Серия «Математика»
2016. Т. 16. С. 3—18

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716
MSC 68R01

О максимальных клонах частичных ультрафункций на двухэлементном множестве

С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев
Бурятский государственный университет

Аннотация. Класс дискретных функций, определенных на конечном множестве A и принимающих в качестве значений подмножества множества A, является естественным обобщением класса конечнозначных функций на A (функций k-значной логики). Функции такого вида называют мультифункциями или мультиоперациями на A, и они находят применение, например при решении функциональных уравнений, в логических и технических системах. Очевидно, что суперпозиция в обычном смысле для работы с мультифункциями не подходит, поэтому для мультифункций требуется несколько расширить стандартное понятие суперпозиции. Отметим, что существуют различные способы определения операции суперпозиции мультифункций, один из таких способов рассматривается в этой работе. Мультифункции на A с данной суперпозицией называют частичными ультрафункциями на A.

В данной статье в качестве исходного множества A рассматривается двухэлементное множество и исследуется классическая для теории дискретных функций задача описания решетки так называемых клонов — множеств функций, замкнутых относительно операции суперпозиции и содержащих все функции-проекции. С помощью предикатного подхода нам удалось дать описание двух максимальных клонов частичных ультрафункций на двухэлементном множестве.

Ключевые слова: мультифункция, частичная ультрафункция, суперпозиция, максимальный клон, клон.

1. Основные понятия и определения

Пусть $A = \{0,1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^{\overline{*}} = \{f | f : A^n \to F\}, P_2^{\overline{*}} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{\overline{*}},$

$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}} \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}.$

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на A.

Для того чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m))$, где $f,f_1,\ldots,f_n \in P_2^{\overline{*}}$, определяла мультифункцию $g(x_1,\ldots,x_m)$, следуя [1; 5], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества A следующим образом: если $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in A^m$, то

$$g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$. Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1,\ldots,x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in F^n$.

Если мультифункции на A рассматриваются с данной суперпозицией, то их называют частичными ультрафункциями на A.

В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, частичную ультрафункцию будем называть просто функцией. Наборы с элементами из A будем называть двоичными.

Проекцией называется функция $e_n^i : (\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n) \to \{\alpha_i\}$.

Отметим, что в настоящей работе мы будем придерживаться терминологии, принятой в [4], что позволит нам не вводить дополнительных определений.

Клоном называется множество функций, замкнутое относительно суперпозиции, добавления и удаления несущественных переменных, содержащее все проекции.

Клон K называется максимальным, если не существует клона K_1 такого, что $K \subset K_1 \subset P_2^{\overline{*}}$. Заметим, что понятие максимального клона соответствует понятию предполного класса.

Для упрощения записи используется следующая кодировка: $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$, тогда $F' = \{*,0,1,-\}$.

Обозначим через $Pol(R)$ класс функций, сохраняющих предикат R.

2. Вспомогательные утверждения

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть функции $f,f_1,\ldots,f_s$ сохраняют предикат R^m, определенный на множестве F', функция $g(x_1,\ldots,x_n)$ есть суперпозиция $f(f_1,\ldots,f_s)$ и двоичные наборы $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^m),\ldots,(\alpha_n^1,\ldots,\alpha_n^m)$ принадлежат R^m. Тогда набор*

$$(g(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1),\ldots,g(\alpha_1^m,\ldots,\alpha_n^m))$$

принадлежит R^m.

Доказательство. Следует из того, что для любого двоичного набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ выполняется

$$g(\beta_1, \ldots, \beta_n) = f(f_1(\beta_1, \ldots, \beta_n), \ldots, f_s(\beta_1, \ldots, \beta_n)).$$

□

Введем в рассмотрение предикаты

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

Доказательства приведенных ниже лемм 2 и 3 полностью совпадают с доказательствами соответствующих утверждений из работы [4].

Лемма 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ сохраняет предикат R^m и переменная x_i несущественная. Тогда $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, полученная из f удалением несущественной переменной x_i, сохраняет предикат R^m.*

Лемма 3. *Пусть R^m – m-местный предикат и для любого набора $(\beta_1, \ldots, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_s}, \ldots, \beta_m)$ из R^m такого, что $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_s}$ и только они равны $*$, выполняется следующее условие: если набор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_s}, \ldots, \gamma_m)$ принадлежит R^m, то набор*

$$(\delta_1, \ldots, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_s}, \ldots, \delta_m),$$

где $\delta_j = *$ для $j \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ и $\delta_j = \gamma_j$ для остальных j, также принадлежит R^m. Тогда, если $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ сохраняет R^m, то $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, полученная из g добавлением несущественной переменной x_i, также сохраняет R^m.

