Серия «Математика»
2016. Т. 16. С. 102—116

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.54
MSC 20K01

О периодической группе Шункова, насыщенной конечными простыми группами лиева типа ранга 1 *

А. А. Шлепкин
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Понятие насыщенности группы G заданным множеством групп X является естественным обобщением понятия локального покрытия (в классе локально конечных групп) на класс периодических групп. Локально конечная группа, обладающая локальным покрытием, состоящим из конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является группой лиева типа над подходящим локально конечным полем. Группой Шункова называется группа, в которой любая пара сопряженных элементов порождает конечную подгруппу с сохранением этого свойства при переходе к фактор-группам по конечным подгруппам. Группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X. В работе решена проблема строения периодических групп Шункова, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество, состоящие из конечных простых групп Сузуки, Ри, унитарных, проективных специальных линейных групп лиева типа ранга 1. Доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем. Получено описание силовской 2-подгруппы периодической группы, насыщенной группами из множества групп $\mathfrak{M}$, что является необходимым шагом при установлении структуры произвольной периодической группы с данным насыщающим множеством.

Ключевые слова: периодическая группа, группа Шункова, насыщенность группы множеством групп.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-31-50030 и в рамках государственного задания министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2014 году, задание № 1.1462.2014/K

1. Введение

Группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [3].

Группы с условием насыщенности изучались В. Д. Мазуровым [5], Л. С. Казариным [10] и Б. Амбергом [10].

В первоначальных исследованиях периодических групп с условием насыщенности предполагалось, что X — некоторое множество конечных простых неабелевых групп. Это привело к постановке вопроса 14.101 в Коуровской тетради [2]:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа конечного ранга?

В настоящей работе представлен результат, являющейся важным шагом для получения полного решения приведенного вопроса 14.101 из Коуровской тетради.

Группами лиева типа ранга 1 над полем Q являются следующие группы:

$$A_1(Q),^2 B_2(Q),^2 G_2(Q),^2 A_2(Q).$$

Пусть Q — конечное поле. Имеют место следующие изоморфизмы:

$$A_1(Q) \simeq L_2(q), |Q| = q;$$
$$^2A_2(Q) \simeq U_3(q), |Q| = q;$$
$$^2B_2(Q) \simeq Sz(2^{2n+1}), |Q| = 2^{2n+1};$$
$$^2G_2(Q) \simeq Re(3^{2n+1}), |Q| = 3^{2n+1}.$$

Положим

$$\mathfrak{M} = \{L_2(q), U_3(q), Sz(2^{2n+1}), Re(3^{2n+1})\},$$

где q, n не фиксируются (в случае $L_2(q), q > 3$), тогда $\mathfrak{M}$ — множество всех конечных простых групп лиева типа ранга 1.

В данной работе доказана следующая

Теорема. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна простой группе лиева типа ранга* 1 *над подходящим локально конечным полем.*

Под символом e в данной работе будет пониматься единица группы.

2. Известные факты и определения

Определение 1. *Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу* [3].

Определение 2. *Пусть G – группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 – единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.*

Предложение 1. *Периодическая группа Шункова G, в которой все конечные подгруппы абелевы, есть абелева группа.*

Доказательство. Действительно, пусть a — произвольный элемент конечного порядка из G. Предположим, что $|a|$ — простое число. Тогда $\langle a, a^g \rangle$ — конечная абелева группа для любого $g \in G$. Следовательно, $N_1 = \langle a^g | g \in G \rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G. В силу произвольного выбора a как элемента простого порядка, получим, что все элементы простых порядков из G порождают абелеву нормальную подгруппу N_2 группы G, и более того, любой элемент из N_2 перестановочен с любым элементом $g \in G$. Очевидно, $N_2 \leq Z(G)$, значит группа $\overline{G} = G/N_2$ — группа Шункова. Ясно, что для $\overline{G}$ условие предложения выполняется. Используя индукцию по порядку a, получаем, что G – абелева группа. □

Предложение 2. *Пусть G — группа Шункова, насыщенна группами из множества $\{L_2(p^n)\}$. Тогда $G \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q* [6].

Предложение 3. *Пусть G — группа Шункова, насыщена группами из множества $\{ U_3(p^n) |\ p$ — нефиксированное простое, n — нефиксированное натуральное число $\}$. Тогда $G \simeq U_3(P)$, где P — локально конечное поле* [9].

Предложение 4. *Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми группами, и в любой её конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $J_1, L_2(Q), Re(Q), U_3(Q), Sz(Q)$ для подходящих локально конечных полей Q* [7].

