Серия «Математика»
2016. Т. 16. С. 117—130

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.922, 517.977.1, 517.926.4
MSC 34A09, 34D20, 37C75

О робастной устойчивости систем дифференциально-алгебраических уравнений *

А. А. Щеглова, А. Д. Кононов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Аннотация. Рассматриваются линейные стационарные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной искомой вектор-функции. Такие системы называются системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Мерой неразрешенности ДАУ относительно производных служит целочисленная величина, называемая индексом. Анализ проводится в предположении существования структурной формы с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами. Эта структурная форма эквивалентна искомой системе в смысле решений, а оператор, преобразующий исходную систему ДАУ к этой структурной форме, обладает левым обратным оператором. Построение структурной формы носит конструктивный характер и не использует замену переменных, при этом автоматически решается проблема согласования начальных условий. Доказано, что в стационарном случае достаточным условием существования структурной формы является регулярность матричного пучка системы. Показана связь между индексом матричного пучка, порядком линейного дифференциального оператора, преобразующего исходные ДАУ к структурной форме и индексом неразрешенности ДАУ. Этот подход использует понятие r-продолженной системы, где r — индекс неразрешенности. Необходимым и достаточным условием существования структурной формы является наличие в матрице, описывающей r-продолженную систему неособенного минора порядка $n(r+1)$, где n — размерность рассматриваемой системы ДАУ. В статье исследуется проблема асимптотической устойчивости ДАУ в условиях неопределенности, задаваемой с помощью матричной нормы. Возмущение, привносимое в систему ДАУ, не нарушает ее внутренней структуры и тесно связано с расположением упомянутого минора в матрице, описывающей продолженную систему. Для систем индекса 1 и 2 получены достаточные условия робастной устойчивости. При получении результатов использовались значения для вещественного и комплексного радиусов устойчивости для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрен пример.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, робастная устойчивость.

1. Введение

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Ax'(t) + Bx(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

где A и B — заданные вещественные $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ — искомая n-мерная функция. Предполагается, что $\det A = 0$. Системы такого рода называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы.

ДАУ моделируют процессы во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике, теплотехнике и др.

В настоящее время исследования робастной устойчивости ДАУ находятся на начальной стадии. Работ по этой тематике мало. Основная трудность, возникающая при исследовании робастных свойств ДАУ, связана с тем, что в случае высокого индекса при возмущении входных данных может измениться внутренняя структура системы.

Известны результаты по робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости стационарных ДАУ [6; 9; 10], полученные с помощью приведения системы к канонической форме Кронекера-Вейрштрасса. Что касается ДАУ с периодическими коэффициентами, то известны результаты для систем индекса 1, использующие tractability index подход, базирующийся на построении проекторов на ядро [8; 7].

Необходимо отметить, что построение матриц, преобразующих стационарную ДАУ к форме Кронекера – Вейерштрасса, является весьма сложной задачей. Поэтому критерии, полученные на основе этой структурной формы, зачастую неконструктивны. В данной работе сделана попытка получить критерии робастной устойчивости, используя другую структурную форму, которая лишена указанного недостатка. Эта структурная форма эквивалентна исходной системе в смысле решений и при ее построении не используется замена переменных. Получены условия робастной устойчивости для ДАУ (1.1) индексов 1 и 2.

2. Эквивалентная структурная форма для линейных ДАУ

Для системы (1.1) определим $(n(r+1) \times n)$-матрицы

$$B_r = \operatorname{colon}(B, O, \ldots, O), \quad A_r = \operatorname{colon}(A, B, O, \ldots, O),$$

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00101) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН № II.2.

$(n(r+1)\times nr)$-матрицу

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A & O & \dots & O & O \\ B & A & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & A & O \\ O & O & \dots & B & A \end{pmatrix}$$

и $(n(r+1)\times n(r+2))$ – матрицу

$$D_r = \begin{pmatrix} B_r & A_r & \Lambda_r \end{pmatrix}.$$

Предположим, что для некоторого r $(0 \le r \le n)$ в матрице D_r найдется неособенный минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя $\lambda = \operatorname{rank}\Lambda_r$ столбцов матрицы Λ_r и все столбцы матрицы A_r. Такой минор будем называть *разрешающим минором.*

Обозначим $d = nr-\lambda$. Допустим, что известно, какие именно столбцы матрицы D_r входят в разрешающий минор. Вычеркнем $n-d$ столбцов матрицы B_r, которые не входят в упомянутый минор. После соответствующей перестановки столбцов из D_r получим матрицу

$$\Gamma_r = D_r \ \operatorname{diag}\left\{ Q \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix},\ Q,\dots,Q \right\}^{1}, \tag{2.1}$$

где E_d — единичная матрица порядка d, Q — $(n\times n)$-матрица перестановок[2].

