Серия «Математика»
2017. Т. 22. С. 63—70

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.7
MSC 68Q17
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.22.63

О сложности стандартных форм мультифункций *

А. С. Казимиров
Иркутский государственный университет

Аннотация. Если рассматривать дискретные функции на множестве A, то мультифункции можно определить как функции на множестве 2^A, при этом значения мультифункций для значений аргументов из A задаются, а для значений, не являющихся одноэлементными множествами, определяются как объединение всех значений мультифункции на одноэлементных множествах. Таким же образом определяется суперпозиция для мультифункций.

Мультифункции являются обобщением различных моделей неопределенности, частичных и гиперфункций. Такие модели можно применять, например, при работе с неполной и противоречивой информацией в интеллектуальных системах.

Для мультифункций можно определить стандартные формы через мультифункцию пересечения. Представление мультифункции в классе стандартных форм не является единственным. Для них можно естественным образом ввести понятие сложности по количеству компонент пересечения.

В данной статье рассматривается связь между мультифункциями, принимающими всего два значения, и булевыми функциями. Показано, что сложность стандартных форм любой из таких мультифункций совпадает с длиной дизъюнктивной нормальной формы соответствующей булевой функции. В статье получена верхняя оценка сложности стандартных форм мультифункций, а также приведена последовательность мультифункций, сложность которой совпадает с этой верхней оценкой. Таким образом, получено значение сложности класса n-местных мультифункций (функции Шеннона). Также предложен алгоритм минимизации мультифункций ранга 2 от 4 и менее аргументов, основанный на последовательном переборе формул всё большей сложности. С помощью данного алгоритма найдены сложности всех 4-местных мультифункций ранга 2.

Ключевые слова: мультифункции, минимизация, сложность, дизъюнктивные нормальные формы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-31-00280.

1. Введение

В теории дискретных функций, наряду со всюду определенными функциями k-значной логики, изучаются и функции, определенные не на всех наборах. При этом незаданность или неопределенность может пониматься по-разному, в зависимости от рассматриваемого класса задач. Не всюду заданными функциями на конечном множестве являются и так называемые мультифункции, у которых неопределенность понимается как некоторое неодноэлементное (в том числе и пустое) подмножество конечного множества, на котором эти функции заданы. Такие модели можно применять, например, при работе с неполной и противоречивой информацией [8; 11]. В настоящее время исследуются разные аспекты теории мультифункций, в частности, вопросы полноты [2], связь клонов функций и клонов мультифункций [9], рассматриваются вопросы функциональной разделимости [7].

Отображение из A^n в A называется n-местной функцией на A. Через 2^A обозначим множество всех подмножеств A. Отображение из A^n в 2^A называется n-местной мультифункцией (мультиоперацией, а также частичной гиперфункцией [10]) на A. Множество всех n-местных мультифункций на A будем обозначать H_A^n, при $|A| = k$ также будем использовать обозначение H_k^n. Мультифункции, заданные на k-элементном множестве A, будем называть мультифункциями ранга k.

Суперпозиция мультиопераций определяется следующим образом

$$(f * (f_1, \ldots, f_n))(a_1, \ldots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_m)} f(b_1, \ldots, b_n).$$

Следуя [3], n-местную мультифункцию f на множестве $A = \{1, 2\}$ будем представлять как отображение

$$f : \{1, 2\}^n \to \{0, 1, 2, 3\},$$

используя следующую кодировку для элементов 2^A:

$$\varnothing \to 0; \;\; \{1\} \to 1; \;\; \{2\} \to 2; \;\; \{1, 2\} \to 3.$$

При этом n-местную мультифункцию f можно задать вектором всех ее значений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n})$, где $f(a_1, \ldots, a_n) = \alpha_i$, если $(a_1 - 1, \ldots, a_n - 1)$ есть представление числа $i - 1$ в двоичной системе счисления.

Определим бинарную мультифункцию «пересечение» $\cap \in H_k^2$ как $\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$. В дальнейшем также будем использовать инфиксную форму записи для пересечения. Эта мультифункция является коммутативной и ассоциативной. Также эта мультифункция принадлежит любому суперклону [5], что делает естественным использование $\cap$ для построения формульных представлений мультифункций.

Обочначим через $d^n_{i,\alpha} \in H^n_2$ следующие мультифункции

$$d^n_{i,\alpha} = (3, \ldots, 3, \overset{i}{\alpha}, 3, \ldots, 3), \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2^n),$$

где $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$. В частности, $d^0_{1,\alpha} = (\alpha)$.

В [6] была введена стандартная форма мультифункции

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{d^m_{i,\alpha} \,|\, 0 \leqslant m \leqslant n, \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}\}$. Представление мультифункций стандартной формой не единственно.