Следствие 1. *Класс $Pol(R_1)$ замкнут относительно добавления и удаления несущественных переменных.*

Пусть наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1, 2, 3\}$ такие, что

$$(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^t \in R_1,$$

где $j \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $\tilde{\alpha}^{i,0}$ уточнение набора $\tilde{\alpha}^i$, в котором все значения – заменили на 0, а через $\tilde{\alpha}^{i,1}$ — уточнение набора $\tilde{\alpha}^i$, в котором все значения – заменили на 1. Заметим, что для любого уточнения $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^i$ двоичные наборы $(\tau_j, \alpha_j^{i,0}, \tau_j)^t$ и $(\alpha_j^{i,1}, \tau_j, \alpha_j^{i,1})^t$ принадлежат предикату R_1.

Лемма 4. *Пусть* $h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$, *где* $f, g_1,\ldots,g_m \in Pol(R_1)$, *наборы* $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, *где* $i \in \{1,2,3\}$ *такие, что* $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^t \in R_1$, *где* $j \in \{1,\ldots,n\}$. *Если для некоторого* k *имеем* $h(\tilde{\alpha}^k) = 0$, *то выполняются следующие условия:*

1) $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 0$;

2) $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) \in \{*, 0\}$, *причем если* $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 0$, *то для любого уточнения* $\tilde{\tau}$ *набора* $\tilde{\alpha}^k$ *имеем* $h(\tilde{\tau}) = 0$.

Доказательство. Оба условия докажем от противного.

1) Так как случай $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 1$ сразу невозможен, допустим, что $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) \in \{*, -\}$. Тогда существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\delta}) = 0$. Отсюда $h\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ *\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}\right\}$, противоречие лемме 1.

2) Так как случай $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 1$ также сразу невозможен, допустим, что $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = -$. Тогда существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\delta}) = 0$. Отсюда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\delta}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 0\\ -\end{pmatrix}$, противоречие лемме 1.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 0$ и найдется уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что выполняется $h(\tilde{\tau}) \in \{*, -\}$, тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ *\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}\right\}$, противоречие. □

Лемма 5. *Пусть* $h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$, *где* $f, g_1,\ldots,g_m \in Pol(R_1)$, *наборы* $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, *где* $i \in \{1,2,3\}$ *такие, что* $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^t \in R_1$, *где* $j \in \{1,\ldots,n\}$. *Если для некоторого* k *имеем* $h(\tilde{\alpha}^k) = 1$, *то выполняются следующие условия:*

1) $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) \in \{1, -\}$, *причем если* $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 1$, *то среди уточнений набора* $\tilde{\alpha}^k$ *нет таких, на которых значение функции* h *равно* $-$;

2) $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) \in \{*, 1\}$, *причем если* $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 1$, *то среди уточнений набора* $\tilde{\alpha}^k$ *нет таких, на которых значение функции* h *равно* $*$.

Доказательство. Оба утверждения докажем от противного.

1) Так как случай $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 0$ сразу невозможен, допустим, что $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = *$. Тогда существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\delta}) = 1$. Отсюда $h\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ *\\ 1\end{pmatrix}$, противоречие лемме 1.

Пусть $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 1$ и существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = -$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\\ -\end{pmatrix}$, противоречие лемме 1.

2) Так как случай $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 0$ также сразу невозможен, допустим, что $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = -$. Тогда существует уточнение $\tilde{\delta}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\delta}) = 1$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\delta}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\\ -\end{pmatrix}$, противоречие лемме 1.

Теперь пусть $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 1$ и найдется уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = *$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ *\\ 1\end{pmatrix}$, противоречие лемме 1. □

Лемма 6. *Пусть* $h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, *где* $f, g_1, \ldots, g_m \in Pol(R_1)$, *наборы* $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, *где* $i \in \{1, 2, 3\}$ *такие, что* $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^t \in R_1$, *где* $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Если для некоторого* k *имеем* $h(\tilde{\alpha}^k) = -$, *тогда совокупность значений* h *на всевозможных уточнениях набора* $\tilde{\alpha}^k$ *совпадает с одним из следующих вариантов:*

1) $\{-\}$;

2) $\{*, -\}$, *причем* $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = -$ *и* $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = *$;

3) $\{0, 1\}$, *причем* $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 0$ *и* $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 1$;

4) $\{*, 1, -\}$, *причем* $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = -$ *и* $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = *$;

5) $\{*, 0, 1\}$, *причем* $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 0$ *и* $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = *$.