Предложение 5. *Пусть $U = U_3(q)$, где $q = p^n$, и p – нечетное простое число. Тогда выполняются следующие свойства:*

1. *U содержит подгруппу $D = D_1 \times D_2$, где $D_1 = \langle d_1 \rangle$, $D_2 = \langle d_2 \rangle$,*

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix},\ d_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

β – элемент порядка $q+1$ из $GF(q^2)$, $|D_1| = q+1$ и $|D_2| = \frac{q+1}{(3,q+1)}$.

2. *U содержит подгруппу $V = \langle b,\ w | b^3 = w^2 = e,\ b^w = b^{-1} \rangle$, где*

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *U содержит подгруппы $A = \langle i \rangle \times \langle j \rangle$ и $B = \langle w \rangle \times \langle j \rangle$, где w – инволюция, определенная в пункте 2,*

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_1 \rangle$,

$$j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_2 \rangle$. A – четверная группа, $N_U(A) = C_U(A) \leftthreetimes V$, квадраты элементов из $N_G(A)$, порядок которых не равен трем, содержатся в $C_U(A)$ и $C_U(A) = D$.

4. *$N_U(D) = N_U(A) = D \leftthreetimes V$.*

5. *Существует $v \in U$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, где i, j, w определены в пунктах 2, 3.*

6. *Если $q+1$ не делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы U изоморфна полудиэдральной группе $SD(m) = \{a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = e,\ a^b = a^{-1+2^m}\}$, где 2^m делит $q-1$, 2^{m+1} не делит $q-1$.*

7. *Если $q+1$ делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы U изоморфна сплетённой группе $W_r(m) = \{a_1,\ a_2,\ b \mid a_1^{2^m} = a_2^{2^m} = b^2 = e,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\}$, где 2^m делит $q+1$, 2^{m+1} не делит $q+1$.*

8. *Все четверные подгруппы из U сопряжены, U содержит элемент порядка 8, и любая 2-подгруппа из U, порядка не менее 32, содержит элемент порядка 8.*

9. *Если $q \neq 5$, то $U = \langle N_U(A), N_U(B) \rangle$. Если $q = 5$, то*

$$\langle N_U(A), N_U(B) \rangle \simeq A_7.$$

Здесь A, B – группы, определенные в пункте 3.

Доказательство. Свойства 1–8 хорошо известны. Свойство 9 вытекает из списка максимальных подгрупп в U (см. [11, стр. 379]). □

3. Доказательство теоремы

Предположим обратное, и пусть G — контрпример.

Лемма 1. *Пусть периодическая группа R насыщенна группами из множества $\mathfrak{M}$, тогда силовская 2-подгруппа S группы R одного из следующих видов:*

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1} \rangle$ *— полудиэдральная группа (S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(q)$, где $q = 1 mod 4$.)*

2. $S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e, a^w = b, ab = ba \rangle$ *— сплетенная 2-группа.(S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(q)$, где $q = -1 \ (mod\ 4)$.)*

3. S *— конечная элементарная абелева 2-группа ранга не менее трех.*

4. S *— группа диэдра.*

5. S *изоморфна силовской 2-подгруппе группы $Sz(2^{n+1})$ для подходящего n.*

6. S *изоморфна силовской 2-подгруппе группы $U_3(2^n)$ для подходящего n.*

7. S *— бесконечная группа периода не более 4, и все инволюции из S лежат в $Z(S)$.*

8. $S = \tilde{S}K$, *где $\tilde{S}$ — полная абелева 2-группа ранга не более 2, K — группа порядка не более 2.*

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 1 из [9].

□

Положим
$\mathfrak{N} = \{L_2(2^n); Re(3^{2n+1}); U_3(2^{2n}); Sz(2^{2n+1}); L_2(q), q = 3, 5 \ (mod\ 8)\}$,
$\mathfrak{A} = \{L_2(q), q$ — нечетно и $q \neq 3, 5 \ (mod\ 8)\}$,
$\mathfrak{B} = \{U_3(q), q$ — нечетно$\}$.

Лемма 2. *Для $\mathfrak{M}(1)$ возможны только следующие взаимоисключающие случаи:*

(A) $\mathfrak{M}(1) \subseteq \mathfrak{N}(1)$.

(B) $\mathfrak{M}(1) \subseteq \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1)$, *где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$.