Помимо стандартной формы также рассматриваются [4;5] ее частные случаи — совершенная стандартная форма

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigcap_j d_j(x_1, \ldots, x_n),$$

где $d_j \in \{d^n_{i,\alpha} \,|\, \alpha \in \{1, 2\}\}$, являющаяся каноническим представлением для мультифункций, не равным тождественно 3, и ключевая стандартная форма.

2. Сложность мультифункций в классе стандартных форм

Для стандартной формы Φ, имеющей вид

$$\Phi = d_1 \cap \ldots \cap d_s,$$

где $d_j \in \{d^m_{i,\alpha} \,|\, 0 \leqslant m \leqslant n, \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}\}$, можно ввести понятие сложности через количество компонент пересечения $L_{SF}(\Phi) = s$.

Для мультифункции f сложность определяется как сложность минимальной стандартной формы, представляющей f:

$$L_{SF}(f) = \min_{f=\Phi} L_{SF}(\Phi).$$

Сложность класса всех n-местных мультифункций ранга k (функция Шеннона сложности мультифункций) определяется как сложность n-местной мультифункции с наибольшей сложностью:

$$L_{SF}(n, k) = \max_{f \in H^n_k} L_{SF}(f).$$

Утверждение 1. *Для любой n-местной мультифункции f выполняется $L_{SF}(f) \leqslant 2^n$.*

Доказательство. Пусть векторное задание f имеет вид $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n})$. Тогда для каждого α_i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, определим $d_i = d^n_{i,\alpha_i}$. Получаем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigcap_{i=1}^{2^n} d_i,$$

так как $d_i(a_1, \ldots, a_n) = 3$ для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ такого, что $(a_1-1, \ldots, a_n-1)$ не является двоичным представлением $i-1$, и $3 \cap \alpha = \alpha$. Таким образом, $L(f) \leqslant 2^n$. □

Каждой мультифункции $d^m_{i,\alpha}(x_1, \ldots, x_m)$ при фиксированном $\alpha \neq 3$ можно поставить в соответствие элементарную конъюнкцию $k^m_i = x_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{b_m}$, где $(b_1, \ldots, b_m)$ является двоичным представлением числа i и $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$. Таким образом, каждой стандартной форме можно поставить в соответствие дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Количество элементарных конъюнкций в ДНФ Ψ называется длиной Ψ и обозначается $L_{DNF}(\Psi)$.

Пусть мультифункция f, принимающая всего два значения — 3 и $\alpha \in \{1, 2\}$ — имеет стандартную форму Φ, которой соответствует ДНФ Ψ, представляющая булеву функцию f^*.

Несложно показать, что в этом случае из векторного представления f можно получить векторное представление f^* заменой 3 на 0 и α на 1.

Действительно, $f(a_1, \ldots, a_n) = \alpha$ тогда и только тогда, когда в Φ найдется хотя бы одна компонента $d^m_{i,\alpha}$ такая, что $d^m_{i,\alpha}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) = \alpha$. В этом случае в Ψ найдется конъюнкция k^m_i, что $k^m_i(a_{i_1} - 1, \ldots, a_{i_m} - 1) = 1$, то есть $f^*(a_1 - 1, \ldots, a_n - 1) = 1$.

Поскольку существует взаимно однозначное соответствие между стандартными формами для f и ДНФ для f^*, получаем:

Утверждение 2. *Если мультифункция f принимает всего два значения $\{3, \alpha\}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, то $L_{SF}(f) = L_{DNF}(f^*)$.*

Рассмотрим последовательность мультифункций $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, которая определяется следующим образом:

$$f_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 + \ldots + a_n \text{ четное;} \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1. *$L(f_n) = 2^n$.*

Доказательство. Рассмотрим n-местные мультифункции g и h, построенные из f_n следующим образом:

$$g(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_n(a_1, \ldots, a_n) = 1; \\ 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$h(a_1,\dots,a_n)=\begin{cases}2, & \text{если } f_n(a_1,\dots,a_n)=2;\\ 3, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тогда верно равенство $f_n = g\cap h$. В каждой стандартной форме для f_n можно сгруппировать $d^{m_1}_{i_1,1}$ и $d^{m_2}_{i_2,2}$. Каждая компонента произвольной стандартной формы f_n будет иметь вид $d^m_{i,1}$ или $d^m_{i,2}$. Таким образом, стандартная форма f_n получается с помощью пересечения из стандартных форм g и h, которые не могут иметь одинаковых компонент. Отсюда можно сделать вывод, что $L(f_n)=L(g)+L(h)$.