Матрица Q строится следующим образом. Обозначим i_1, i_2, …, i_d и i_{d+1}, i_{d+2}, …, i_n номера столбцов матрицы B_r, которые соответственно входят и не входят в разрешающий минор. Будучи умноженной на B_r слева, матрица Q переставляет в B_r каждый (i_{d+k})-ый столбец $(k = \overline{1, n-d})$ на k-ое место, а каждый (i_j)-ый столбец $(j = \overline{1,d})$ на место с номером $n-d+j$. Матрица Q обратима и состоит из нулей и n единиц, причем единице равны элементы с индексами (i_{d+k}, k) и $(i_j, n-d+j)$.

Лемма 1. *Пусть пучок матриц $cA+B$ регулярен (т. е. $\det(cA+B)\not\equiv 0$). Тогда существует оператор*

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1\frac{d}{dt} + \ldots + R_r\left(\frac{d}{dt}\right)^r, \tag{2.2}$$

[1] Запись $\operatorname{diag}\{A_1,\dots,A_s\}$ обозначает квазидиагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы — нулевые.

[2] О матрицах перестановок строк и столбцов см. в книге [1, с. 127, 128].

где R_j *— $(n\times n)$-матрицы* $(j=\overline{0,r})$, *действие которого преобразует систему (1.1) к виду*

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \tilde{B}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad t\in T, \tag{2.3}$$

где $\operatorname{colon}(x_1(t),x_2(t)) = Q^{-1}x(t)$, Q *— матрица перестановок из (2.1),*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} = (R_0A + R_1B)\,Q, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} = R_0BQ. \tag{2.4}$$

Доказательство. Известно [1, с. 313], что в случае регулярности матричного пучка $cA+B$ существуют обратимые $(n\times n)$-матрицы P и S такие, что

$$PAS = \begin{pmatrix} O & N \\ E_{n-\sigma} & O \end{pmatrix}, \quad PBS = \begin{pmatrix} O & E_\sigma \\ G & O \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где N — верхнетреугольная матрица с ρ квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что $N^\rho = O$, G — некоторая квадратная матрица порядка $n-\sigma$.

Непосредственно из результатов, полученных в работе [4], следует, что в стационарном случае необходимым и достаточным условием существования оператора $\mathcal{R}$ (2.2) является наличие в матрице D_r разрешающего минора. Покажем, что такой минор существует при $r = \rho$.

В результате умножения матрицы D_ρ слева и справа на матрицы $\operatorname{diag}\{P,\dots,P\}$ и $\operatorname{diag}\{S,\dots,S\}$ соответственно, с учетом представления (2.5), получим

$$\left(\begin{array}{c|c||c|c|c|c}
\begin{matrix} O & E_\sigma \\ G & O \end{matrix} & \begin{matrix} O & N \\ E_{n-\sigma} & O \end{matrix} & & & & \\ \hline
 & \begin{matrix} O & E_\sigma \\ G & O \end{matrix} & \begin{matrix} O & N \\ E_{n-\sigma} & O \end{matrix} & & & \\ \hline
 & & & \ddots & & \\ \hline
 & & & & \begin{matrix} O & N \\ E_{n-\sigma} & O \end{matrix} & \\ \hline
 & & & & \begin{matrix} O & E_\sigma \\ G & O \end{matrix} & \begin{matrix} O & N \\ E_{n-\sigma} & O \end{matrix}
\end{array}\right). \tag{2.6}$$

Очевидно, что ранг матрицы, стоящей в (2.6) справа от двойной черты, равен рангу матрицы Λ_ρ. Пользуясь блочными преобразованиями матриц, нетрудно показать, что $\operatorname{rank}\Lambda_\rho = n\rho - \sigma$, поскольку $N^\rho = O$. Разрешающий минор в матрице (2.6) имеется: он включает в себя все блочные столбцы, в которых расположены единичные матрицы. При этом в (2.4) $d = \sigma$. □

Замечание 1. Из доказательства леммы 1 следует, что вслучае регулярного матричного пучка $cA+B$ в матрице D_r при $r=\rho$ имеется разрешающий минор.