(C) $\mathfrak{M}(1) \subseteq \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где* $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, *и существует такой* $X \in \mathfrak{N}(1)$, *что для любого* $Y \in \mathfrak{B}(1)$, $X \nsubseteq Y$.

(D) $\mathfrak{M}(1) \subseteq \mathfrak{N}(1) \cup (\mathfrak{B}(1) \cup \mathfrak{A}(1))$, *где* $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, *и существуют такие* $X \in \mathfrak{A}(1), Z \in \mathfrak{N}(1)$, *что* X, Z *не являются подгруппами* Y *ни для какого* $Y \in \mathfrak{B}(1)$.

Доказательство. Несложное следствие определения множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. □

Дальнейшее доказательство теоремы проведем отдельно для каждого из случаев перечисленных в лемме 2.

Доказательство теоремы для случая (A)

Для данного случая теорема доказана по предложению 4.

Доказательство теоремы для случая (B)

Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Рассмотрим ситуацию когда S — конечная группа. Тогда S — одного из видов 1–6, указанных в лемме 1.

Так как $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, то S содержит конечную группу диэдра порядка более 4, следовательно, S не может быть вида 3, 5, 6. Если S — вида 1 или 2, то $\mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1)$ содержит $X \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q, что невозможно. Следовательно, для любого $X \in \mathfrak{M}(1), X \simeq L_2(q)$. По предложению 5 $G \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда некоторая S — бесконечная группа. Тогда все силовские 2-подгруппы из G бесконечны. Поскольку $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, то всегда найдется S вида 8. Предположим, что в G найдется силовская 2-подгруппа S_1 вида 7. Можно считать, что $|S \cap S_1|$ больше любого наперед заданного числа. Последнее означает, что $S \cap S_1$ содержит элемент порядка 8 , что невозможно, поскольку S_1 — периода 4 . Таким образом, G не может содержать силовских 2-подгрупп вида 7. Следовательно, для любого $X \in \mathfrak{M}(1), X \simeq L_2(q)$, и по предложению 2 $G \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.

Теорема для случая **(B)** доказана.

Доказательство теоремы для случая (C)

В приведенных ниже леммах 3–6 уточняется строение контрпримера G и насыщающего множества $\mathfrak{M}$.

Лемма 3. *G — бесконечная не локально конечная группа.*

Доказательство. Действительно, в противном случае теорема доказана по [1]. Противоречие с выбором G. □

Лемма 4. *$\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. Так как G содержит бесконечную локально конечную подгруппу, то порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ не ограничены в совокупности, т. е. $\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных конечных подгрупп. □

Лемма 5. *$\mathfrak{N}(1) \neq \varnothing$, и для любого $X \in \mathfrak{N}(1), X \simeq L_2(q), q=3,5 \ (mod\, 8)$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть S_X — силовская 2-подгруппа из X. Тогда S_X — одного из вида 3, 5, 6, перечисленных в лемме 1. Поскольку мы можем считать, что $S_X \subseteq S$, то мы приходим к противоречию со структурой X. □

Лемма 6. *$\mathfrak{B}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. Пусть A — четверная подгруппа из G. Если $N_G(A)$ — конечная группа, то для любой инволюции $x \in G$ $C_G(x)$ — бесконечная локально диэдральная группа и $\mathfrak{B}(1) = \varnothing$, что невозможно. Следовательно, $N_G(A)$ — бесконечная группа, и множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп.

$\square$

В приводимых ниже леммах 7—12 на основе свойств инволюций и четверных групп мы получаем структуру централизатра четверной подгруппы группы G.

Лемма 7. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из G. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \subset K \in \mathfrak{M}(1)$. По лемме 4 K изоморфна одной из групп множества $\{U_3(q), L_2(r)\}$, где q — нечётно, $r = 3, 5$ $(mod\ 8)$. Следовательно, x, y сопряжены в K. Поскольку $K \subset G$, то x, y сопряжены в G. $\square$

Лемма 8. *Все четверные подгруппы из G сопряжены.*

Доказательство. Пусть A, B — две различные четверные подгруппы из G. По лемме 7 все инволюции из G сопряжены, следовательно, для некоторого $g \in G$, $A \cap B^g \neq e$. Если $A = B^g$, то все доказано. Пусть $A \neq B^g$. Но тогда фактор-группа $\langle A, B^g\rangle/(A \cap B^g)$ — конечная группа, как подгруппа периодической группы, порожденная двумя инволюциями. Следовательно, $\langle A, B^g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle A, B^g\rangle \subset K \in \mathfrak{M}(1)$. По лемме 4 K изоморфна одной из групп множества $\{U_3(q), L_2(r)\}$, где q — нечётно, $r = 3, 5$ $(mod\ 8)$. Следовательно, A, B^g сопряжены в K. Поскольку $K \subset G$, то A, B сопряжены в G. $\square$

По лемме 6 в $\mathfrak{M}(1)$ найдётся группа, изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечётно. Отождествим указанную группу с U из предложения 5 и будем использовать обозначения этого предложения : i, j, w, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 9. $N = C_A \leftthreetimes V$.

