Серия «Математика»
2015. Т. 12. С. 12—22

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.95

Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени *

Д. М. Гордиевских
Челябинский государственный университет

В. Е. Федоров
Челябинский государственный университет

Аннотация. Теорема о разрешимости задачи Коши для вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка в банаховом пространстве использована для установления необходимых и достаточных условий разрешимости начально-краевых задач для некоторых возникающих в гидродинамике систем уравнений дробного порядка по времени. С помощью функционального исчисления в банаховой алгебре линейных ограниченных операторов получен вид решения рассмотренных задач.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, система уравнений Соболева, система уравнений Осколкова, начально-краевая задача.

1. Введение

Разрешимость задачи Коши

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1.1}$$

для эволюционного уравнения

$$D^\alpha Lu(t) = Mu(t) \tag{1.2}$$

ранее исследована в работе [7] в случае (L, p)-ограниченности оператора M [12]. Здесь $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ — линейные операторы, D^α — дробная производная Капуто порядка $\alpha > 0$, m — наименьшее натуральное число, не превосходимое числом α.

* Работа выполнена при частичной поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

При этом уравнение предполагается вырожденным, т. е. выполняется условие $\ker L \neq \{0\}$. Оно, в частности, выполняется при редукции к операторно-дифференциальному виду (1.2) систем уравнений в частных производных, возникающих в механике сплошных сред и содержащих уравнение несжимаемости $\nabla \cdot v(x,t) = 0$.

В данной работе этот факт продемонстрирован на примерах начально-краевых задач для системы уравнений Соболева дробного порядка по времени и линеаризованной в нуле системы уравнений Осколкова дробного порядка по времени. Полученные в [7] необходимые и достаточные условия на начальные данные для разрешимости задачи Коши используются в данной работе при исследовании начально-краевых задач для этих систем уравнений. При этом представлен вид решения начально-краевых задач, полученный с помощью формулы решения задачи (1.1), (1.2) [7] методами функционального исчисления в банаховой алгебре линейных ограниченных операторов.

Отметим, что несмотря на большой интерес исследователей к тематике дробных дифференциальных уравнений в последние десятилетия, работ о вырожденных дробных дифференциальных уравнениях вида (1.2) немного. В посвященных уравнению (1.2) работах [10; 11], например на оператор L накладывается условие непрерывной обратимости. Случай вырожденного оператора L и сильно (L,p)-секториального оператора M рассмотрен в [8].

2. Задача Коши для вырожденного уравнения дробного порядка в банаховом пространстве

Для банаховых пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{V}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Кроме того, будем использовать обозначения $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U}) \equiv \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Через D_M обозначим область определения оператора M, снабженную его нормой графика. Согласно [12, с. 89] оператор M будем называть (L,σ)-ограниченным, если множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$ ограничено в $\mathbb{C}$. При условии (L,σ)-ограниченности оператора M обозначим $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$,

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})\,. \qquad (2.1)$$

Операторы P и Q являются проекторами, обозначим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{V}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{V}^1 = \mathrm{im} Q$. Пусть L_k (M_k) — сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. [12, с. 90, 91]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*
(i) $LP = QL$, $MPu = QMu$ *при всех* $u \in D_M$;
(ii) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{V}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H = M_0^{-1} L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

Положим $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, при $\delta > 0$

$$g_\delta(t) = \begin{cases} t^{\delta-1}/\Gamma(\delta), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$J_t^\delta h(t) = (g_\delta * h)(t) = \int\limits_0^t g_\delta(t-s) h(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1} h(s) ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, m — наименьшее натуральное число, не превосходимое числом α, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D_t^0 — тождественный оператор, D_t^α — дробная производная Капуто, т. е.

$$D_t^\alpha f(t) = J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t)$$

в случае, когда выражение в правой части этого равенства имеет смысл.

Решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \ u^{(k)}(0) = 0, \, k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2.2}$$

для уравнения

$$D_t^\alpha L u(t) = M u(t) \tag{2.3}$$

называется такая вектор-функция $u \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \cap C(\mathbb{R}_+; D_M)$, что $Lu \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V})$, $g_{m-\alpha} * \left(Lu - \sum\limits_{k=0}^{m-1} (Lu)^{(k)}(0) g_{k+1} \right) \in C^m(\mathbb{R}_+;\mathfrak{V})$, при этом выполняются равенства (2.2) и для всех $t \in \mathbb{R}_+$ — равенство (2.3).

Разрешимость задачи (2.2), (2.3) исследована в работе [7]. Теоремы 3 и 4 из [7] коротко переформулируем следующим образом.

Теорема 2. [7] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен,* $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$,

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\mu^L(M) E_\alpha(\mu t^\alpha) d\mu, \ t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{2.4}$$

где $E_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\alpha n+1)$ *— функция Миттаг-Леффлера. Тогда при любых* $u_k \in \mathfrak{U}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, *существует единственное решение задачи (2.2), (2.3), при этом оно имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k U(t) u_k.$$

Если при некотором $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ $u_l \notin \mathfrak{U}^1$, *то задача (2.2), (2.3) не имеет решения.*

3. Система Соболева дробного порядка по времени

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, 0) = v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{3.1}$$

$$v_n(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i(x, t) n_i(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.2}$$

для системы уравнений Соболева дробного порядка

$$D_t^\alpha v(x, t) = [v(x, t), \overline{\omega}] - r(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.4}$$

описывающей при $\alpha = 1$ динамику малых внутренних движений стратифицированной жидкости в равновесном состоянии [5]. Здесь m — наименьшее натуральное число, не превосходимое числом $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор внешней нормали к ее границе, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости движения частиц жидкости, r — градиент нестационарного давления, $[\cdot, \overline{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\overline{\omega} = (0, 0, \omega) \in \mathbb{R}^3$, где ω — удвоенная угловая скорость вращения,

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Неизвестными вектор-функциями являются v и r.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространства $\mathbb{L}_2$. Существует представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим расщеплением ортопроектор.

Следуя подходу С. Л. Соболева [5], используем обобщенную постановку задачи (3.1)–(3.4), заменив уравнение несжимаемости (3.4) и граничное условие (3.2) на уравнение

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.5}$$

Действительно, в силу плотности множества $\{\nabla\varphi : \varphi \in C^\infty(\Omega)\}$ в подпространстве $\mathbb{H}_\pi$ и в силу интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega \langle v, \nabla\varphi\rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \int\limits_{\partial\Omega} v_n \varphi ds - \int\limits_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi dx,$$

справедливого при всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, получим, что для функции $v \in \mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^3$ выполнение условий (3.2) и (3.4) равносильно тому, что $v \in \mathbb{H}_\sigma$ или $\Pi v = 0$. Отказавшись от ограничения $v \in \mathbb{H}^1$, получим условие (3.5).

Очевидно, что оператор $B : v \to [v, \overline{\omega}]$, $\overline{\omega} = (0, 0, \omega)$, осуществляет линейное непрерывное отображение из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$, при этом $\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} = |\omega|$. Нетрудно также показать, что имеет место действие оператора $B : \mathbb{H}_\pi \to \mathbb{H}_\sigma$ [6, лемма 2].

Положим $\Sigma = I - \Pi$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $B_\sigma = B|_{\mathbb{H}_\sigma}$, тогда задачу (3.1), (3.3), (3.5) можно задать в виде (2.3), (2.2) с помощью операторов (подробнее см. в [9])

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma B_\sigma & \mathbb{O} \\ \Pi B_\sigma & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}). \tag{3.6}$$

Лемма 1. *Оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Доказательство. Нетрудно вычислить операторы

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu I - \Sigma B_\sigma)^{-1} & \mathbb{O} \\ \Pi B_\sigma (\mu I - \Sigma B_\sigma)^{-1} & I \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \Pi B_\sigma & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Первый оператор существует и ограничен при $|\mu| > a = |\omega|$ в силу неравенства $|\omega| = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} \geq \|\Sigma B_\sigma\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}$. При этом учтено, что $\|\Sigma\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} = 1$, так как Σ — ортогональный проектор.