Определение 1. *Наименьшее значение r, при котором в матрице D_r найдется разрешающий минор, называется индексом неразрешенности ДАУ (1.1).*

В статье [4] показано, что коэффициенты оператора $\mathcal{R}$ определяются единственным образом по формуле

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \end{pmatrix} \Gamma_r^\top \left(\Gamma_r \Gamma_r^\top\right)^{-1}.$$

Определение 2. *Решением ДАУ (1.1) будем называть n-мерную вектор-функцию $u_*(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, обращающую систему (1.1) в тождество при подстановке.*

Лемма 2. *Пусть пучок $cA+B$ регулярен. Тогда системы (1.1) и (2.3), (2.4) эквивалентны в смысле решений при $r=\rho$.*

Доказательство. В [4] показано, что системы (1.1) и (2.3) имеют одно и то же множество решений, если в матрице D_r найдется разрешающий минор и выполнено условие

$$\operatorname{rank}\Lambda_{r+1} = \operatorname{rank}\Lambda_r + n. \tag{2.7}$$

Согласно замечанию 1, в предположениях леммы в матрице D_r резрешающий минор имеется. Воспользовавшись представлением (2.6) нетрудно показать, что условие (2.7) выполняется при $r=\rho$. □

Определение 3. *Система (2.3), (2.4) называется эквивалентной формой для ДАУ (1.1).*

3. Робастная устойчивость

Зададим для ДАУ (1.1) начальное условие

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

где $t_0 \in T$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ — заданный вектор.

Утверждение 1. *[4] В случае регулярного матричного пучка $cA+B$ и $r=\rho$ необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1.1), (3.1) на интервале $[t_0,+\infty)$ является выполнение равенства*

$$J_1 x_{0,1} + x_{0,2} = 0, \tag{3.2}$$

где $\operatorname{colon}(x_{0,1}, x_{0,2}) = Q^{-1}x_0$, $x_{0,1} \in \mathbf{R}^{n-d}$, $x_{0,2} \in \mathbf{R}^d$.

Определение 4. *Начальные условия (3.1) называются согласованными с системой (1.1) в точке t_0, если они удовлетворяют соотношению (3.2)*

Определение 5. *Решение $x_*(t)$ ДАУ (1.1) называется устойчивым по Ляпунову (кратко, устойчивым) при $t \to +\infty$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in T$ найдется $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что*
1) при любых согласованных в точке t_0 начальных данных (3.1) таких, что $\|x_0 - x_*(t_0)\|_{\mathbf{R}^n} < \delta_0$, все решения $x(t, t_0, x_0)$ соответствующих задач Коши определены на интервале $T_0 = [t_0, +\infty)$;
2) для этих решений при $t \in I_0$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0) - x_*(t)\|_{\mathbf{R}^n} < \varepsilon$.

Определение 6. *Устойчивое решение $x_*(t)$ ДАУ (1.1) называется асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$, если для любого $t_0 \in T$ существует $\delta = \delta(t_0) \in (0, \delta_0)$ такое, что все решения $x(t, t_0, x_0)$ ДАУ (1.1) обладают свойством*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, t_0, x_0) - x_*(t)\|_{\mathbf{R}^n} = 0,$$

как только $\|x_0 - x_*(t_0)\|_{\mathbf{R}^n} < \delta$.

Система ДАУ (1.1) называется *асимптотически устойчивой*, если асимптотически устойчивы все ее решения.

Пусть система (1.1) асимптотически устойчива. Проблема робастной устойчивости такой системы состоит в нахождении условий, которым должна удовлетворять вещественная матрица возмущений Δ, для того чтобы ДАУ

$$Ax'(t) + (B + \Delta)x(t) = 0,$$

была асимптотически устойчива.

Замечание 2. В предположениях леммы 2 ДАУ (2.3), (2.4), а следовательно и система (1.1), будут асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы J_2 имеют положительные вещественные части.

Полученные ниже условия робастной устойчивости ДАУ (1.1) базируются на известных результатах для систем, разрешенных относительно производной, из книги [2, с. 201, 203].