Доказательство. Очевидно, $C_A \leftthreetimes V \subseteq N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N$. Тогда для некоторого $v \in V, A^g = A^v$ и $a^g = a^v$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a^{gv^{-1}} = a, gv^{-1} = c \in C_A, g = cv \in C_A \leftthreetimes V$. $\square$

Лемма 10. *C_A является бесконечной абелевой счетной группой ранга 2.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из C_A. По условию насыщенности $K \subseteq R \simeq \{U_3(q)\}$. По предложению 5 (пункт 4) $C_R(A)$ — абелева группа ранга 2, следовантельно, K — абелева группа ранга не более 2. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из C_A, получаем, что все конечные подгруппы из C_A абелевы ранга не более 2. По предложению 1 C_A является бесконечной (лемма 6) абелевой группой ранга 2 и является счетной. □

Лемма 11. *Если для любой конечной подгруппы K из C_A существует такая подгруппа R, что $K \subset R \in \mathfrak{M}(1)$ и*

$$R \simeq \{U_3(l) | (3, l+1) = 1\},$$

то $C_A = C \times C^w$, где C — локально циклическая группа.

Доказательство. Рассмотрим конечную подгруппу $K \subset C_A \leftthreetimes \langle w \rangle$. По условию насыщенности $\langle A, K, w \rangle \subset R \in \mathfrak{M}(1)$, где R — из условия леммы. По предложению 5 (пункт 1–4), $K \subseteq C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle c \rangle \times \langle c^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетение циклической группы $\langle c \rangle$ при помощи группы $\langle w \rangle$. В силу произвольности выбора K как конечной подгруппы из $C_A \leftthreetimes \langle w \rangle$ получаем, что $C_A \leftthreetimes \langle w \rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка два. По [8] $C_A \leftthreetimes \langle w \rangle = (C \times C^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетение бесконечной локально циклической группы C при помощи группы $\langle w \rangle$, $C_A = C \times C^w$. □

Лемма 12. *Если в C_A существует конечная подгруппа K такая, что для любого R со свойством $K \subset R \in \mathfrak{M}(1)$ всегда*

$$R \simeq \{U_3(l) | (3, q+1) = 3\},$$

то $C_A = CC^w$, где C — бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d \rangle$ — циклическая группа порядка 3 такая, что фактор-группа $C_A / \langle d \rangle = C / \langle d \rangle \times C^w / \langle d \rangle$.

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из условия леммы. По условию насыщенности $\langle A, K, w \rangle \subset R \in \mathfrak{M}(1)$. Из условия леммы и предложения 5 (пункты 1–4) вытекает, что $C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle c \rangle \langle c^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$, где $C_R(A) = (\langle c \rangle \langle c^w \rangle)$, $\langle c \rangle \cap \langle c^w \rangle = \langle d \rangle$ — циклическая подгруппа порядка 3, $d^w = d^{-1}$, и фактор-группа $C_R(A) / \langle d \rangle = \langle c \rangle / \langle d \rangle \times \langle c^w \rangle / \langle d \rangle$. Поскольку C_A — абелева группа (лемма 10), то $\langle d \rangle$ — нормальная подгруппа в $C_A \leftthreetimes \langle w \rangle$. Несложно видеть, что фактор-группа $(C_A \leftthreetimes \langle w \rangle) / \langle d \rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка 2. По [8] $(C_A \leftthreetimes \langle w \rangle) / \langle d \rangle = (\overline{C} \times \overline{C}^{\overline{w}}) \leftthreetimes \overline{\langle w \rangle}$, где $\overline{C}$ — бесконечная локально циклическая группа. Следовательно, $C_A \leftthreetimes \langle w \rangle = (CC^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$, где $C_A = CC^w$, C — бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d \rangle$. □

В приводимых ниже леммах 13–16 доказывается существование бесконечной подгруппы U группы G, изоморфной некоторой унитарной группе степени три над подходяшим локально конечным полем.