Из вида проекторов следует, что $\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$. Очевидно, что $L_0 = H = \mathbb{O}$, поэтому оператор M $(L, 0)$-ограничен. □

Теорема 3. *При любых $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует единственное решение задачи (3.1), (3.3), (3.5), при этом оно имеет вид*

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k E_\alpha(t^\alpha \Sigma B_\sigma) v_k(x), \quad r(x,t) = \Pi B \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k E_\alpha(t^\alpha \Sigma B_\sigma) v_k(x).$$

Если при некотором $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ $v_l \notin \mathbb{H}_\sigma$, то задача (3.1), (3.3), (3.5) не имеет решения.

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P = \{(v, r) \in \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi : r = \Pi B_\sigma v\}$. Поэтому условие (3.1) с функциями $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$ равносильно начальному условию Коши с данными из $\mathfrak{U}^1$ для уравнения (2.3) с операторами (3.6).

Применяя функциональное исчисление в банаховой алгебре ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ убедимся, что операторы (2.4) имеют вид

$$U(t) = \begin{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha \Sigma B_\sigma) & \mathbb{O} \\ \Pi B_\sigma E_\alpha(t^\alpha \Sigma B_\sigma) & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}).$$

Осталось сослаться на теорему 2. □

4. Линеаризованная система Осколкова дробного порядка по времени

Рассмотрим начально-краевую задачу для линеаризованной в нуле системы уравнений Осколкова дробного порядка по времени

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, 0) = v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4.1}$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.2}$$

$$D_t^\alpha (1 - \chi\Delta) v(x, t) = \nu \Delta v(x, t) - r(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.3}$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{4.4}$$

В случае $\alpha = 1$ она в линейном приближении моделирует динамику вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта [4]. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Параметр $\chi \in \mathbb{R}$, как правило, характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu \in \mathbb{R}$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Через m, как и прежде, обозначено наименьшее натуральное число, не превосходимое числом $\alpha > 0$.

Пусть $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $A = \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [3]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, которая образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$ [3].

Учитывая уравнение несжимаемости (4.4), положим $\mathfrak{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$,

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi \Pi \Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}), \quad M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}). \tag{4.5}$$

Лемма 2. *Пусть $\chi, \nu \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, операторы L и M заданы формулами (4.5). Тогда оператор M $(L,0)$-ограничен, проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Возьмем в используемом в работе [2] операторе $Dw = \nu \nabla^2 w - (\tilde{v} \cdot \nabla) w - (w \cdot \nabla) \tilde{v}$ функцию $\tilde{v} \equiv 0$ и получим рассматриваемые операторы L и M. В [2, теорема 16] доказана (L,σ)-ограниченность оператора M и установлено, что M сильно $(L,0)$-радиален. Поэтому $H = \mathbb{O}$ и оператор M $(L,0)$-ограничен. Там же найдены проекторы, в формулах для которых с учетом сказанного выше надо заменить ΣD на νA. □

Так же, как для системы уравнений Соболева, с помощью теоремы 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. *При любых $v_k \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, существует единственное решение задачи (4.1)–(4.4), при этом оно имеет вид*

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k E_\alpha(t^\alpha \nu (I - \chi A)^{-1} A) v_k(x),$$

$$r(x,t) = \nu \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k E_\alpha(t^\alpha \nu (I - \chi A)^{-1} A) v_k(x).$$

Если $v_l \notin \mathbb{H}_\sigma$ при некотором $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, то задача (4.1)–(4.4) не имеет решения.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, при этом используется полученное в [2, теорема 16] выражение для оператора $R^L_\mu(M)$, которое в случае $\tilde{v} \equiv 0$ примет вид

$$R^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} (\mu I - \nu (I - \chi A)^{-1} A)^{-1} & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta (I - \chi A)^{-1} (\mu I - \nu (I - \chi A)^{-1} A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

□

Рассмотрим теперь случай $\chi^{-1} \in \sigma(A)$. Обозначим через $\mathbb{M}_0$ множество тех индексов k, для которых $\lambda_k = \chi^{-1}$, через $\mathbb{M}_1$ — множество $\mathbb{N} \setminus \mathbb{M}_0$.

