученного класса дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Au(t) + f(t), \tag{0.1}$$

где $L = \sum_{i=1}^{n} < \cdot, \alpha_i^* > a_i,\ a_i \in Y, \alpha_i^* \in X^*, i = \overline{1,n}, \dim KerL = \infty$, A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, $\overline{D(A)} = X$, $A : D(A) \subset X \to Y$, X, Y — банаховы пространства, $f(t)$ — непрерывная вектор-функция при $t \in [0, T]$ со значениями в Y. Согласно результатам исследования, проведенного в работе [11], решение (0.1) сводится к решению алгебро-дифференциальной системы. В работе [11] были получены достаточные условия разрешимости для уравнения (0.1) в зависимости от вида оператора A. Так как в уравнении (0.1) значения функционалов $< u(t), \alpha_i^* >$ зависят от переменной t, то уравнение (0.1) называлось дифференциальным уравнением с производной от функционалов. В конечномерном случае, когда $X = Y = R^N,\ u = (u_1, ..., u_N)'$ $B-$ квадратная матрица размерности $N \times N$ и $rangB = n$, получим систему линейных алгебро-дифференциальных уравнений $\frac{d}{dt}Bu(t) = Au(t) + f(t)$ с вырожденной матрицей, которую можно записать в виде (0.1). Действительно [1], т. к. $rangB = n$, то матрица B может быть представлена в виде произведения $B = B_1 B_2$, где B_1, B_2 — матрицы размерности $N \times n$ и $n \times N$ соответственно. Вектор-столбцы a_i матрицы B_1 суть линейно-независимые столбцы матрицы B, строки матрицы B_2 можно взять в качестве векторов α_i^*, порождающих функционалы в уравнении (0.1).

В данной работе исследована возможность корректной постановки начальной задачи для динамической системы (0.1). А именно, получены достаточные условия существования и единственности траектории $u : R^1 \to X$, проходящей в момент $t = 0$ через гиперплоскости, порождаемые функционалами $< \cdot, \alpha_i^* >$. В ряде случаев решения построены в явном виде и даны критерии их устойчивости. В случае алгебро-дифференциальных систем количество гиперплоскостей, на которых можно задавать начальные условия, связано с рангом матрицы B в главной части. Вид этих гиперплоскостей определяется скелетным разложением [1] матрицы B.

Известия Иркутского государственного университета.
2015. Т. 12. Серия «Математика». С. 93–105

1. Постановка начальной задачи и ее решения в случае, когда оператор A непрерывно обратим

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} < u(t), \alpha_i^* > a_i = Au(t) + f(t) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$< u(t), \alpha_i^* > |_{t=0} = c_i^0, i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

где A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, $\overline{D(A)} = X$, $A : D(A) \subset X \to Y$, X, Y — банаховы пространства, $a_i \in Y, \alpha_i^* \in X^*, i = \overline{1, n}$, $f : R^1 \to Y$ — непрерывная вектор-функция со значениями в Y. Требуется построить непрерывное решение задачи (1.1) -(1.2). Все векторы будем понимать как вектор-столбцы, т. е. $\overline{\alpha}^* = (\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)'$ и т.д.

Введем обозначение

$$< u(t), \overline{\alpha}^* >= \overline{c}(t). \tag{1.3}$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\overline{c}(t), \overline{a}) = Au(t) + f(t),$$

где $(\overline{c}(t), \overline{a}(t))$ — скалярное произведение векторов $\overline{c}(t)$ и $\overline{a}(t)$. Пусть $N(A) = \{0\}$, т. е. существует обратный оператор A^{-1}, причем $\overline{a} \in R(A)$, $f(t) \in R(A)$. Тогда из последнего уравнения найдем

$$u(t) = A^{-1}(\dot{\overline{c}}(t), \overline{a}) - A^{-1}f(t) \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $\overline{c}(t) : R^1 \to R^n$

$$B\dot{\overline{c}}(t) = \overline{c}(t) + \overline{g}(t) \tag{1.5}$$

с начальным условием Коши

$$\overline{c}(0) = \overline{c}^0. \tag{1.6}$$

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} < A^{-1}a_1, \alpha_1^* > & \dots & < A^{-1}a_n, \alpha_1^* > \\ \dots & \dots & \dots \\ < A^{-1}a_1, \alpha_n^* > & \dots & < A^{-1}a_n, \alpha_n^* > \end{pmatrix}, \overline{g}(t) = \begin{pmatrix} < A^{-1}f(t), \alpha_1^* > \\ \dots \\ < A^{-1}f(t), \alpha_n^* > \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая.