Пусть $\mathcal{B}$ — квадратная матрица порядка m в общем случае с комплексными элементами. Напомним, что упорядоченные собственные числа $0 \le b_1 \le \ldots \le b_m$ симметричной матрицы $\mathcal{B}^*\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}^*$ — матрица сопряженная к $\mathcal{B}$) определяют сингулярные числа матрицы $\mathcal{B}$

$$\beta_i(\mathcal{B}) = \sqrt{b_i}, \;\; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Далее будет использоваться спектральная матричная норма

$$\|\mathcal{B}\|_s = \sqrt{b_m(\mathcal{B}^*\mathcal{B})} = \beta_m(\mathcal{B}).$$

Определение 7. *Пусть* $b_i(B)$ *— собственные значения* $(n \times n)$*-матрицы* B *и* $\operatorname{Re} b_i(B) > 0$ $(i = \overline{1,n})$. *Радиусом устойчивости системы*

$$x'(t) + (B + \Delta)x(t) = 0, \quad t \in T, \tag{3.3}$$

будем называть величину

$$\gamma_* = \sup_{\gamma} \left\{ \gamma : \ \operatorname{Re} b_i(B + \Delta) > 0 \ \ \forall i = \overline{1,n} \ \ \forall \|\Delta\|_s \le \gamma \right\}.$$

Обозначим $j = \sqrt{-1}$.

Лемма 3. *Пусть все собственные значения матрицы* B *имеют положительные вещественные части. Система (3.3) будет асимптотически устойчива, если*

$$\|\Delta\|_s < \gamma_* \le \inf_{\omega} \beta_1(j\omega E + B),$$

ω *— вещественный параметр.*

Обозначим $U(\omega) = \operatorname{Re}(j\omega E + B)^{-1}$, $V(\omega) = \operatorname{Im}(j\omega E + B)^{-1}$ и составим блочную матрицу

$$H(\omega, \alpha) = \begin{pmatrix} U(\omega) & -\alpha V(\omega) \\ \alpha^{-1} V(\omega) & U(\omega) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

зависящую от двух вещественных параметров ω и α.

Лемма 4. *Пусть все собственные значения матрицы* B *имеют положительные вещественные части. Система (3.3) асимптотически устойчива, если*

$$\|\Delta\|_s < \gamma_* \le \inf_{\omega} \inf_{\alpha \in (0,1]} \beta_{n-1}\left(H(\omega, \alpha)\right).$$

4. Условия робастной устойчивости ДАУ

С помощью матрицы Q из (2.1) переставим столбцы в матрицах A и B, затем полученные матрицы разобьем на блоки

$$AQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad BQ = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix},$$

где блоки A_1 и B_1 состоят из $n - d$ столбцов, а блоки A_2 и B_2 — из d столбцов.

Запишем ДАУ (1.1) в форме

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.1}$$

где $\operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t)$.

Введем в систему (4.1) неопределенность

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 + \Delta & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.2}$$

Δ — вещественная $(n \times (n-d))$-матрица.

Рассмотрим матрицы $R_0\Delta$ и $R_1\Delta$, где R_0 и R_1 — первые коэффициенты оператора (2.2), преобразующего ДАУ (4.1) к виду (2.3), (2.4), в котором

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = R_0 B_1. \tag{4.3}$$

Разобьем матрицы $R_0\Delta$ и $R_1\Delta$ на блоки

$$R_0\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}, \quad R_1\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix},$$

где матрицы Δ_1, Δ_3 размера $d\times(n-d)$, а Δ_2, Δ_4 — квадратные матрицы порядка $(n-d)$.

Рассмотрим ДАУ (1.1) индекса 1.

Теорема 1. *Пусть:*
1) в матрице D_1 имеется разрешающий минор;
2) $\operatorname{rank}\Lambda_2 = \operatorname{rank}\Lambda_1 + n$;
3) все характеристические числа матрицы J_2 имеют положительные вещественные части;
4) $\|\Delta_4\|_s < 1$;
5) $\dfrac{\|\Delta_2 - \Delta_4 J_2\|_s}{1 - \|\Delta_4\|_s} < \inf\limits_{\omega} \beta_1(j\omega E + J_2)$, β_1 — наименьшее сингулярное число матрицы $j\omega E + J_2$.

Тогда система (4.2) будет асимптотически устойчива.