Лемма 3. [1] *Пусть $\chi, \nu \neq 0$, $\chi^{-1} \in \sigma(A)$, операторы L и M заданы формулами (4.5). Тогда оператор M $(L,1)$-ограничен, проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\nu\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\chi\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\chi\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с видом проектора P вместо начальных условий (4.1) рассмотрим следующие условия

$$(1-\chi\Delta)\left(\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x,0) - v_k(x)\right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0,1,\ldots,m-1. \quad (4.6)$$

Теорема 5. *При любых $v_k \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, существует единственное решение задачи (4.2)–(4.4), (4.6), при этом оно имеет вид*

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{m-1} J_t^n \sum_{k\in\mathbb{M}_1} E_\alpha\left(\frac{t^\alpha\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)\langle v_k,\varphi_k\rangle\varphi_k(x),$$

$$r(x,t) = \nu\Pi\Delta \sum_{n=0}^{m-1} J_t^n \sum_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{E_\alpha\left(\frac{t^\alpha\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)}{1-\chi\lambda_k}\langle v_k,\varphi_k\rangle\varphi_k(x).$$

Если $v_l \notin \mathbb{H}_\sigma$ при некотором $l \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, то задача (4.2)–(4.4), (4.6) не имеет решения.

Доказательство. Условие (4.6) равносильно заданию начальных данных для проекций вектора скорости на собственные функции φ_k, не соответствующие собственному значению χ^{-1}. Из вида проектора P следует, что такое задание эквивалентно принадлежности начальных данных подпространству $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}P$.

Для получения вида решения воспользуемся полученной в работе [1, теорема 3] формулой

$$R^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\left(\mu-\frac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)} & \mathbb{O} \\ \Pi\Delta\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\nu\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(1-\chi\lambda_k)\left(\mu-\frac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k}\right)} - \chi\sum\limits_{k\in\mathbb{M}_0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k\right) & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

и теоремой 2. $\square$

Список литературы

1. Давыдов П. Н. Сильно вырожденная система уравнений Осколкова / П. Н. Давыдов, В. Е. Федоров // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. – 2014. – Вып. 34, № 5 (176). – С. 5–11.
2. Иванова Н. Д. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения / Н. Д. Иванова, В. Е. Федоров, К. М. Комарова // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Вып.13, № 26 (280). – С. 50–71.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 204 с.
4. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.
5. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – Т. 18, № 1. – С. 3–50.
6. Уразаева А. В. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А. В. Уразаева, В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2008. – Т. 44, № 8. – С. 1111–1119.
7. Федоров В. Е. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 71–83.
8. Федоров В. Е. Один класс вырожденных дробных эволюционных систем в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, А. Дебуш // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 12. – С. 1616–1622.
9. Федоров В. Е. Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров, Н. Д. Иванова // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. – Т. 8. .– Тр. второй междунар. шк.-конф. – Ч. I. Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. – С. 363–378 (http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf).
10. Balachandran K. Existence of solutions of abstract fractional integrodifferential equations of Sobolev type / K. Balachandran, S. Kiruthika // Computers and Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 64. – P. 3406–3413.
11. Li F. Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions / F. Li, J. Liang, H.-K. Xu // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – Vol. 391. – P. 510–525.
12. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht ; Boston : VSP, 2003. – 216+vii p.