1-й случай. Пусть $\det B \neq 0$, тогда решение задачи Коши (1.5) -(1.6) определяется формулой

$$\overline{c}(t) = \exp(B^{-1}t)\overline{c}^0 + \int_0^t \exp(B^{-1}(t-s))B^{-1}\overline{g}(s)ds.$$

Поэтому

$$\dot{\overline{c}}(t) = B^{-1}\exp(B^{-1}t)\overline{c}^0 + B^{-1}\overline{g}(t) + \int_0^t B^{-1}exp(B^{-1}(t-s))B^{-1}\overline{g}(s)ds. \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.4), получим решение начальной задачи (1.1) -(1.2) в замкнутом виде. Справедлива

Теорема 1. *Пусть оператор* A *имеет обратный,* $\overline{a} \in R(A)$, $f : [0,T] \to R(A) \subset Y$ *— непрерывная вектор-функция при* $t \in [0,T]$, $\det B \neq 0$, *тогда формула*

$$\begin{gathered} u(t) = A^{-1}((B^{-1}\exp(B^{-1}t)\overline{c}^0 + B^{-1}\overline{g}(t)+ \\ + \int_0^t B^{-1}exp(B^{-1}(t-s))B^{-1}\overline{g}(s)ds, \overline{a}) - f(t)), \end{gathered} \tag{1.8}$$

определяет единственное непрерывное решение начальной задачи (1.1) -(1.2).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1,* $t \in [0,\infty)$ *и* $Re\lambda_i < 0$, *где* $\lambda_i \in \sigma(B)$, *тогда задача (1.1) -(1.2) устойчива по Ляпунову при* $t \to +\infty$. *Доказательство следует из формулы (1.8), так как* $\lim_{t\to+\infty} ||exp(B^{-1}t)|| = 0$ *на основании [3].*

2-й случай. Пусть $\det B = 0, rangB = r$. В этом случае будем использовать известные результаты (см., например работу [17]). Предположим, что выполнено условие

A) $\overline{e}_i\,|_1^{n-r}$ — базис в $N(B)$, $\overline{e^*}_i\,|_1^{n-r}$ - базис в $N(B^*)$, $\det(B-\lambda I) \not\equiv 0$.

Тогда матрицы B и B^* имеют полные I — жордановы наборы

$$\left\{\overline{e}_i^{(k)}\right\}, \left\{\overline{e}_i^{*(k)}\right\}, i = \overline{1, n-r}, k = \overline{1, p_i}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $< \overline{e}_i^{(p_i)}, \overline{e}_j^* >= \delta_{ij}, i, j = \overline{1, n-r}$.

Пусть

B) функция $f(t)$ является дифференцируемой $p = max_i p_i - 1-$ раз.

Введем обратимую на основании [19] матрицу по формуле

$$\hat{B} = B + \sum_{i=1}^{n-r} < \cdot, \overline{e}_i^{*(p_i)} > \overline{e}_i^{(p_i)}.$$

Справедлива

Лемма 1. *[17] Пусть* $\det(B - \lambda I) \not\equiv 0,\ \forall\lambda$, *тогда задача Коши (1.5)-(1.6) разрешима в классе непрерывных функций тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} < \overline{c}^0 + \overline{g}(t), \overline{e}_i^{*(j)} >|_{t=0} = 0, i = \overline{1, n-r}, k = \overline{1, p_i}. \tag{1.9}$$

