Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 3. С. 104—111

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.938

О наиболее вероятной (типичной) траектории движения неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Г. А. Рудых
Иркутский государственный университет

Д. Я. Киселевич
Иркутский государственный университет

Аннотация. В данной работе изучается поведение интегральной кривой неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что при определенных предположениях движение вдоль траекторий системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется по максимуму функции плотности вероятности распределения.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений; уравнение Лиувилля; функция плотности вероятности распределения; интегральная кривая; движение по максимуму.

1. Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = X(x,t),\ \ x(t)|_{t=t_0} = x_0, \tag{1.1}$$

и соответствующее ей уравнение Лиувилля [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Lf(x,t),\ \ f(x,t)|_{t=t_0} = f_0(x). \tag{1.2}$$

Здесь

$$L\cdot = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(X_i(x,t)\cdot) \tag{1.3}$$

— оператор Лиувилля, относительно которого, исходя из специфики функции $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, будем предполагать, что L действует согласно формуле

$$L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n); \tag{1.4}$$

x, $X(x,t)$— векторы из $\mathbb{R}^n$; $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество, причем $G = \Omega \times I$; $I = \{t : t_0 \leq t < +\infty\}$; Ω — проекция G в $\mathbb{R}^n$; $f_0(x) = f(x,t_0)$ — начальная функция такая, что

$$f_0(x) \geq 0, f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)dx = 1; \tag{1.5}$$

$\chi(x,t)$ — дивергенция векторного поля системы 1.1; $X_i(x,t) \in C_{xt}^{(1,1)}(G)$ $D(x(x_0,t_0,t),t) = det\|\frac{\partial x(x_0,t_0,t)}{\partial x_0}\|$ — якобиан отображения $x_0 \to x(x_0,t_0,t)$; $S(x,t) = det\|\frac{\partial x_0(x,t,t_0)}{\partial x}\|$ — якобиан отображения $x(x_0,t_0,t) \to x_0$; $\chi(x(x_0,t_0,t),t)$ — дивергенция векторного поля системы ОДУ 1.1, вычисленная вдоль ее решения.

Ансамблем Гиббса системы ОДУ 1.1 назовем множество идентичных систем вида 1.1 с одинаковыми правыми частями и отличающихся друг от друга лишь начальными состояниями.

Итак, если систему 1.1 трактовать как закон движения изображающей точки x в $\mathbb{R}^n$, то ансамблю Гиббса системы ОДУ 1.1 будет соответствовать в $\mathbb{R}^n$ ансамбль изображающих точек. Пусть $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ — компактное множество, занимаемое ансамблем Гиббса системы ОДУ 1.1 в момент времени $t = t_0$. Каждая из изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$, двигаясь по траекториям системы ОДУ 1.1, переместится за время от t_0 до t в новое состояние $x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 \in \Omega_t \subset \Omega$, где $T(t,t_0)$ — оператор сдвига вдоль траекторий системы 1.1 [2]; $\Omega_t = \{x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}\}$ — образ множества Ω_{t_0} в силу системы ОДУ 1.1 . Итак, имеем $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$. Функцию со свойствами 1.5 будем трактовать как плотность вероятности распределения ансамбля изображающих точек Гиббса системы 1.1 в множестве Ω_{t_0}. Текущее значение функции плотности вероятности распределения $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ определяется из задачи Коши 1.2 и характеризует состояние ансамбля изображающих точек Гиббса системы 1.1 в образе Ω_t множества Ω_{t_0}.

Будем говорить, что для системы уравнений 1.1 выполняется предположение А, если для всех изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$ решение $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ последней нелокально продолжимо на I и остается в области Ω при всех $t \geq t_0$. Под классическим решением задачи Коши 1.2 с оператором 1.3, действующим согласно 1.4, будем понимать функцию $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, которая будучи подставленной в уравнение 1.2 обращает последнее в тождество.