Построим по мультифункциям g и h булевы функции g^* и h^*. Тогда $g^*(x_1,\dots,x_n)=x_1\oplus\ldots\oplus x_n$ и $h^*=g^*\oplus 1$. В [1] показано, что $L_{DNF}(g^*)=L_{DNF}(h^*)=2^{n-1}$.

Тогда $L(f_n)=L(g)+L(h)=L_{DNF}(g^*)+L_{DNF}(h^*)=2^n$. □

Следствие 1. *$L_{SF}(n,k)=2^n$, $k\geqslant 2$.*

3. Алгоритм минимизации стандартных форм мультифункций исчерпывающим поиском

Задача минимизации мультифункции заключается в поиске стандартной формы наименьшей сложности, представляющей заданную мультифункцию.

В [6] приведен алгоритм минимизации, сводящийся к минимизации дизъюнктивных нормальных форм и использующий перебор по всем нулевым значениям в векторе мультифункции. С помощью данного алгоритма были получены сложности всех мультифункций ранга 2 от 2 и 3 аргументов. Но этот алгоритм уже для некоторых 4-местных мультифункций не позволяет найти точный минимум за реальное время.

Для минимизации 4-местных мультифункций предлагается использовать алгоритм исчерпывающего поиска, заключающийся в последовательном построении всё более сложных формул.

Алгоритм заключается в следующем:

Шаг 1. Построить все стандартные формы сложности 1 — состоящие из одного слагаемого вида $d^m_{i,\alpha}$. Для всех мультифункций, представленных данными формами, установить искомую сложность в 1.

Шаг 2. Установить текущую сложность $k{=}1$.

Шаг 3. Последовательно перебирать мультифункции сложности k.

Шаг 4. Для каждой мультифункции перебирать все возможные слагаемые.

Шаг 5. К стандартной форме текущей мультифункции добавить текущее слагаемое. Если полученная мультифункция ранее не встречалась, то установить ее сложность в $k+1$.

Шаг 6. Увеличить k на 1. Если найдена хотя бы одна мультифункция сложности k, то перейти к шагу 3.

Такой алгоритм позволяет найти сложности всех мультифункций ранга 2 от 4 и менее аргументов. Но эффективная реализация алгоритма для минимизации 4-местных мультифункций требует поэтапно создавать и очищать соответствующие списки мультифункций сложности k, чтобы ускорить выборку функций для перебора и при этом использовать объем оперативной памяти, не превышающий 4 ГБ. Предложенный алгоритм имеет смысл использовать для одновременного поиска сложности большого числа мультифункций.

С помощью данного алгоритма были получены сложности всех 4-местных мультифункций ранга 2, распределение мультифункций по сложностям приведено в табл. 1.

Таблица 1

Распределение мультифункций по сложностям

Сложность	Количество мультифункций
1	244
2	20 676
3	818 080
4	16 049 780
5	154 729 080
6	698 983 656
7	1 397 400 512
8	1 254 064 246
9	571 481 516
10	160 200 992
11	34 140 992
12	6 160 176
13	827 120
14	84 800
15	5 312
16	114

Список литературы

1. Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе «И», «ИЛИ», «НЕ» / О. Б. Лупанов // Проблемы кибернетики. Вып. 6. – М. : Физматгиз, 1961. – С. 5–14.
2. Пантелеев В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 3. – С. 95–114.
3. Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны / Н. А. Перязев // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физико-математические науки. – 2009. – Т. 151,кн. 2. – С. 120–125.

4. Перязев Н. А. Минимизация мультиопераций в классе стандартных форм / Н. А. Перязев, И. А. Яковчук // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 117–126.
5. Перязев Н. А. Стандартные формы мультиопераций в суперклонах / Н. А. Перязев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 88–95.
6. Перязев Н. А. Суперклоны мультиопераций / Н. А. Перязев // Дискретные системы в теории управляющих систем : тр. VIII Междунар. конф. – М. : МАИС Пресс, 2009. – С. 233–238.
7. Шаранхаев И. К. О методе декомпозиции мультифункций / И. К. Шаранхаев // Дискретные модели в теории управляющих систем : IX Междунар. конф. : труды / отв. ред.: В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов. – М. : МАКС Пресс, 2015. – С. 266-267.
8. Kazimirov A. Decision support system based on 4-valued logic with multi-interpretations / A. Kazimirov, V. Panteleyev, L. Riabets, S. Vinokurov // Proceedings of International Conference on Soft Computing and Measurements SCM 2015, May 19–21, St. Petersburg, Russia, 2015. – P. 198–199.
9. Peryazev N. A. Galois theory for clones and superclones / N. A. Peryazev, I. K. Sharankhaev // Discrete Mathematics and Applications. – 2016. – Vol. 26, N 4. – P. 227–238. https://doi.org/10.1515/dma-2016-0020
10. Romov B. A. The completeness problem in partial hyperclones / B. A. Romov // Discrete Mathematics. – 2006. – Vol. 306. – P. 1405–1414. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.033
11. Decision Support System for Medical Prescriptions Based on 4-Valued Logic / S. Vinokurov, A. Kazimirov, N. Pustovoytov, A. Frantseva // Proceedings of the XIX International Conference on Soft Computing and Measurement, SCM 2016, May 25–27, St. Petersburg, Russia, 2016. – P. 307–308.