Если условия (1.9) выполнены, то решение задачи Коши (1.5) - (1.6) имеет вид

$$\overline{c}(t) = \exp(\hat{B}^{-1}t)\overline{c}^0 + \int_0^t \exp(\hat{B}^{-1}(t-s))\hat{B}^{-1}\overline{g}(s)ds -$$
$$- \sum_{i=1}^{n-r} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{d^k}{dt^k} < \exp(\hat{B}^{-1}t)\overline{c}^0 +$$
$$+ \int_0^t \exp(\hat{B}^{-1}(t-s))\hat{B}^{-1}\overline{g}(s)ds + \overline{g}(t), \overline{e}_i^* > \overline{e}_i^{(p_i-k)}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) найдем

$$\dot{\overline{c}}(t) = \hat{B}^{-1}\exp(\hat{B}^{-1}t)\overline{c}^0 + \hat{B}^{-1}\overline{g}(t) + \int_0^t \hat{B}^{-1}\exp(\hat{B}^{-1}(t-s))\hat{B}^{-1}\overline{g}(s)ds -$$
$$- \sum_{i=1}^{n-r} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} < \exp(\hat{B}^{-1}t)\overline{c}^0 +$$
$$+ \int_0^t exp(\hat{B}^{-1}(t-s))\hat{B}^{-1}\overline{g}(s)ds + \overline{g}(t), \overline{e}_i^* > \overline{e}_i^{(p_i-k)}. \tag{1.11}$$

Чтобы получить искомое решение задачи (1.1) -(1.2), остается подставить (1.11) в (1.4). На основании вышеизложенного имеет место

Теорема 2. *Пусть оператор* A *имеет обратный,* $\overline{a} \in R(A)$, *функция* $f : [0, T] \to R(A) \subset Y$ *p-раз дифференцируемая на отрезке* $[0, T]$. *Кроме того, пусть* $\det B = 0$, $\det(B - \lambda I) \not\equiv 0$, *и вектор* $\overline{c}^0$ *из начального условия (1.2) удовлетворяет равенствам (1.9). Тогда формулы (1.4), (1.11) определяют непрерывное решение начальной задачи (1.1) -(1.2)*

Таким образом, в отличие от теоремы 1 в условиях теоремы 2 вектор $\overline{c}^0$ в начальном условии нельзя задать произвольным, так как $\overline{c}^0$ должен удовлетворять равенствам (1.9).

2. Исследование задачи (1.1)–(1.2) в случае, когда оператор A фредгольмов

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2), предполагая, что A — оператор фредгольма, $\dim N(A) = n$, $\{\varphi_i\}$, $i = \overline{1,n}$ — базис в $N(A)$, $\{\psi_i\}$, $i = \overline{1,n}$ — базис в $N(A^*)$, $\{\gamma_i\}$, $i = \overline{1,n}$, $\{z_i\}$, $i = \overline{1,n}$ — соответствующие биортогональные системы элементов из X^*, Y, $a_i \in Y, \alpha_i^* \in X^*, i = \overline{1,n}$, $f(t)$ — непрерывная вектор-функция.

Уравнение (1.1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} < u(t), \alpha_i^* > a_i + \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t) z_k = \hat{A}u(t) + f(t), \\ \xi_k(t) =< u(t), \gamma_k >,\ k = \overline{1,n},\end{gathered} \tag{2.1}$$

где оператор $\hat{A} = A + \sum_{k=1}^{n} < \cdot, \gamma_k > z_k$ на основании [19] имеет ограниченный обратный оператор $\Gamma \in L(Y \to X)$. Используя обозначение $< u(t), \alpha_i^* >= c_i, i = \overline{1,n}$, перепишем первое уравнение системы (2.1) в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t) a_i + \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t) z_k = \hat{A}u(t) + f(t).$$

Учитывая, что $\hat{A}^{-1} = \Gamma$, получим

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma a_i \dot{c}_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t) \phi_k - \Gamma f(t). \tag{2.2}$$

Применяя функционалы $\alpha_i^* \in X^*$ к обеим частям равенства (2.2) и подставляя правую часть (2.2) в остальные уравнения системы (2.1), получим для определения вектор-функций $\overline{c}(t), \overline{\xi}(t)$ расщепленную систему

$$\begin{gathered}D\dot{\overline{c}}(t) = \overline{c}(t) - K\overline{\xi}(t) + \overline{p}(t), \\ M\dot{\overline{c}}(t) = \overline{d}(t)\end{gathered} \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$\overline{c}(0) = \overline{c}^0. \tag{2.4}$$