Доказательство. Сначала докажем от противного, что совокупность значений h на всевозможных уточнениях набора $\tilde{\alpha}^k$ не совпадает ни с одним из отставшихся вариантов: а) $\{*, 0, -\}$, б) $\{0, 1, -\}$, в) $\{*, 0, 1, -\}$.

а) Пусть совокупностью значений функции h на всевозможных уточнениях набора $\tilde{\alpha}^k$ является $\{*, 0, -\}$.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 0$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 0\\ -\end{pmatrix} \notin R_1$, где $\tilde{\tau}$ — уточнение набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = -$, противоречие лемме 1.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) \in \{-, *\}$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ *\\ 0\end{matrix}\right\} \notin R_1$, где $\tilde{\tau}$ — уточнение набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 0$, противоречие лемме 1.

б) Пусть совокупностью значений функции h на всевозможных уточнениях набора $\tilde{\alpha}^k$ является $\{0, 1, -\}$.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 0$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 0\\ -\end{pmatrix} \notin R_1$, где $\tilde{\tau}$ — уточнение набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = -$, противоречие лемме 1.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) \in \{1, -\}$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ 1\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}\right\} \notin R_1$, где $\tilde{\tau}$ — уточнение набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 0$, противоречие лемме 1.

в) Пусть совокупностью значений функции h на всевозможных уточнениях набора $\tilde{\alpha}^k$ является $\{*, 0, 1, -\}$.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 0$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 0\\ -\end{pmatrix} \notin R_1$, где $\tilde{\tau}$ — уточнение набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = -$, противоречие лемме 1.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) \in \{1, -, *\}$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\-\\0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ *\\0\end{matrix}\right\} \notin R_1$, где $\tilde{\tau}$ — уточнение набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 0$, противоречие лемме 1.

Далее от противного докажем справедливость вариантов 2)–5). В каждом случае получим противоречие с леммой 1.

2) Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = *$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = -$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ *\\ -\end{pmatrix} \notin R_1$, противоречие.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = -$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = *$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ *\\ -\end{pmatrix} \notin R_1$, противоречие.

3) Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) = 1$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 0$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \notin R_1$, противоречие.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) = 0$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 1$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \notin R_1$, противоречие.

4) Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) \in \{*, 1\}$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = -$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}-\\ *\\ -\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ 1\\ -\end{matrix}\right\} \notin R_1$, противоречие.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) \in \{1, -\}$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = *$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}1\\ *\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ *\\ -\end{matrix}\right\} \notin R_1$, противоречие.

5) Если $h(\tilde{\alpha}^{k,0}) \in \{*, 1\}$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 0$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ *\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ 1\\ 0\end{matrix}\right\} \notin R_1$, противоречие.

Если $h(\tilde{\alpha}^{k,1}) \in \{0,1\}$, то существует уточнение $\tilde{\tau}$ набора $\tilde{\alpha}^k$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = *$. Тогда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{k,1}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{k,1}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0 & & 1\\ * & , & *\\ 0 & & 1\end{matrix}\right\} \notin R_1$, противоречие. □

Лемма 7. *Пусть* $h(x_1,\dots,x_n) = f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$, *где* $f, g_1,\dots,g_m \in Pol(R_1)$, *наборы* $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i,\alpha_2^i,\dots,\alpha_n^i)$, *где* $i \in \{1,2,3\}$ *такие, что* $(\alpha_j^1,\alpha_j^2,\alpha_j^3)^t \in R_1$, *где* $j \in \{1,\dots,n\}$. *Если для некоторого* k *имеем* $h(\tilde{\alpha}^k) = *$, *то на всех уточнениях набора* $\tilde{\alpha}^k$ *значение функции* h *равно* $*$.

Доказательство. Следует из определения суперпозиции. □

Лемма 8. *Следующие множества совпадают с* $P_2^{\overline{*}}$:
1) $[\{(1*),(1-)\}]$; *2)* $[\{(*0),(-0)\}]$;
3) $[\{(0-),(-1),(0*)\}]$; *4)* $[\{(0-),(-1),(*0)\}]$.