Казимиров Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Россия, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 (e-mail: a.kazimirov@gmail.com)

A. S. Kazimirov

On Complexity of Standard Forms for Multifunctions

Abstract. Consider discrete functions defined on set A. In this case we define multifunctions as functions on set 2^A. Values of a multifunction for inputs equal to one-element sets are given and values for other sets are calculated as a union of values on one-element sets. Superposition of multifunctions is defined in the same way.

Multifunction is a generalization of different models of uncertainty, incomplete and partial functions and hyperfunctions. These models can be useful for processing incomplete and contradictional information in intelligent systems.

Standard forms representing multifunctions are defined using intersection multifunction. Standard form representation of a multifunction is not unique. It is natural to define complexity of a standard form as the number of its components.

This paper introduces exact bounds on complexity of n-ary multifunctions and proposes an algorithm for minimization of 4-argument multifunctions.

This paper considers the relationship between multifunctions that have only two output values, and Boolean functions. It is shown that the complexity of the standard forms of any such multifunction coincides with the length of the disjunctive normal form of the corresponding Boolean function. The article gives an upper bound for the complexity of the standard forms of multifunctions, and also introduces a sequence of multifunctions whose complexity coincides with this upper bound. Thus, the complexity of the class of n-ary multifunctions is obtained. Also, an algorithm is proposed for minimizing multifunctions of rank 2, based on a sequential search of formulas of increasing complexity. This algorithm allows us to find the complexities of all 4-ary multifunctions of rank 2.

Keywords: multifunction, minimization, complexity, disjunctive normal form.

References

1. Lupanov O.B. On logic functions realization with formulas of finite classes (of finite depth) in basis of AND, OR, NOT *Problemy kibernetiki*, vol. 6, Moscow, Fizmatgiz, 1961, pp. 5-14 (in Russian).
2. Panteleyev V.I. Completeness criteria for incompletely defined partial Boolean functions *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2009, vol. 9, no 3, pp. 95-114 (in Russian).
3. Peryazev N.A. Clones, co-clones, hyperclones and superclones *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki*, Kazan, 2009, no 151, vol. 2, pp. 120-125 (in Russian).
4. Peryazev N.A., Yakovchuk I.A. Minimization of multioperations in the class of standard forms *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, 2009, vol. 2, no 2, pp. 117-126 (in Russian).
5. Peryazev N.A. Standard forms of multioperations in superclones *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, 2010, vol. 3, no 4, pp. 88–95 (in Russian).
6. Peryazev N.A. Superclones of multioperations *Trudy VIII Mezhdunarodnoy konferentsii «Diskretnye sistemy v teorii upravlyayuschih sistem»*, Moscow, MAIS Press, 2009, pp. 233-238 (in Russian).
7. Sharankhaev I.K. On decomposition method for multifunctions *Diskretnye modeli v teorii upravlyayuschih sistem IX Mezhdunarodnaya konferentsiya: Trudy*, Moscow, MAKS Press, 2015, pp. 266-267 (in Russian).
8. Kazimirov A., Panteleyev V., Riabets L., Vinokurov S. Decision support system based on 4-valued logic with multi-interpretations *Proceedings of International Conference on Soft Computing and Measurements SCM 2015, May 19–21*, St. Petersburg, Russia, 2015, pp. 198–199.
9. Peryazev N.A., Sharankhaev I.K. Galois theory for clones and superclones *Discrete Mathematics and Applications*, 2016, vol. 26, no 4, pp. 227–238. https://doi.org/10.1515/dma-2016-0020
10. Romov B. A. The completeness problem in partial hyperclones *Discrete Mathematics*, 2006, pp. 1405–1414. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.033
11. Vinokurov S., Kazimirov A., Pustovoytov N., Frantseva A. Decision Support System for Medical Prescriptions Based on 4-Valued Logic *Proceedings of the XIX International Conference on Soft Computing and Measurement, SCM 2016, May 25–27*, St. Petersburg, Russia, 2016, pp. 307-308.

Kazimirov Alexey Sergeevich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: (3952)242210 (e-mail: a.kazimirov@gmail.com).