Здесь

$$D = \begin{pmatrix} < \Gamma a_1, \alpha_1^* > & \dots & < \Gamma a_n, \alpha_1^* > \\ \dots & \dots & \dots \\ < \Gamma a_1, \alpha_n^* > & \dots & < \Gamma a_n, \alpha_n^* > \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} < a_1, \psi_1 > & \dots & < a_n, \psi_1 > \\ \dots & \dots & \dots \\ < a_1, \psi_n > & \dots & < a_n, \psi_n > \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} < \varphi_1, \alpha_1^* > & \dots & < \varphi_n, \alpha_1^* > \\ \dots & \dots & \dots \\ < \varphi_1, \alpha_n^* > & \dots & < \varphi_n, \alpha_n^* > \end{pmatrix},$$

$$\overline{p}(t) = \begin{pmatrix} < \Gamma f(t), \alpha_1^* > \\ \dots \\ < \Gamma f(t), \alpha_n^* > \end{pmatrix},$$

$$\overline{d}(t) = \begin{pmatrix} < f(t), \psi_1 > \\ \dots \\ < f(t), \psi_n > \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\det M \neq 0, \det K \neq 0$, тогда из системы (2.3) с учетом условия (2.4) получим

$$\begin{gathered} \overline{c}(t) = M^{-1} \int_0^t \overline{d}(s) ds + \overline{c}^0, \\ \overline{\xi}(t) = K^{-1}(\overline{p}(t) + \overline{c}(t) - D\dot{\overline{c}}(t)) = \\ K^{-1}(\overline{p}(t) + M^{-1} \int_0^t \overline{d}(s) ds + \overline{c}^0 - DM^{-1}\overline{d}(t)), \end{gathered} \tag{2.5}$$

Имеет место теорема

Теорема 3. *Пусть A — фредгольмов оператор,* $\dim N(A) = n,\ f(t)$*-непрерывная вектор-функция и* $\det M \neq 0, \det K \neq 0$, *тогда начальная задача (1.1) -(1.2) корректно разрешима, причем ее единственное непрерывное решение определяется по формуле*

$$u(t) = \Gamma(\overline{a}, M^{-1}\overline{d}(t)) + (\overline{\xi}, \overline{\phi}) - \Gamma f(t),$$

где

$$\overline{\xi}(t) = K^{-1}(\overline{p}(t) + M^{-1} \int_0^t \overline{d}(s) ds + \overline{c}^0 - DM^{-1}\overline{d}(t)).$$

Замечание 1. В отличие от теорем 1 и 2 в теореме 3 не требуется выполнение условий $a_i \in R(A), f(t) \in R(A)$.

Если $\det M = 0$, то становится справедливой

Теорема 4. *Пусть A -фредгольмов оператор,* $\dim N(A) = n,\ \det M = 0,\ rangM = r$ *и* $\overline{e}_i^*,\ i = \overline{1, n-r}$*— базис в* $N(M^*)$, *кроме того,* $\sum_1^{n-r} | < \overline{d}(t), \overline{e}_i^* > | \not\equiv 0$, *тогда уравнение (1.1) не имеет решений.*

Замечание 2. Так как в уравнении (1.1) дифференцируется не сама функция $u(t)$, а значения функционалов $< u(t), \alpha_i^* >$, то в условиях теорем 1, 2, 3 непрерывное решение $u(t)$ является классическим решением задачи (1.1)– (1.2). Отметим, что при этом решение $u(t)$ будет дифференцируемым и $\frac{d}{dt} < u(t), \alpha_i^* > = < \frac{d}{dt}u(t), \alpha_i^* >$, если $f(t)$ дифференцируемая функция.

Замечание 3. Рассматривая расщепленную систему (2.3) с начальным условием (2.4) более подробно можно получить другие достаточные условия ее разрешимости, в том числе достаточные условия существования решений задачи (0.1)–(1.2), зависящих от свободных параметров.