Доказательство. Пункты 1) и 2) доказаны в [2].

3) Множество $\{(0-),(-1),(0*)\}$ сведем к $\{(1*),(1-)\}$.

Из функции (-1) получим константу 1: $\begin{array}{c}-\\1\end{array}\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. С помощью константы 1 получим функции $(1*)$ и $(--)$: $\begin{array}{c}1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ *\end{pmatrix}$, $\begin{array}{c}0\\-\end{array}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$.

И далее $\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}- & 0\\ - & *\\ 1 & 0\\ 1 & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\ *\\ 1\\ *\end{pmatrix}$; $\begin{array}{c}-\\ *\\ 1\\ *\end{array}\begin{pmatrix}- & 0\\ - & 0\\ - & -\\ - & -\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-\\-\end{pmatrix}$.

4) Множество $\{(0-),(-1),(*0)\}$ сведем к $\{(*0),(-0)\}$.

Из функции (-1) получим константу 1: $\begin{array}{c}-\\1\end{array}\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. С помощью константы 1 получим $(--)$: $\begin{array}{c}0\\-\end{array}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$.

И далее $\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\begin{pmatrix}0 & *\\ - & *\\ 0 & 0\\ - & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ 0\\ -\end{pmatrix}$; $\begin{array}{c}*\\ *\\ 0\\ -\end{array}\begin{pmatrix}- & -\\ - & -\\ 1 & -\\ 1 & -\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix}$. □

Лемма 9. *Верно, что* $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}] = P_2^{\overline{*}}$, *где* $f \in \{(0-),(10),(1-),(-0),(*0),(*1),(*-),(000*),(0001),(---1),(---*)\}$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функции $(00),(01),(0*)$, (11), $(1*),(-1),(--),(-*),(**)$, (0111), (-111) сохраняют предикат R_1.

В силу того, что $\begin{array}{c}-\\1\end{array}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}$ и $\begin{array}{c}-\\0\end{array}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$ справедливость утверждения при $f \in \{(0-),(10),(1-),(-0)\}$ следует из леммы 8.

Если $f = (\ast 0)$, то следующая последовательность суперпозиций приведет к функции $(0-)$: $\begin{matrix}\ast\\ \ast\\ 0\\ 0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ast\\0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&\ast\\0&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ast\\0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}\ast\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\1&0\\-&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-\\1\end{pmatrix}$;
$\begin{matrix}1\\1\\-\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\-&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\\-\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}0\\0\\ \ast\\ \ast\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\1&0\\-&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \ast\\0\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&\ast\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \ast\\1\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}0\\0\\ \ast\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix}$.

Если $f \in \{(\ast 1), (\ast -)\}$, то применяя операцию суперпозиции к функциям (00) и f получим функцию $(\ast 0)$.

Если $f = (000\ast)$, то можно получить функцию (-0):
$\begin{matrix}0\\0\\1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\1&\ast\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\ \ast\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}0\\0\\1\\ \ast\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&1\\-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\0\\0\end{pmatrix}$. Если $f = (0001)$, то $\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-\\0&-\\1&-\\1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\\-\end{pmatrix}$.

Если $f \in \{(---1), (---\ast)\}$, то $\begin{matrix}0\\0\\ \ast\\ \ast\end{matrix}\begin{pmatrix}-&0\\-&0\\-&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \ast\end{pmatrix}$ и $\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-\\0&-\\0&-\\0&\ast\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \ast\end{pmatrix}$.

□

3. Описание максимальных клонов

В [5] описаны два максимальных клона частичных ультрафункций на конечном множестве. В этом разделе с помощью отношения сохранения предиката функцией получено описание двух новых максимальных клонов частичных ультрафункций на двухэлементном множестве.

Теорема 1. *Класс $Pol(R_1)$ является клоном.*

Доказательство. По следствию 1 класс $Pol(R_1)$ замкнут относительно добавления и удаления несущественных переменных, и очевидно, что функция $e_1^2 = (01)$ сохраняет R_1. Таким образом, остается доказать, что класс $Pol(R_1)$ замкнут относительно суперпозиции. От противного.

Пусть

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n) \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)),$$

где $f, g_1, \dots, g_m$ — произвольные функции из класса $Pol(R_1)$.