Доказательство. В силу условия 1 в соответствии с доказательством леммы 1 оператор (2.2) имеет вид

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1\frac{d}{dt}. \tag{4.4}$$

Подействовав этим оператором на систему (4.2), получим ДАУ

$$x_2(t) + J_1x_1(t) + \Delta_1x_1(t) + \Delta_3x_1'(t) = 0, \tag{4.5}$$

$$x_1'(t) + J_2x_1(t) + \Delta_2x_1(t) + \Delta_4x_1'(t) = 0, \tag{4.6}$$

Предположение 4 обеспечивает обратимость матрицы $E + \Delta_4$ [3, с. 140], при этом

$$\| (E + \Delta_4)^{-1} \|_s \leq \frac{1}{1 - \|\Delta_4\|_s}. \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.6) можем найти

$$x_1'(t) = -(E + \Delta_4)^{-1} (J_2 + \Delta_2) x_1(t), \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в уравнение (4.5), из (4.5), (4.8) получим ДАУ

$$x_2(t) + \left(J_1 + \Delta_1 - \Delta_3(E + \Delta_4)^{-1} (J_2 + \Delta_2)\right) x_1(t) = 0, \tag{4.9}$$

$$x_1'(t) + \left(J_2 + (E + \Delta_4)^{-1} (\Delta_2 - \Delta_4 J_2)\right) x_1(t) = 0, \tag{4.10}$$

С учетом оценки (4.7)

$$\|(E + \Delta_4)^{-1} (\Delta_2 - \Delta_4 J_2) \|_s \leq \frac{\|\Delta_2 - \Delta_4 J_2\|_s}{1 - \|\Delta_4\|_s}.$$

Предположения 3 и 5 гарантируют справедливость утверждения леммы 3 в отношении системы (4.10). Согласно этой лемме система (4.10) асимптотически устойчива. Очевидно, что при этом асимптотически устойчива будет и система (4.9), (4.10). На основании леммы 2 можем заключить, что система ДАУ (4.2) также будет асимптотически устойчива. □

Замечание 3. Величина $\inf\limits_{\omega} \beta_1(j\omega E + J_2)$ из условия 5 теоремы 1 представляет собой оценку радиуса устойчивости системы (4.10).

Аналогичным образом можно получить условие робастной устойчивости, опираясь не лемму 4.

Пусть

$$U(\omega) = \mathrm{Re}(j\omega E + J_2)^{-1}, \quad V(\omega) = \mathrm{Im}(j\omega E + J_2)^{-1}, \tag{4.11}$$

ω — скалярный вещественный параметр.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1–4 теоремы 1. И кроме того,*

$$\frac{\|\Delta_2 - \Delta_4 J_2\|_s}{1 - \|\Delta_4\|_s} < \inf_{\omega} \inf_{\alpha \in (0,1]} \beta_{2(n-d)-1} H(\omega, \alpha), \tag{4.12}$$

$\beta_{2(n-d)-1}$ *— второе справа из упорядоченных по возрастанию сингулярных чисел матрицы $H(\omega, \alpha)$ (3.4). Тогда система (4.2) будет асимптотически устойчива.*

Оценка, предоставляемая теоремой 1, может оказаться плохой. В этом случае можно воспользоваться теоремой 2, хотя в вычислительном смысле проверка условия (4.12) более трудная задача.

Можно получить условия робастной устойчивости и для системы индекса 2.

Теорема 3. *Пусть:*
1) в матрице D_2 имеется разрешающий минор;
2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_2 & O & O \\ B_2 & A_1 & A_2 \end{pmatrix} = n$;
3) выполнены условия 3–5 теоремы 1, где матрица J_2 находится по формуле (4.3).

Тогда система (4.2) будет асимптотически устойчива.

Доказательство. В работе [5] доказано, что в предположениях 1 и 2 теоремы оператор, преобразующий ДАУ (1.1) в систему (2.3), (2.4), имеет вид (4.4). Там же показано, что системы (4.2) и (4.5), (4.6) имеют одно и то же множество решений.

Последующие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1.

□

В некоторых случаях для того, чтобы получить более приемлемую оценку значения $\dfrac{\|\Delta_2 - \Delta_4 J_2\|_s}{1 - \|\Delta_4\|_s}$ можно в формулировке теоремы 3 заменить условие 5 теоремы 1 на условие (4.12), где матрица $H(\omega,\alpha)$ определяется формулами (3.4), (4.11).