3. Примеры

Пример 1. В качестве иллюстрации изложенной теории рассмотрим начальную задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \alpha(s)u(s,t)ds a(x) = \int_0^x u(s,t)ds + f(x,t), \tag{3.1}$$

$$\int_0^1 \alpha(s)u(s,t)ds|_{t=0} = c^0, \tag{3.2}$$

где $x \in [0,1], t \in [0,\infty), a(x) \in C^{(1)}_{[0,1]}, f(x,t)-$ непрерывная функция по t и дифференцируемая по $x, a(0) = 0, f(0,t) = 0$. Поэтому $a(x), f(x,t) \in R(A)$, где $A = \int_0^x [\cdot]ds \in L(C \to C^{(1)})$

Если выполнено условие $\int_0^1 \alpha(s)a'(s)ds \neq 0$, то на основании теоремы 1 начальная задача (3.1)–(3.2) имеет единственное непрерывное решение. Решение однородной задачи будет асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$, если $\int_0^1 \alpha(s)a'(s)ds < 0$.

Если $\int_0^1 \alpha(s)a'(s)ds = 0$ и $\int_0^1 \alpha(s)f'_s(s,t)ds|_{t=0} = c^0$, то справедлив результат теоремы 2, и задача (3.1)–(3.2) разрешима только при одном значении постоянной c^0.

Пример 2. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}a(x)u(\alpha,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + ku(x,t) + f(x,t), \tag{3.3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{3.4}$$

$$u(\alpha,t)|_{t=0} = c^0, \tag{3.5}$$

где $x \in [0,1],\ t \in R,\ a(x) \in C_{[0,1]}, \alpha, k$ — некоторые постоянные, $\alpha \in (0,1)$. Пусть $f(x,t)$ — непрерывна по x и t. Предположим, что $X =$

$C^{(2)}$ — пространство функций дважды дифференцируемых по x при $x \in [0,1]$, и удовлетворяющих условию (3.4), Y- пространство функций непрерывных по x. Тогда оператор $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \in L(X \to Y)$ — фредгольмов. Пусть $k = (\pi n)^2, n = 1, 2, ...$, тогда $\dim N(A) = 1, \phi(x) = \psi(x) = \sin \pi n x$.

Обозначим

$$u(\alpha, t) = c(t). \tag{3.6}$$

Из уравнения (3.3), учитывая обозначение (3.6), получим

$$u(x,t) = \dot{c}(t)v(x) + \xi(t)\sin \pi n x - s(x,t), \tag{3.7}$$

где $v(x)$ и $s(x,t)$ являются решениями краевых задач:

$$\hat{A}v(x) = a(x), v(0) = 0, v(1) = 0$$

$$\hat{A}s(x,t) = f(x,t), s(0,t) = 0,\ s(1,t) = 0,$$

оператор

$$\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + (\pi n)^2 + \int_0^1 \sin \pi n x \sin \pi n s[\cdot]ds$$

имеет ограниченный обратный $\Gamma = \hat{A}^{-1}$.

Функции $c(t)$, $\xi(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$c(t) = v(\alpha)\dot{c}(t) + \xi(t)\sin \pi n \alpha - s(\alpha, t). \tag{3.8}$$

$$\dot{c}(t)\int_0^1 \sin \pi n x a(x)dx = \int_0^1 f(x,t)\sin \pi n x dx. \tag{3.9}$$

При выполнении условий

$$\alpha \neq m/n, m < n(\sin \pi n \alpha \neq 0), \int_0^1 \sin \pi n x a(x)dx \neq 0$$

из уравнений (3.8), (3.9) получим, что

$$c(t) = c^0 + \int_0^t \frac{\int_0^1 f(x,s)\sin \pi n x dx}{\int_0^1 \sin \pi n x a(x)dx}ds$$

$$\xi(t) = \frac{c(t) - v(\alpha)\dot{c}(t) + s(\alpha,t)}{\sin \pi n \alpha}$$

Для получения решения задачи (3.3)–(3.5) достаточно подставить найденные функции $c(t)$, $\xi(t)$ в формулу (3.7). Таким образом, на основании теоремы 3, функция (3.7) является единственным классическим решением задачи (3.3)–(3.5) .