Допустим, существуют наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, такие, что $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^t \in R_1$ для любого j, но $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} \notin R_1$, т. е. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix}$

должен совпадать с одним из следующих столбцов: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\-\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mu\\\eta\\*\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mu\\*\\\eta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}*\\\mu\\\eta\end{pmatrix}$, где $\mu,\eta\in\{0,1,-\}$.

Отметим, что наборы $\tilde{\alpha}^i=(\alpha_1^i,\dots,\alpha_n^i)$, где $i\in\{1,2,3\}$, не содержат $*$, иначе набор $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\\tilde{\alpha}^2\\\tilde{\alpha}^3\end{pmatrix}\in R_1$. Так как перестановка строк R_1 не меняет его, достаточно рассмотреть случаи, когда $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\\tilde{\alpha}^2\\\tilde{\alpha}^3\end{pmatrix}$ совпадает с одним из столбцов: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\\1\\-\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mu\\\eta\\*\end{pmatrix}$, где $\mu,\eta\in\{0,1,-\}$.

Рассмотрим все варианты. Всюду получаем противоречие лемме 1.

I. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\\tilde{\alpha}^2\\\tilde{\alpha}^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. В силу лемм 4, 5 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\\tilde{\alpha}^{2,0}\\\tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix}\in\left\{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix},\begin{matrix}0\\0\\-\end{matrix}\right\}$, противоречие.

II. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\\tilde{\alpha}^2\\\tilde{\alpha}^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}$. 1. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$ или $-$. Тогда в силу лемм 4, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\\tilde{\alpha}^{2,0}\\\tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}\notin R_1$, противоречие.

2. Допустим, на любом уточнении $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение 0 или 1. В силу лемм 4, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\\tilde{\alpha}^{2,1}\\\tilde{\alpha}^{3,1}\end{pmatrix}\in\left\{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix},\begin{matrix}0\\*\\1\end{matrix}\right\}$, противоречие.

3. Допустим, на любом уточнении $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 1 или $-$. В силу лемм 4, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\\tilde{\alpha}^{2,0}\\\tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\end{pmatrix}$, противоречие.

4. Допустим, на любом уточнении $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 0 или 1. Тогда по лемме 4 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\\tilde{\delta}\\\tilde{\tau}\end{pmatrix}\in\left\{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix},\begin{matrix}0\\*\\1\end{matrix},\begin{matrix}0\\-\\1\end{matrix}\right\}$, где $\tilde{\tau}$ –

уточнение набора $\tilde{\alpha}^3$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 1$, а $\tilde{\delta}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^2$, при котором для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ двоичный набор $(\alpha_i^{1,0}, \delta_i, \tau_i)^t \in R_1$. Противоречие.

III. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -\end{pmatrix}$. 1. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$ или $-$. В силу лемм 4, 5, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ 1\\ -\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ -\end{matrix}\right\}$. Противоречие.

2. Допустим, на любом уточнении $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение 0 или 1. В силу лемм 4, 5, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ 1\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}\right\}$. Противоречие.

3. Допустим, на любом уточнении $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 1 или $-$. В силу лемм 4, 5, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ 1\\ -\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ -\end{matrix}\right\}$. Противоречие.

4. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 0 или 1. В силу лемм 4, 5, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ 1\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}\right\}$. Противоречие.

IV. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\\ -\end{pmatrix}$. 1. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^2$ функция h принимает значение $*$ или $-$. Тогда в силу лемм 4, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ -\end{matrix}\right\}$. Противоречие.

2. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^2$ функция h принимает значение 0 или 1. Если среди уточнений набора $\tilde{\alpha}^3$ нет таких, на которых значение функции h равно 0, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\end{pmatrix}$, противоречие. Если же среди уточнений набора $\tilde{\alpha}^3$ имеются такие, на которых значение функции h равно 0, то возможны два случая:

а) $h(\tilde{\alpha}^{3,1}) = 1$. В силу лемм 4, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{1,1}\\ \tilde{\alpha}^{3,1}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ *\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ 0\\ 1\end{matrix}\right\}$, противоречие.

б) $h(\tilde{\alpha}^{3,1}) = *$. Аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,1}\\ \tilde{\alpha}^{3,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\ *\end{pmatrix}$, противоречие.

3. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^2$ функция h принимает значение $*$, 1 или $-$. Аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ -\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ -\\ -\end{matrix}\right\}$, противоречие.

4. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^2$ функция h принимает значение $*$, 0 или 1.

а) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$ или $-$, то в силу лемм 4, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ -\end{pmatrix}$, противоречие.

б) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение 0 или 1, то аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{1,1}\\ \tilde{\alpha}^{3,1}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0\\ *\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ 0\\ 1\end{matrix}\right\}$, противоречие.

в) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 1 или $-$, то аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ -\end{pmatrix}$, противоречие.

г) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 0 или 1, то аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}*\\ 0\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ 0\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ 0\\ 1\end{matrix}\right\}$, где $\tilde{\tau}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^3$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 1$, а $\tilde{\delta}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^1$, при котором для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ двоичный набор $(\delta_i, \alpha_i^{2,0}, \tau_i)^t$ принадлежит R_1. Противоречие.

V. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1}\\ \tilde{\alpha}^{2}\\ \tilde{\alpha}^{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\1\\ -\end{pmatrix}$. 1. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^1$ функция h принимает значение $*$ или $-$.

а) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$ или $-$, то в силу лемм 4, 6 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\tau}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}-\\ 1\\ *\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ 1\\ -\end{matrix}\right\}$, где $\tilde{\tau}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^2$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 1$, а $\tilde{\delta}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^3$, при котором для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ двоичный набор $(\alpha_i^{1,0}, \tau_i, \delta_i)^t$ принадлежит R_1. Противоречие.

б) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение 0 или 1, то аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}-\\ 1\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ -\\ 0\end{matrix}\right\}$. Противоречие.

в) Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 1 или $-$. Теперь используем лемму 5.

Если $h(\tilde{\alpha^{2,0}}) = 1$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\\ -\end{pmatrix}$ по лемме 6. Противоречие.

Если же $h(\tilde{\alpha^{2,0}}) = -$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\delta}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}- \\ * \\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}- \\ - \\ 1\end{matrix}\right\}$, где $\tilde{\tau}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^3$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 1$, а $\tilde{\delta}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^1$, при котором для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ двоичный набор $(\alpha_i^{2,0}, \delta_i, \tau_i)^t$ принадлежит R_1. Противоречие.

г) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 0 или 1, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}- \\ 1 \\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}- \\ - \\ 0\end{matrix}\right\}$ по лемме 6, противоречие.

2. Допустим, на любом уточнении $\tilde{\alpha}^1$ функция h принимает значение 0 или 1. Аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0 \\ 1 \\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0 \\ 1 \\ -\end{matrix}, \begin{matrix}0 \\ - \\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0 \\ - \\ -\end{matrix}\right\}$, противоречие.

3. Допустим, на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^1$ функция h принимает значение $*$, 1 или $-$.

а) Допустим, на любых уточнениях набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$ или $-$. Теперь используем лемму 5.

Если $h(\tilde{\alpha^{2,0}}) = 1$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\\ -\end{pmatrix}$ по лемме 6, противоречие.

Если же $h(\tilde{\alpha^{2,0}}) = -$, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\tau}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}1 \\ - \\ *\end{matrix}, \begin{matrix}1 \\ - \\ -\end{matrix}\right\}$, где $\tilde{\tau}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^1$ такое, что $h(\tilde{\tau}) = 1$, а $\tilde{\delta}$ – уточнение набора $\tilde{\alpha}^3$, при котором для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ двоичный набор $(\tau_i, \alpha_i^{2,0}, \delta_i)^t$ принадлежит R_1. Противоречие.

б) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение 0 или 1, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}- \\ 1 \\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}- \\ - \\ 0\end{matrix}\right\}$ по лемме 6, противоречие.

в) Допустим, на любых уточнениях набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 1 или $-$.

в1) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^2$ функция h принимает значение 1, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\\ -\end{pmatrix}$ по лемме 6, противоречие.

в2) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^2$ функция h принимает значение $*$ или 1, то $h(\alpha^{\tilde{2},0}) = 1$ и $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\\ -\end{pmatrix}$ по лемме 5, противоречие.

в3) Если на любом уточнении $\tilde{\alpha}^2$ функция h принимает значение 1 или $-$, то $h(\alpha^{\tilde{2},1}) = 1$ и $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,1}\\ \tilde{\alpha}^{3,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ 1\\ *\end{pmatrix}$ по лемме 5, противоречие.