Пример 1. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0. \qquad (4.13)$$

Построим матрицу

$$D_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cccccc}
2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & & & & & & \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
\hline
 & & & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & & & \\
 & & & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & & & & & & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & & & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Легко видеть, что в матрице D_1 разрешающего минора нет. В матрице D_2 такой минор имеется, его столбцы обведены пунктирной линией.

Таким образом, индекс системы (4.13) $r = 2$, при этом $d = 2$, $Q = E_3$ и $\operatorname{rank}\Lambda_2 = 4$.

Поскольку

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_2 & O & O \\ B_2 & A_1 & A_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3,$$

то, согласно доказательству теоремы 3, оператор, преобразующий ДАУ (4.13) в систему (2.3), (2.4), имеет первый порядок

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}.$$

Система с неопределенностью (4.2) будет выглядеть следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 2+\delta_1 & -1 & -2 \\ \delta_2 & -1 & 2 \\ \delta_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0, \tag{4.14}$$

где $\operatorname{colon}(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \Delta$.

По формуле (4.3) находим матрицу $J_2 = (2)$. Следовательно, $j\omega E + J_2 = 2 + j\omega$.

С учетом того, что

$$R_0\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 2\delta_3 - \delta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_1 - \delta_2 + 4\delta_3 \end{array}\right), \quad R_1\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} -\delta_3 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right),$$

получим

$$\Delta_4 = 0, \quad \Delta_2 - \Delta_4 J_2 = (\delta_1 - \delta_2 + 4\delta_3).$$

Нетрудно вычислить сингулярное число $\sigma_1(j\omega E + J_2) = \sqrt{4+\omega^2}$, а также $\inf\limits_{\omega} \sigma_1(j\omega E + J_2) = 2$.

Таким образом, условие 5 теоремы 1 приобретает вид

$$|\delta_1 - \delta_2 + 4\delta_3| < 2. \tag{4.15}$$

Согласно этой теореме при выполнении условия (4.15) система (4.14) будет асимптотически устойчива.

Покажем это, анализируя непосредственно систему (4.14). Подействовав на (4.14) оператором $\mathcal{R}$, получим ДАУ

$$\begin{pmatrix} -\delta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -\delta_2 + 2\delta_3 & 1 & 0 \\ \delta_3 & 0 & 1 \\ 2+\delta_1-\delta_2+4\delta_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) = 0,$$

которая эквивалентна системе уравнений

$$x_2(t) + (\delta_3(4 + \delta_1 - \delta_2 + 4\delta_3) - \delta_2)\, x_1(t) = 0, \tag{4.16}$$

$$x_3(t) + \delta_3 x_1(t) = 0, \tag{4.17}$$

$$x_1'(t) + (2 + \delta_1 - \delta_2 + 4\delta_3)\, x_1(t) = 0, \tag{4.18}$$

где colon $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = x(t)$.

Очевидно, что при выполнении условия (4.15) уравнение (4.18) будет асимптотически устойчивым. Компоненты $x_2(t)$ и $x_3(t)$ определяются из уравнений (4.16) и (4.17) единственным образом через $x_1(t)$ Поскольку коэффициенты постоянны, то все решения уравнений (4.16) и (4.17) будут обладать свойством $|x_2(t)| \to 0$, $|x_3(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Выписав явный вид общего решения ДАУ (4.16)–(4.18), прямой подстановкой можно убедиться, что системы (4.16)–(4.18) и (4.14) имеют одни и те же решения. Таким образом, при выполнении условия (4.15) система ДАУ (4.14) будет асимптотически устойчива.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988.
2. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980.
4. Щеглова А. А. Преобразование линейной алгебро-дифференциальной системы к эквивалентной форме / А. А. Щеглова // Тр. IX Междунар. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 12–16 июня 2007 г. – Иркутск : ИДСТУ СО РАН, 2007. – Т. 5. – С. 298–307.
5. Щеглова А. А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами / А. А. Щеглова // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 9. – С. 57–70.
6. Byers R. On the stability radius oa a generalized state-space system / R. Byers, N. K. Nichols // Linear Algebra Appl. – 1993. – N 188–189. – P. 113–134.
7. Chyan C. J. On data-dependence of exponential stability and the stability radii for linear time-varying differential-algebraic systems / C. J. Chyan, N. Y. Du, V. H. Linh // J. Differ. Equ. – 2008. – N 245. – P. 2078–2102.
8. Du N. H. Stability radii for linear time-varying differential-algebraic equations with respect to dynamics perturbations / N. Y. Du, V. H. Linh // J. Differ. Equ. – 2006. – N 230. – P. 579–599.
9. Du N. H. Stability radii of differential-algebraic equations with structured perturbations / N. Y. Du // Syst. Control Lett. – 2008. – N 57. – P. 546–553.
10. Du N. H. Stability radius of implicit dynamic equations with constant coefficients on time scales / N. Y. Du, D. D. Thuan, N. C. Liem // Syst. Control Lett. – 2011. – N 60. – P. 596–603.