Теорема 1. *[6] Пусть для системы ОДУ 1.1 выполняется предположение А. Пусть $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ — компактное множество положительной меры Лебега $mes\Omega_{t_0} > 0$, занимаемое ансамблем изображающих точек*

Гиббса системы ОДУ 1.1 в начальный момент времени $t = t_0$. *Пусть каждая из изображающих точек* $x_0 \in \Omega_{t_0}$, *двигаясь по траекториям системы ОДУ 1.1, переместится за время от* t_0 *до* t *в новое состояние* $x(x_0, t_0, t) = T(t, t_0)x_0 \in \Omega_t$. *Пусть* $\Omega_t = \{x(x_0, t_0, t) = T(t, t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}\}$ *— образ множества* Ω_{t_0} *в силу системы ОДУ 1.1. Пусть ансамбль Гиббса системы ОДУ 1.1 характеризуется в множестве* $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ *плотностью вероятности распределения* $f_0(x)$ *со свойствами 1.5, то для всех* $t \in I$ *существует единственное классическое решение задачи Коши 1.2–1.4, обладающее свойствами*

$$f(x,t) \geq 0, f(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx = 1, \tag{1.6}$$

$$f(x(x_0,t_0,t),t) = f(x(t_0),t_0) \cdot exp\Big\{-\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\Big\}, \tag{1.7}$$

$$f(x,t) = f_0(p(x,t,t_0)) \cdot exp\Big\{-\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(p(x,t,t_0),t_0,\tau),\tau)d\tau\Big\}, \tag{1.8}$$

где $p(x,t,t_0) \triangleq T^{-1}(t,t_0)x = x_0$. *Кроме того, для множества* $\Omega_t \subset \Omega$ *выполняются соотношения:*

$$mes\Omega_t = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Omega_t} \chi(x,\tau)dxd\tau + mes\Omega_{t_0}, \tag{1.9}$$

$$\lim_{\Omega_t \to x^*} \frac{d}{dt} \ln mes\Omega_t = \chi(x^*, t). \tag{1.10}$$

Приведенная выше теорема не может служить эффективным средством построения функции плотности вероятности распределения $f(x,t)$, так как при этом необходимо в аналитическом виде иметь решение $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ системы 1.1, а затем также аналитически разрешить последние соотношения относительно начальных состояний x_0. Таким образом, теорема устанавливает в рассматриваемом классе функций достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши 1.2 для всех $t \in I$. Кроме того, как будет показано ниже, позволяет исследовать поведение интегральной кривой системы уравнений 1.1.

2. Поведение интегральной кривой

Рассмотрим вопрос о поведении интегральной кривой системы ОДУ 1.1. С этой целью введем функцию $g(x,t) \triangleq f_0(p(x,t,t_0)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, которая имеет вид

$$g(x,t) = f(x,t) \cdot exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(p(x,t,t_0),t_0,\tau),\tau)d\tau \right\} \tag{2.1}$$

и удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}g(x,t) + \sum_{i=1}^{n} X_i(x,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}g(x,t) = 0, \tag{2.2}$$

$$g(x,t)|_{t=t_0} = g_0(x) = f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Предложение 1. *Пусть для системы ОДУ 1.1 выполняется предположение А,* $divX(x,t) = \chi(t)$, $f(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *решение задачи Коши 1.2 с оператором 1.3, действующим согласно 1.4, причем функция* $f_0(x) = f(x,t_0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *имеет в точке* $x_0 \in \Omega_{t_0}$ *строгий глобальный экстремум (максимум)*

$$\max_{x\in\Omega} f(x,t_0) = f(x(t_0),t_0), \tag{2.3}$$

то в любой момент времени $t \in I$ *имеет место соотношение*

$$\max_{x\in\Omega} f(x,t) = f(x(x_0,t_0,t),t). \tag{2.4}$$

Доказательство. Используя соотношение $D(x(x_0,t_0,t),t) \cdot S(x,t) = 1$, при сделанных предположениях относительно правых частей системы 1.1, запишем решение

$$f(x,t) = f_0(p(x,t,t_0)) \cdot exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} \chi(\tau)d\tau \right\} \tag{2.5}$$

задачи Коши 1.2. Определим $\max\limits_{x\in\Omega} f(x,t)$ с учетом того, что выполняются условия предложения, а формула 1.7 в данном случае представима в виде

$$f(x(x_0,t_0,t),t) = f(x(t_0),t_0) \cdot exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} \chi(\tau)d\tau \right\}. \tag{2.6}$$