4. Заключение

Изложенный подход можно применить для построения устойчивых траекторий нелинейных систем с функционалами от производных динамического потока. При этом выбор начальных и краевых условий на гиперплоскостях естественным образом будет порождаться заданными функционалами. Построение соответствующей теории и ее приложений представляет самостоятельный интерес.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
2. Гильмутдинова А. Ф. О неединственности решений задачи Шоуолтера-Сидорова для одной модели Плотникова/ А. Ф. Гильмутдинова // Вестн. СамГУ, Естественнонауч. сер. – 2007. – № 9/1(59).
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. /Б. П. Демидович. – СПб. : Лань, 2008. – 480 с.
4. Загребина С. А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С. А. Загребина// Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
5. Загребина С. А. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором / С. А. Загребина, М. А. Сагадеева// Вестн. МаГУ. Математика. – 2006. – № 9. – С. 17–27.
6. Келлер А. В. Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера-Сидорова для систем леонтьевского типа / А. В. Келлер // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьютер. технологии, управление, радиоэлектроника. – 2009. — № 26. – С. 82–86.
7. Келлер А. В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоуолтера–Сидорова и численные решения / А. В. Келлер // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – № 3. – С. 30–43.
8. Келлер А. В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей леонтьевского типа / А. В. Келлер // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2011. – № 7. – С. 40–46.
9. Лаврентьев М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
10. Логинов Б. В. Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова – Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации/Б. В. Логинов, Н. А. Сидоров // Мат. сборник. – 1991. – Т. 182, № 5. – С. 681-691.
11. Романова О. А. Об одном классе дифференциальных уравнений с производными от функционалов / О. А. Романова // Приближенные методы решений операторных уравнений и их приложения. – Иркутск, 1982. – С. 108-120.
12. Сидоров Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения / Д. Н. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.
13. Сидоров Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. – 1984. – Т. 35, № 4. – С. 569–578.
14. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н. А. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 1982. – 312 с.

15. Сидоров Н. А. Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами // Мат. сборник. – 1995. – Т. 182, № 2. – С. 129–141.
16. Сидоров Н. А. Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшем дифференциальном выражении / Н. А. Сидоров, Е. Б. Благодатская // Докл. АН СССР. – 1992. – Т. 39, №5.
17. Сидоров Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н. А. Сидоров, О. А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516–1526.
18. Сидоров Н. А. Дифференциально-разностные уравнения с фредгольмовым оператором при главной части / Н. А. Сидоров, О. А. Романова // Изв. Иркут. гос. ун-та. – 2007. – Т. 1. – С. 254–266.
19. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Физматлит, 2002. – 488 с.
20. Треногин В. А. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / В. А. Треногин, А. Ф. Филиппов (ред.) – М. : Физматлит, 2003. – 464 с.
21. Sidorov N. A. Successive approximations to the solutions to nonlinear equations with a vector parameter in a nonregular case / N. A. Sidorov, D. N. Sidorov, R. Yu. Leont'ev // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2012. – Vol. 6, N 3. – P. 387–392.
22. Sidorov N. A. On small solutions of nonlinear equations with vector parameter in sectorial neighborhoods / N. A. Sidorov, R. Yu. Leont'ev, A. I. Dreglya // Mathematical Notes. – 2012. – Vol. 91, N 1. – P. 90–104.
23. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht [u.a.] : VSP, 2003. – (Inverse and ill-posed problems series).

Романова Ольга Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521298
(e-mail: olga@baikal.ru)

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521298
(e-mail: sidorovisu@gmail.com)

O.A. Romanova, N. A. Sidorov

On the Construction of the Trajectory of a Dynamical System with Initial Data on the Hyperplanes

Abstract. In this paper we consider the problems of correct solvability of the initial value problem for a class of differential equations in Banach spaces. We apply the method of reduction of degenerate differential equation to the regular problems using the properties of the Jordan structure of the equation operator coefficients. The sufficient conditions for the correct solvability and stability as $t\ rightarrow +\ infty$ of the initial value problem for the equations unsolved according to derivatives depending on the equation operator coefficients are obtained. The abstract theorems are used for statement and investigation of initial value problems for partial differential equation and integral equation.

Keywords: initial value problem, Banach spaces, singular equations, Showalter – Sidorov initial condition, functionals.