Лемма 13. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

со следующими свойствами:
1. $A \subset M_n \in \mathfrak{M}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{M_1}(A) \subset N_{M_2}(A) \subset \cdots \subset N_{M_n}(A) \subset \ldots$.
3. $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Так как C_A — счетная группа (лемма 10), то $C_A = \{c_1, c_2, ..., c_m, ...\}$. По леммам 9, 10 N — локально конечная группа. Следовательно, $\langle A, c_1, V\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle A, c_1, V\rangle \subset M_1 \in \mathfrak{B}(1)$. По предложению 5 (пункты 1 — 4),

$$N_{M_1}(A) = D^{(1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(1)} = C_{M_1}(A)$. Возьмем элемент $c_{m_1} \in \{C_A \backslash C_{M_1}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку N — локально конечная группа, то $\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle \subset M_2 \in \mathfrak{M}(1).$$

По предложению 5 (пункты 1–4),

$$N_{M_2}(A) = D^{(2)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(2)} = C_{M_2}(A)$. Ясно, что $N_{M_1}(A) \subset N_{M_2}(A)$.

Предположим, что для $n \geqslant 2$ группа $M_n \in \mathfrak{M}(1)$ построена. Возьмем элемент $c_{m_{n-1}} \in \{C_A \setminus C_{U^{(n)}}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_{n-1}. Следовательно, $\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle \subset M_{n+1} \in \mathfrak{M}(1).$$

Как отмечалось выше

$$N_{M_{n+1}}(A) = D^{(n+1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(n+1)} = C_{M_{n+1}}(A)$. Ясно, что $N_{M_n}(A) \subset N_{M_{n+1}}(A)$. Действуя подобным образом, мы получаем последовательность

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

обладающую свойством 1 из условия леммы. По построению

$$N_{M_1}(A) \subset N_{M_2}(A) \subset \dots \subset N_{M_n}(A) \subset \dots,$$

и свойство 2 также выполняется. Поскольку $c_m \in \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ для любого m, и $V \subset N_{M_n}(A)$ для любого n, то $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ и свойство 3 доказано.

$\square$

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\}$ из леммы 13.

Лемма 14. *Пусть* C_A *из леммы* 11. *Тогда*

1. *Для любой конечной подгруппы* $K = \langle f \rangle \times \langle g \rangle$ *из* C_A *такой, что* $|f| = |g| = m$, $K = H$, *где* $H = \langle r \rangle \times \langle r^w \rangle$ *— подгруппа из* C_A, $r \in C$ *и* $|r| = m$.

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$

$$M_k \simeq \{U_3(l) | (3, l+1) = 1\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 11 $C_A = C \times C^w$, где C — локально циклическая группа. Следовательно, $f = c_1 c_2$ для некоторых $c_1 \in C$ и $c_2 \in C^w$, значит, $e = f^m = c_1^m c_2^m$. Так как $C \cap C^w = e$, то $c_1^m = c_2^m = e$, $c_1 \in \langle r \rangle, c_2 \in \langle r^w \rangle$ и $f \in H$. Точно также показывается, что $g \in H$. Так как $|H| = |K|$, то $H = K$. Положим $r = c_1$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 13 с учетом того факта, что M_n выбирается согласно условиям леммы 11. $\square$

Лемма 15. *Пусть* C_A *из леммы* 12. *Тогда*

1. *Для любой конечной подгруппы* $K = \langle f \rangle \langle g \rangle$ *из* C_A *такой, что* $|f| = |g| = m$, *и* $\langle d \rangle = \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$ *имеет место равенство* $H = K$, *где* $H = \langle r \rangle \langle r^w \rangle$ *— конечная подгруппа из* C_A, $r \in C$, $|r| = m$ *и* $\langle d \rangle = \langle r \rangle \cap \langle r^w \rangle$.

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$

$$M_k \simeq \{U_3(l) | (3, l+1) = 3\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 12 $C_A = CC^w$, где C — локально циклическая группа , фактор-группа $C_A/\langle d \rangle = C/\langle d \rangle \times C^w/\langle d \rangle$ — прямое произведение двух изоморфных локально циклических групп. Так как $d \in H \cap K$, то $H/\langle d \rangle \simeq K/\langle d \rangle$. Далее, рассуждая как в предыдущей лемме, получаем, что $H/\langle d \rangle = K/\langle d \rangle$, значит, $H = K$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 13 с учетом того факта, что M_n выбирается согласно условиям леммы 12.