г) Если на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}^3$ функция h принимает значение $*$, 0 или 1, то $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}- & & -\\ 1 & , & -\\ 0 & & 0\end{matrix}\right\}$ по леммам 5, 6. Противоречие.

4. Допустим, на любых уточнениях набора $\tilde{\alpha}^1$ функция h принимает значение $*$, 0 или 1. Аналогично, $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix}0 & & 0 & & 0 & & 0\\ 1 & , & 1 & , & - & , & -\\ 0 & & - & & 0 & & -\end{matrix}\right\}$, противоречие.

VI. $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1}\\ \tilde{\alpha}^{2}\\ \tilde{\alpha}^{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\ \eta\\ *\end{pmatrix}$, где $\mu, \eta \in \{0, 1, -\}$. Тогда в силу лемм 4, 5, 6, 7 имеем $h\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\\ *\end{pmatrix}$, где $\gamma, \delta \in \{0, 1, -\}$, противоречие. □

Теорема 2. *Клон $Pol(R_1)$ является максимальным.*

Доказательство. Покажем, что множество $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]$ совпадает с $P_2^{\overline{*}}$, где f не сохраняет предикат R_1. В силу того, что перестановка строк в предикате R_1 не меняет его, достаточно рассмотреть случаи, когда $f\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & -\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & -\end{pmatrix}$ будет равен одному из следующих вариантов: I) $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, II) $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\end{pmatrix}$, III) $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -\end{pmatrix}$, IV) $\begin{pmatrix}0\\ -\\ -\end{pmatrix}$, V) $\begin{pmatrix}-\\ -\\ 1\end{pmatrix}$ и VI) $\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\\ *\end{pmatrix}$, где $\mu, \eta \in \{0, 1, -\}$.

I. $f\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & -\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & -\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. Тогда $f(00000----) = 0$ и $f(01111111-) \in \{*, 1\}$, иначе получим $f\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & -\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-\\ 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}*\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ и $f\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & -\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\ -\end{pmatrix}\right\}$, по лемме 9 имеем $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

Но тогда $f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-&-&-&-\\0&0&1&1&1&1&1&-&-\\0&1&0&1&1&1&-&1&-\\0&1&1&1&1&1&1&1&-\end{pmatrix}$ равен $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\*\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. По лемме 9 имеем $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

II–IV. $f\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&1&-&-\\0&1&0&1&1&1&-&1&-\\0&1&1&0&1&-&1&1&-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{matrix}0\\0\\-\end{matrix},\begin{matrix}0\\1\\-\end{matrix},\begin{matrix}0\\-\\-\end{matrix}\right\}$.

Если $f(00000----)\in\{*,1,-\}$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-&-&-&-\\0&0&1&1&1&1&1&-&-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}\right\}$, а в случае $f(00000----)=0$ получим, что $f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-&-&-&-\\0&1&1&0&1&-&1&1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$. По лемме 9 $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

V. $f\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&1&-&-\\0&1&0&1&1&1&-&1&-\\0&1&1&0&1&-&1&1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\1\end{pmatrix}$. Тогда $f(00000----)=-$, иначе $f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-&-&-&-\\0&1&1&0&1&-&1&1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}$ и $f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-&-&-&-\\0&0&1&1&1&1&1&-&-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}\right\}$, по лемме 9 имеем $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

Если $f(01111111-)\in\{0,-\}$, то получаем $f\begin{pmatrix}0&1&1&0&1&-&1&1&-\\0&1&1&1&1&1&1&1&-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}\right\}$, по лемме 9 имеем $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

Тогда $f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-&-&-&-\\0&0&1&1&1&1&1&-&-\\0&1&0&1&1&1&-&1&-\\0&1&1&1&1&1&1&1&-\end{pmatrix}$ равен $\begin{pmatrix}-\\-\\-\\*\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}-\\-\\-\\1\end{pmatrix}$, по лемме 9 имеем $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

VI. $f\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&1&-&-\\0&1&0&1&1&1&-&1&-\\0&1&1&0&1&-&1&1&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\\eta\\*\end{pmatrix}$, где $\mu,\eta\in\{0,1,-\}$.