Принимая во внимание 2.3, 2.5, 2.6 имеем

$$\max_{x\in\Omega} f(x,t) = \max_{x\in\Omega}\left[f_0(p(x,t,t_0))\cdot exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right\}\right] =$$

$$= exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right\}\cdot \max_{x\in\Omega} f_0(x,t) =$$

$$= exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right\}\cdot \max_{x\in\Omega} f(x,t_0) = f(x(x_0,t_0,t),t). \qquad (2.7)$$

□

Пример 1. Рассмотрим систему ОДУ [3]

$$\dot{x}_1 = -x_2,\ \ \dot{x}_2 = x_2(sin(lnt) + cos(lnt) - 2) \qquad (2.8)$$

с начальными условиями

$$x_1(t)|_{t=1} = x_1^0,\ x_2(t)|_{t=1} = x_2^0. \qquad (2.9)$$

Покажем справедливость предложения 1 для задачи Коши 2.8, 2.9. Решение задачи Коши 2.8, 2.9 имеет вид

$$x_1(t) = x_1^0\cdot e^{-(t-1)},\ \ x_2(t) = x_2^0\cdot e^{t\cdot sin(lnt)-2(t-1)}.$$

Пусть $f_0(x_1,x_2) = C\cdot e^{-(x_1-x_1^0)^2-(x_2-x_2^0)^2}$, где C— постоянная, получаемая из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f_0(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 1,$$

тогда решением задачи Коши 1.2 будет функция

$$f(x_1,x_2,t) = C\cdot exp\Big\{-(x_1e^{t-1}-x_1^0)^2 - (x_2e^{2(t-1)-tsin(lnt)} - x_2^0)^2\Big\}\times$$
$$\times\, exp\Big\{3(t-1) - tsin(lnt)\Big\}.$$

Функция $f_0(x_1,x_2)$ имеет максимум в начальной точке $(x_1^0,x_2^0,1)$, следовательно, согласно предложению 1, функция $f(x_1,x_2,t)$ достигает своего максимума на решении задачи Коши 2.8, 2.9, который определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1,x_2,t) = 0,\ \ \frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1,x_2,t) = 0.$$

Следствие 1. *Если система ОДУ 1.1 является линейной (в общем случае неавтономной)*

$$\dot{x} = A(t)x + h(t), \;\; x(t)|_{t=t_0} = x_0, \tag{2.10}$$

то ее интегральная кривая, соответствующая решению

$$x(t) = x(x_0, t_0, t)$$

, осуществляется для любого $t \in I$ *по моде* M *функции* $f(x,t)$*, определяемой из 1.2 с учетом 2.10, причем*

$$\hat{x}_i \triangleq \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i \cdot f(x,t)dx = x_i(t), \quad x_i(t) \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i^2 \cdot f(x,t)dx \right)^{1/2}.$$

Если выполняются условия предложения 1, то интегральная кривая системы ОДУ 1.1 в любой момент времени $t \in I$ является наиболее вероятной траекторией движения последней, т.е. осуществляется по моде M функции плотности вероятности распределения $f(x,t)$.

Пример 2. Рассмотрим линейную неавтономную систему

$$\dot{x}_1 = tx_1 + t, \;\; \dot{x}_2 = -2tx_2 + t, \;\; x_1(t)|_{t=0} = 0, \;\; x_2(t)|_{t=0} = 0. \tag{2.11}$$

Покажем, что для задачи Коши 2.11 выполняется следствие 1. Решением задачи Коши 2.11 будут функции

$$x_1(t) = e^{t^2/2} - 1, \;\; x_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}. \tag{2.12}$$

Если $f_0(x) = \frac{1}{2\pi}exp(-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2)$, то задача Коши для обобщенного уравнения Лиувилля 1.2 имеет следующее решение

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot exp\Big\{ \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(x_1 e^{-t^2/2} + e^{-t^2/2} - 1\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(x_2 e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}\Big)^2 \Big\}.$$

Максимум функции $f(x,t)$ определяется из системы $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, t) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, t) = 0$ и достигается на решении 2.12. Нетрудно убедиться, что $\hat{x}_1(t) = x_1(t), \hat{x}_2(t) = x_2(t)$, причем для любого $t \in [0; +\infty)$ выполняются неравенства

$$x_1(t) = e^{t^2/2} - 1 \leq \left[e^{t^2} + (e^{t^2/2} - 1)^2 \right]^{1/2},$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2} \leq \left[e^{-2t^2} + \frac{1}{4}(1 - e^{-t^2})^2 \right]^{1/2}.$$