□

Лемма 16. *В G существует подгруппа M такая, что*

1. *$M \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.*
2. *$A \subset M$.*
3. *Для любой четверной подгруппы $F \subset M$, $N_G(F) = N_M(F)$.*

Доказательство. По построению $B = \langle w\rangle \times \langle j\rangle \subset M_n$ для любого n. Из лемм 3–6 вытекает, что для любого n $N_{M_n}(B) \subset N_G(B) = C_G(B) \leftthreetimes V_1$, где V_1 изоморфна группе V .

Покажем, что

$$C_{M_1}(B) \subset C_{M_2}(B) \subset \cdots \subset C_{M_n}(B) \subset \ldots .$$

Действительно, $C_{M_n}(A) \subset C_{M_{n+1}}(A) \subset C_G(A)$ для любого n. По лемме 3, $A^g = B$ для некоторого $g \in G$. Поскольку

$$(C_{M_n}(A))^g \subset (C_{M_{n+1}}(A))^g \subset (C_G(A))^g,$$

$$(C_{M_n}(A))^g = C_{M_n^g}(A^g) = C_{M_n^g}(B),$$

$$(C_{M_{n+1}}(A))^g = C_{M_{n+1}^g}(A^g)) = C_{M_{n+1}^g}(B)$$

$$(C_G(A)^g = C_{G^g}(A^g) = C_G(B),$$

то

$$C_{M_n^g}(B) \subset C_{M_{n+1}^g}(B) \subset C_G(B).$$

Так как $C_{M_n}(B) \simeq C_{M_n}(A) \simeq C_{M_n^g}(B)$ и $C_{M_n}(B) \subset C_G(B)$, то по леммам 11, 12 $C_{M_n}(B) = C_{M_n^g}(B)$ для любого n. Следовательно, $C_{M_n}(B) \subset C_{M_{n+1}}(B)$ для любого n, что и требовалось. В силу бесконечности последовательности $\{M_1, M_2, ...M_n, ...\}$ можно считать, что для любого n M_n не изоморфна $U_3(5)$. Следовательно, $M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle$ (предложение 5 (пункт 9) и с учетом леммы 13 (пункт 2)

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots .$$

По [1] $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики, и пункт 1 доказан. Пункт 2 очевиден. Поскольку A и F сопряжены в M, то для некоторого $x \in M$, $A = F^x$ и $N_M(A) = N_M(F^x) = (N_M(F))^x$. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 13 (свойство 3) получаем, что $N_M(A) = N$. Следовательно, $N = (N_M(F))^x$,

$$N_M(F) = T(N)^{x^{-1}} = \langle a^{x^{-1}} \mid a \in N\rangle = N_G(F).$$

Пункт 3 доказан. □

Заключительная часть доказательства **случая C** (леммы 17-19) посвящена доказательству совпадения группы U с группой G.

Лемма 17. *Пусть $R \in \mathfrak{B}(1)$ и $R \cap M$ содержит четверную подгруппу C. Тогда $R \subset M$.*

Доказательство. По лемме 16 (пункт 3) $N_R(C) \subset R \cap M$. По предложению 5 (пункты 1–4), $N_R(C)$ содержит четверную подгруппу H, отличную от C. По лемме 13 (пункт 3) $H \subset N_R(H) \subset (N_M(H)) \subset M$. Таким образом, $S = \langle N_R(C), N_R(H)\rangle \subset M$ и поскольку $S \neq R$, то $R \simeq U_3(5)$ и $S \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в R (предложение 5 (пункт 9). Пусть теперь T — силовская 2-подгруппа из S, содержащая C, H. Поскольку T является группой порядка 8, а силовская 2-подгруппа из R является группой порядка 16, то возьмем $x \in (N_R(T) \setminus T)$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Поскольку силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (предложение 5 (пункты 7, 8)), то возьмем $y \in (N_M(T) \setminus T)$ со свойством $y^2 \in T$. Так как G – периодическая группа, то $\langle x, y, T\rangle$ — конечная группа. Силовская 2-подгруппа из $\langle x, y, T\rangle$ содержит полудиэдральную группу, следовательно, по условию насыщенности $\langle x, y, T\rangle \subset R_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Поскольку $x \in R_1$, но $x \notin M$, то R_1 не лежит в M. Очевидно, R_1 не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $R_1 = \langle N_{R_1}(C), N_{R_1}(H)\rangle \subset M$ (лемма 16 (пункт 3)), что невозможно.