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Челябинский государственный университет, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, тел.: (351)7997235 (e-mail: kar@csu.ru)

Гордиевских Дмитрий Михайлович, аспирант, кафедра математического анализа, Челябинский государственный университет, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, тел.: (351)7997235
(e-mail: dmitriy_g90@mail.ru)

D. M. Gordievskikh, V. E. Fedorov

Solutions for Initial Boundary Value Problems for Some Degenerate Equations Systems of Fractional Order with Respect to the Time

Abstract. Solvability theorem for the Cauchy problem to a degenerate linear evolution equation of fractional order in a Banach space is used for deriving of necessary and sufficient conditions of solvability for some arising in hydrodynamics equations systems of fractional order with respect to the time. Solutions forms for considered problems are obtained by means of functional calculus in the Banach algebra of linear bounded operators.

Keywords: fractional differential equation, Sobolev system of equations, Oskolkov system of equations, initial boundary value problem.

References

1. Davydov P. N., Fedorov V. E. Sil'no vyrozhdennaya sistema uravneniy Oskolkova (in Russian) [Strongly degenerate Oskolkov system of equations] *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Fizika* [Scientific Statements of Belgorod State University, Ser. Mathematics, Physics], 2014, no. 5 (176), issue 34, pp. 5-11.
2. Ivanova N. D., Fedorov V. E., Komarova K. M. Nelineynaya obratnaya zadacha dlya sistemy Oskolkova, linearizovannoy v okrestnosti statsionarnogo resheniya (in Russian) [Nonlinear inverse problem for Oskolkov system linearized in a neighborhood of a stationary solution]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Herald of Chelyabinsk State University, Mathematics, Mechanics, Informatics], 2012, no. 26 (280), issue 13, pp. 50-71.
3. Ladyzhenskaya O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Mathematics and Its Applications 2 (Revised Second ed.), New York–London–Paris–Montreux–Tokyo–Melbourne, Gordon and Breach, 1969.
4. Oskolkov A. P. Nachal'no-kraevye zadachi dlya uravneniy dvizheniya zhidkostey Kelvina–Voighta i zhidkostey Oldroyda (in Russian) [Initial Boundary Value Problems for Motion Equations of Kelvin–Voight and Oldroyd Fluids]. *Trudy Mat. Instituta AN SSSR* [Proceedings of Steklov Mathematics Institute of USSR Academy of Sciences], 1988, vol. 179, pp. 126-164.
5. Sobolev S. L. Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki (in Russian) [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Ser. matematicheskaya* [News of USSR Academy of Sciences, Ser. Mathematical], 1954, vol. 18, no. 1, pp. 3-50.
6. Urazaeva A. V., Fedorov V. E. Prediction-control problem for some systems of equations of fluid dynamics. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 8, pp. 1147-1156.
7. Fedorov V.E., Gordievskikh D.M. Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 60-70.
8. Fedorov V. E., Debbouche A. A class of degenerate fractional evolution systems in Banach spaces. *Differential Equations*, 2013, vol .49, no .12, pp. 1569-1576.

9. Fedorov V.E., Ivanova N.D. Nelineynaya evolyutsionnaya obratnaya zadacha dlya nekotorykh uravneniy sobolevskogo tipa (in Russian) [Nonlinear evolution inverse problem for some Sobolev type equations]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian electronical mathematical news], 2011, vol. 8, Trudy vtoroy mezhdunarodnoy shkoly-konferentsii [Proceedings of Second International School-Conference], part I «Teoriya i chislennye metody resheniya obratnykh zadach» [«Theory and numerical methods of inverse problem solving»], pp. 363-378 (http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf).
10. Balachandran K., Kiruthika S. Existence of solutions of abstract fractional integrodifferential equations of Sobolev type. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 64, pp. 3406-3413.
11. Li F., Liang J., Xu H.-K. Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 391, pp. 510-525.
12. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, Utrecht–Boston, VSP, 2003, 216+vii p.

Fedorov Vladimir Evgenyevich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, 129, Kashirin Brothers st., Chelyabinsk, 454001, tel.: (351)7997235 (e-mail: kar@csu.ru)

Gordievskikh Dmitriy Mikhaylovich, Postgraduate, Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, 129, Kashirin Brothers st., Chelyabinsk, 454001, tel.: (351)7997235 (e-mail: dmitriy_g90@mail.ru)