References

1. Gantmacher F.R. *The theory of matrices*. Moscow, Nauka, 1988. 552 p.
2. Gilmutdinova A.F. On nonuniqueness of solutions to the Showalter-Sidorov problem for the Plotnikov model (Russian). *Vestnik of Samara State University*, 2007, no 9 /1, pp. 85–90.
3. Demidovich B.P. Lectures on mathematical stability theory. St. Petersburg, Lan', 2008. 480 p.
4. Zagrebina S.A. On the problem Showalter-Sidorov. *Russian Mathematics [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2007, no 3, pp. 22–28.
5. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. The generalized Showalter-Sidorov problem for Sobolev type equations with strong (L,p)-radial operator. (Russian) *Vestnik of Magnitogorsk State University, Mathematics*, 2006, no 9, pp. 17–27.
6. Keller A.V. The algorithm for the numerical solution of the Showalter-Sidorov problem for the Leontiev systems. *Vestnik of South Ural State Univirsity, Computer technology, management, electronics*, 2009, no 26, pp. 82–86.
7. Keller A.V. Leontiev type systems: classes of problems with the initial condition Showalter-Sidorov and numerical solutions. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta (the Bulletin of Irkutsk State University)*, 2010, no 3, pp. 30–43.
8. Keller A.V. The algorithm for solving of the Showalter-Sidorov problem for Leontiev models. *Vestnik of South Ural State Univirsity, Mat. modeling and programming*, 2011, no 7, pp. 40–46.
9. Lavrentiev M. M., Saveliev L. Ja. Operator theory and ill-posed problems. Novosibirsk, IM SB RAS 1999, 702 p.
10. Loginov B.V., Sidorov N.A. Group symmetry of the Lyapunov-Schmidt and iterative methods in the problem of a bifurcation point. *Matematicheskii Sbornik*, 1991, vol. 182, no 5, pp. 681–691.
11. Romanova O.A. On a class of differential equations with the derivatives of the functionals. *Approximate methods for solving operator equations and their applications*, Irkutsk, 1982, pp. 108–120.
12. Sidorov D.N. *The methods of analysis of integral dynamic models: theory and applications*. Irkutsk, Irkutsk State University, 2013. 293 p.
13. Sidorov N.A. On a class of degenerate differential equations with the convergence. *Mat. notes*, 1984, vol. 35, no 4, pp. 569–578.
14. Sidorov N.A. The general problems of regularization in the branching theory. Irkutsk, ISU, 1982. 312 p.
15. Sidorov N.A. The explicit and implicit parametrization in the construction of branching solutions by Iierative methods. *Matematicheskii Sbornik*, 1995, vol. 182, no 2, pp. 129–141.
16. Sidorov N.A., Blagodatskaya E.B. Differential equations with Fredholm Opretorom of the leading differential expression. *Doklady Akademii Nauk*, 1992, vol. 39, no 5.
17. Sidorov N.A., Romanova O.A. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1983, vol. 19, pp. 1516–1526; English transl. in Differential Equations 19 (1983).

Известия Иркутского государственного университета.
2015. Т. 12. Серия «Математика». С. 93–105

18. Sidorov N.A., Romanova O.A. Differential-difference equations with Fredholm operator in the main part. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta (the Bulletin of Irkutsk State University)*, 2007, vol. 1, pp. 254–266
19. Trenogin V.A. *Functional Analysis*. Moscow, FIZMATLIT, 2002. 488 p.
20. Trenogin V.A., Filippov A.F. (eds). *Nonlinear analysis and nonlinear differential equations*. Moscow, FIZMATLIT, 2003. 464 p.
21. Sidorov N.A., Sidorov D.N, Leont'ev R.Yu. Successive approximations to the solutions to nonlinear equations with a vector parameter in a nonregular case. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2012, vol. 6, no 3, pp. 387–392.
22. Sidorov N.A., Leont'ev R.Yu., Dreglya A.I. On small solutions of nonlinear equations with vector parameter in sectorial neighborhoods. *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no 1, pp. 90–104.
23. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. *Series: Inverse and ill-posed problems* series. Utrecht [u.a.], VSP, 2003.

Romanova Olga Aleksandrovna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Institute of mathematics, economics and informatics, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003
tel.: (3952)521298 (e-mail: olga@baikal.ru)

Sidorov Nikolay Aleksandrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Institute of mathematics, economics and informatics, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003
tel.: (3952)521298 (e-mail: sidorovisu@gmail.com)