□

Лемма 18. *Пусть z — инволюция из M, b — элемент нечетного порядка из $C_G(z)$. Тогда $b \in M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $\mid b \mid = p$ – простое число. Для любой инволюции $x \in C_M(z)$ группа $\langle b, b^x, z\rangle$ конечна. По условию насыщенности и лемме 17 $\langle b, x, z\rangle \leq K \simeq L_2(q)$, $q \equiv 3, 5 (mod\, 8)$. Тогда $C_K(z)$ — группа диэдра. Следовательно, $\langle b\rangle = \langle b^x\rangle = \langle b\rangle^x$ и $\langle x\rangle I(C_M(z))$, где $I(C_M(z))$ — подгруппа из $C_M(z)$, порожденная всеми ее инволюциями, есть локально конечная группа. Возьмем в $C_M(z)$ подгруппу $K_1 \simeq GU_2(q)$. Рассмотрим подгруппу $I(K_1)$, порожденную всеми инволюциями из K_1. По условию насыщенности конечная группа $\langle b\rangle I(K_1) \leq K_2 \simeq L_2(q)$, $q \equiv 3, 5 (mod\ 8)$ и $\langle b\rangle I(K_1) \leq C_{K_2}(z)$ Но в $L_2(q)$ любая неабелева подгруппа из цетрализатора инволюции — группа диэдра, а $\langle b\rangle I(K_1) \leq C_{K_2}(z)$ таковой не является. Противоречие. Пусть теперь $\mid b \mid$ — не простое число. Так как G — группа Шункова, то $\langle b, z\rangle$ — конечная группа из $C_G(z)$. Далее рассуждая как в случае $\mid b \mid = p$, приходим к противоречию. □

Лемма 19. $M = G$.

Доказательство. Пусть X – из леммы 2 (случай **C**). По лемме 8 можно считать, что $X \cap M = N_X(A) \simeq A_4$. Если X не изоморфна A_5, то из списка максимальных подгрупп X ([11], стр. 377) и леммы 18 вытекает равенство $X = \langle C_X(x), C_X(y)\rangle \subseteq M$ и $X \subset K \subset M$, $K \simeq U_3(q)$, — нечетно, а x, y — различные инволюции из A. Противоречие с выбором X. Пусть $X \simeq A_5$. Возьмем элемент b порядка 3 из $N_X(A)$ и инволюции $v \in N_X(\langle b\rangle)$, $w \in N_M(\langle b\rangle)$. Ясно, что $\langle b, v\rangle \neq \langle b, w\rangle$. По условию насыщенности конечная группа $\langle v, w, b\rangle \subset R \in \mathfrak{B}(1)$. Так как $C_R(w) \simeq GU_2(q)$, для некоторого нечетного q, то из леммы 18 вытекает, что $R \cap M$ содержит четверную подгруппу. Следовательно, по лемме 18 $R \subset M$. Противоречие с выбором R. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ и по предложению 2 $G \simeq U_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

$\square$

Теорема для случая (C) доказана.

Доказательство теоремы для случая (D)

Пусть X — из леммы 2 (случай **D**). Без ограничения общности можно считать, что $X \cap M = N_X(A)$. Здесь A — четверная подгруппа из X. Пусть B — другая четверная подгруппа из $N_X(A)$. Ясно. что $N_X(B) \subset M$ (лемма 17, пункт 3). Из списка максимальных подгрупп группы X ([11], стр. 377) и предложения 13 следует, что, либо $X = \langle N_X(A), N_X(B)\rangle \subseteq M$ и $X \subset K \subset M$, $K \simeq U_3(q)$, q — нечетно, либо $X = \langle C_X(x), C_X(y)\rangle \subseteq M$ и $X \subset K \subset M$, $K \simeq U_3(q)$, q — нечетно, а x, y — различные инволюции из A. Противоречие с выбором X. Таким образом, случай **(D)** сводится к случаю **(C)**, доказанному выше.

Случай **(D)** доказан.

Теорема доказана. $\square$

Список литературы

1. Беляев В. В. Локально конечные группы Шевалле / В. В. Беляев // Исследования по теории групп, изд. УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1984. – С. 39-50.
2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 16-е изд. – Новосибирск : Изд-во ИМ СО РАН, 2006.
3. Кузнецов А. А. Группы, насыщенные заданным множеством групп / А. А. Кузнецов, К. А. Филиппов // Сиб. электрон. мат. изв. – 2011. – Т. 8. – С. 230–246.
4. Лыткина Д. В. О группах, насыщенных конечными простыми группами / Д. В. Лыткина // Алгебра и логика. – Т. 8, № 2. – 2009. – Р. 523–628.
5. Мазуров В. Д. Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$, / В. Д. Мазуров, Д. В. Лыткина // Алгебра и логика. – Т. 46, № 5. – 2007. – С. 606–626.
6. Рубашкин А. Г. О периодических группах, насыщенных группами $L_2(p^n)$ / А. Г. Рубашкин, К. А. Филиппов // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1388–1392.

7. Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами / К. А. Филиппов// Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53,№ 2, С. 430–438.
8. Шлепкин А. А. Периодические группы, насыщенные сплетенными группами / А. А. Шлепкин // Сиб. электрон. мат. изв. – 2013. – № 10. – С. 56–64.
9. Шлепкин А. А. О периодических группах и группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени три / А. А. Шлепкин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2016. – (в печати).
10. Amberg B. Periodic groups saturated by dihedral subgroups / B. Amberg, L. Kazarin // Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70-th birthday of Anatoly Yakovlev. – Saint-Petersburg, 2010. – P. 79–80.
11. Bray J. N. The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups / John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty-Dougal. –Cambridge university press., 2013. – P. 319–325.

Шлепкин Алексей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности, Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79. (e-mail: shlyopkin@mail.ru)

A. A. Shlepkin

About Periodic Shunkov Group Saturated with Finite Simple Groups of Lie Type Rank 1

Abstract. The property of group G to be saturated with given set of groups X is a natural generalization of locally-cover definition (in class of locally finite groups) on periodic groups. Locally-finite group, witch has a locally-cover contains from finite simple Lie type groups of finite rank, is a Lie type group on some locally finite field. We call group "Shunkov group" if every pair of conjugate elements generate finite subgroup, and this property saves after crossing on factor groups by finite subgroups. Group G saturated with groups from the set X, if every finite subgroup K from G contains in some subgroup G isomorphic to some group from X. In our work we solved the problem of building periodic Shunkov groups saturated with finite simple Lie groups of rank 1. Let $\mathfrak{M}$ — is a set contains from finite simple groups Suzuki, Re, Unitary, Linear of Lie type rank 1. We proved that periodic Shunkov group saturated with groups from set $\mathfrak{M}$ is isomorphic to simple group of Lie type rank 1 for some locally finite field Q. Also we got a description of Sylow 2-subgroup of periodic group saturated with groups from $\mathfrak{M}$, what is a necessary step in establishing of structure arbitrary periodic group with given saturation set.

Keywords: Periodic groups, groups saturated with the set of groups, Shunkov group.

References

1. Belyaev V.V. Locally finite Shevalle groups Explorations in group theory. Sverdlovsk, Ural science center AS USSR, 1984, pp. 39-50.
2. Kourovka notebook, Unsolved questions of group theory. 16 ed. Novosibirsk, Institute of mathematics SB RAS, 2006.
3. Kuznetcov A.A., Filippov K.A. Groups saturated with given set of groups. *Siberian electronic mathematical reports*, 2011. vol. 8, pp. 230-246.

4. Lytkina D.V. About groups saturated with finite simple groups. *Algebra and logic*, 2009, vol. 48 no 2, pp. 523-628.
5. Mazurov V.D. Periodic groups, saturated with $L_3(2^m)$,. *Algebra and logic*, 2005, vol. 46, no 5, pp. 606–626.
6. Rubashkin A.G., Filippov K.A., About periodic groups saturated with groups $L_2(p^n)$. *Siberian mathematical journal*, 2005, vol. 46 no 6, pp. 1388-1392.
7. Filippov K.A. About periodic groups saturated with finite simple groups. *Siberian mathematical journal*, 2012, vol. 52, no 2, pp. 430-438.
8. Shlepkin A.A. Periodic groups, saturated with wreath groups. *Siberian electronic mathematical reports*, 2013, vol. 10, pp. 56-64.
9. Shlepkin A.A. About periodic and Shunkov groups saturated with unitary groups of degree three.*Proceedings of Institute of mathematics and mechanics Ural science center RAS*, in print.
10. Amberg B., Kazarin L. Periodic groups saturated by dihedral subgroups. *Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70-th birthday of Anatoly Yakovlev.* Saint-Petersburg, 2010, pp. 79-80.
11. John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty – Dougal. The Maximal Subgroups of the Low – Dimensional Finite Classical groups. *Cambridge university press*, 2013, pp. 319–325.

Shlepkin Alexey Anatolievich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Siberian Federal University, 79, Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660041, (e-mail: shlyopkin@mail.ru)