Тогда $f(00000----)=\alpha$ и $f(01111111-)=*$, где $\alpha\in\{0,1,-\}$. Действительно, если $f(00000----)=*$, то $f\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-&-&-&-\\0&0&1&1&1&1&1&-&-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}*\\-\end{pmatrix}\right\}$, по лемме 9 имеем $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

В случае $f(01111111-)\in\{0,1,-\}$, то имеем $f\begin{pmatrix}0&1&1&0&1&-&1&1&-\\0&1&1&1&1&1&1&1&-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}*\\-\end{pmatrix}\right\}$, по лемме 9 $[Pol(R_1)\bigcup\{f\}]=P_2^{\overline{*}}$.

Следовательно, $f\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&-&-&-&- \\ 0&0&1&1&1&1&1&-&- \\ 0&1&0&1&1&1&-&1&- \\ 0&1&1&1&1&1&1&1&- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \\ \eta \\ * \end{pmatrix}$, где $\alpha, \mu, \eta \in \{0, 1, -\}$.

Отсюда получаем $\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ - \end{matrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \mu & 0 \\ \eta & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ * \end{pmatrix}$, по лемме 9 $[Pol(R_1) \bigcup \{f\}] = P_2^{\overline{*}}$.

□

Следствие 2. *Класс $Pol(R_2)$ является максимальным клоном.*

Доказательство. В силу двойственности предикатов R_1 и R_2. □

Список литературы

1. Бадмаев С. А. Минимальные частичные ультраклоны на двухэлементном множестве / С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 9. – С. 3–9.
2. Бадмаев С. А. О полных множествах частичных ультрафункций на двухэлементном множестве / С. А. Бадмаев // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2015. – № 3. – С. 61–67.
3. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2009. – № 2 (68). – С. 60–79.
4. Пантелеев В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, № 3. – С. 95–114.
5. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах / В. И. Пантелеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 46–53.

Бадмаев Сергей Александрович, аспирант, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а тел.: (3012)219757
(e-mail: badmaevsa@mail.ru)

Шаранхаев Иван Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а тел.: (3012) 219757 (e-mail: goran5@mail.ru)

S. A. Badmaev, I. K. Sharankhaev

On Maximal Clones of Partial Ultrafunctions on a Two-Element Set

Abstract. Class of discrete functions from a finite set A to set of all subsets of A is a natural generalization of the class of many-valued functions on A (k-valued logic functions). Functions of this type are called multifunctions or multioperations on A, and are used, for example, in the solution of the functional equations, in logical and technical systems. It is obvious that the superposition in the usual sense not appropriate for multifunctions, therefore, we need to expand the standard concept of superposition. We note there are various ways to determine the operation of superposition of multifunctions, one of such methods is considered in this paper. Multifunctions on A with this superposition are called partial ultrafunctions on A. In this article starting set A is two-element set and we consider classical problem of theory of discrete functions – description of clones – sets of functions closed with respect to the operation of superposition and containing all the projections. We got a description of the two maximal clones of partial ultrafunctions of a two-element set by the predicate approach.

Keywords: multifunction, partial ultrafunction, superposition, clone, maximal clone.

References

1. Badmaev S.A., Sharankhaev I.K. Minimal Partial Ultraclones on a Two-element Set (in Russian). *Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2014, vol. 9, pp. 3-9.
2. Badmaev S.A. On Complete Sets of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set (in Russian). *Vestnik Buryat. Gos. Univ. Matem., Inform.*, 2015, no 3, pp. 61-67.
3. Panteleyev V.I. Completeness Criterion for Incompletely Defined Boolean Functions (in Russian). *Vestnik Samar. Gos. Univ. Est.-Naush. Ser.*, 2009, vol. 2, no 68, pp. 60-79.
4. Panteleyev V.I. Completeness Criterion for Sub-defined Partial Boolean Functions (in Russian). *Vestnik Novosibir. Gos. Univ. Ser.: Matem., Mechan., Inform.*, 2009, vol. 9, no 3, pp. 95-114.
5. Panteleyev V.I. On Two Maximal Multiclones and Partial Ultraclones (in Russian). *Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no 4, pp. 46-53.

Badmaev Sergey Alexandrovich, Postgraduate, Buryat State University, 24a, Smolin st., Ulan-Ude, 670000 tel.: (3012)219757 (e-mail: `badmaevsa@mail.ru`)

Sharankhaev Ivan Konstantinovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Buryat State University, 24a, Smolin st., Ulan-Ude, 670000 tel.: (3012)219757 (e-mail: `goran5@mail.ru`)