Щеглова Алла Аркадьевна, доктор физико-математических наук, зам. директора по научной работе, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453059 (e-mail: shchegl@icc.ru)

Кононов Алексей Денисович, аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 (e-mail: my_official@rambler.ru)

A. A. Shcheglova, A. D. Kononov

On Robust Stability of Systems of Differential-Algebraic Equations

Abstract. We consider linear time-invariant systems of ordinary differential equations with degenerate matrix before the derivative of the desired vector function. Such systems are called differential-algebraic equations (DAE). The unsolvability measure with respect to the derivatives for some DAE is an integer that is called the index of the DAE. The analysis is carried out under the assumption of existence of a structural form with separated differential and algebraic subsystems. This structural form is equivalent to the input system in the sense of solution, and the operator transforming the DAE into the structural form possesses the left inverse operator. The finding of the structural form is constructive and do not use a change of variables. In addition the problem of consistency of the initial data is solved automatically. We prove that regularity of the matrix pencil is sufficient for existence of the structural form in the time-invariant case. We show the connection between matrix pencil index, unsolvability index of DAE, and the order of linear differential operator transforming the DAE into the structural form. The approach uses the concept of r-derivative array equations, where r is the unsolvability index. The existence of a nonsingular minor of order $n(r+1)$ in the matrix describing derivative array equations is necessary and sufficient for existence of this structural form (n is the dimension of DAE under consideration). In the paper we investigate the problem of asymptotic stability of DAE in case of perturbation which is defined by means of matrix norm. The perturbation introduced into the system of DAE does not break its intrinsic structure and is closely connected with location of the minor mentioned above in the matrix describing derivative array equations. The sufficient conditions of robust stability for index-one and index-two systems are obtained. We use the values of real and complex stability radii obtained for system of ordinary differential equations solved with respect to the derivatives. We consider the example illustrating the obtained results.

References

1. Gantmakher F.R. The theory of matrices (in Russian). Moscow, Nauka, 1988.
2. Polyak B.T. Robust stability and control (in Russian). Moscow, Nauka, 2002.
3. Trenogin V.A. Functional analysis (in Russian). Moscow, Nauka, 1980.
4. Shcheglova A.A. The transformation of a linear algebraic-differential system to an equivalent form (in Russian). *Proceeding of the IX International Chetaev Conference ≪Analytical Mechanics, Stability and Motion Control≫*. Irkutsk, June 2007, vol. 5, pp. 298–307.
5. Shcheglova A.A. Existence of solution to initial problem for a degenerat time-varying linear hybrid system. *Russian Mathematics*, 2010, no 9, pp. 49-62.
6. Byers R. On the stability radius of a generalized state-space system. *Linear Algebra Appl.*, 1993, no 188–189, pp. 113–134.

7. Chyan C.J. On data-dependence of exponential stability and the stability radii for linear time-varying differential-algebraic systems. *J. Differ. Equ.*, 2008, no 245, pp. 2078–2102.
8. Du N.H. Stability radii for linear time-varying differential-algebraic equations with respect to dynamics perturbations. *J. Differ. Equ.*, 2006, no 230, pp. 579–599.
9. Du N.H. Stability radii of differential-algebraic equations with structured perturbations. *Syst. Control Lett.*, 2008, no 57, pp. 546–553.
10. Du N.H. Stability radius of implicit dynamic equations with constant coefficients on time scales. *Syst. Control Lett.*, 2011, no 60, pp. 596–603.

Shcheglova Alla Arkad'evna, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Deputy Director for Science, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 453059 (e-mail: `shchegl@icc.ru`)

Kononov Alexei Denisovich, Postgraduate, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, (e-mail: `my_official@rambler.ru`)