Предложение 2. *Если для системы ОДУ 1.1 выполняется предположение A, а* $g(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *— решение задачи Коши 2.2, причем* $g_0(x) = g(x,t_0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *имеет в точке* x_0 *строгий глобальный экстремум (максимум)* $\max\limits_{x\in\Omega} g(x,t_0) = g(x(t_0),t_0)$, *то в любой момент времени* $t \in I$ *имеет место соотношение*

$$\max_{x\in\Omega} g(x,t) = g(x(x_0,t_0,t),t).$$

Доказательство предложения 2 аналогично доказательству предложения 1. Таким образом, из предложения 2 следует, что интегральная кривая системы 1.1 осуществляется по траектории, на которой функция $g(x,t)$ принимает максимальное значение. Другими словами, решение $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ задачи Коши 1.1 определяется из системы уравнений $\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = 0$.

Пример 3. Покажем справедливость предложения 2 для системы ОДУ

$$\dot{x}_1 = \Big(1-\frac{1}{2}e^{-x_1}\Big)x_2,\ \dot{x}_2 = 4e^t + ln\Big(e^{x_1} - \frac{1}{2}\Big), x_1(t)|_{t=0} = x_1^0,\ x_2(t)|_{t=0} = x_2^0. \tag{2.13}$$

При $f_0(x) = C \cdot e^{-(x_1-x_1^0)^2-(x_2-x_2^0)^2}$ задача Коши 1.2 для обобщенного уравнения Лиувилля, соответствующего системе 2.13, имеет решение $f(x,t) = S(x,t)\cdot g(x,t)$, где

$$S(x,t) = \frac{a(t)^{cht-1}\cdot e^{x_1-2t+d(t)}}{\frac{1}{2} + a(t)^{cht}\cdot e^{-2t+d(t)}};$$

$$g(x,t) = C\cdot exp\Bigg\{-\Big[\ln\Big(\frac{1}{2} + a(t)^{cht-1}\cdot e^{b(t)+d(t)}\Big) - x_1^0\Big]^2\Bigg\}\cdot$$
$$\cdot exp\Bigg\{-\Big[\frac{x_2 - 2e^t(t+1)}{cht} - sht\ln(a(t)) - tht\cdot(b(t)+d(t)) + 2 - x_2^0\Big]^2\Bigg\};$$

$a(t) = e^{x_1} - \frac{1}{2}, b(t) = 2t\cdot e^t(sht - cht), d(t) = sht\cdot(2e^t - x_2),\ x \triangleq (x_1,x_2); C$ — постоянная, определяемая из условия $\int\limits_{\mathbb{R}^2} f_0(x)dx = 1$. Определяя максимум функции $g(x,t)$ из системы уравнений $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x,t) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x_2} g(x,t) = 0$, убеждаемся,что последний достигается на решении

$$x_1(t) = \ln\left[\frac{1}{2} + e^{2te^t + 2sht\left(\frac{x_2^0}{2}-1\right)}\cdot\left(e^{x_1^0} - \frac{1}{2}\right)^{cht}\right],$$

$$x_2(t) = 2te^t + 2e^t + 2sht\left(\frac{x_2^0}{2} - 1\right) + sht\cdot\ln\left(e^{x_1^0} - \frac{1}{2}\right)$$

задачи Коши 2.13.

Список литературы

1. Зубов В. И. Динамика управляемых систем / В. И. Зубов. – М. : Высш. шк., 1982. – 285 с.
2. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 331 с.
3. Леонов Г. А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения / Г. А. Леонов. – СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. – 144 с.
4. Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. – 550 с.
5. Овсянников Д. А. Математические методы управления Пучками / Д. А. Овсянников. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1980. – 226 с.
6. Рудых Г. А. Уравнение Лиувилля в исследовании устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Г. А. Рудых, Д. Я. Киселевич // Мат. заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18, вып. 1. – С. 141–155.
7. Steeb W. H. Generalized Liouville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles / W. H. Steeb // Physica. – 1979. – Vol. 95A, N 1. – P. 181-190.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Физматлит, 2002.

G. A. Rudykh, D. J. Kiselevich

On the most probable (typical) trajectory of the nonautonomous system of ordinary differential equations

Abstract. In this paper we study the behavior of the integral curve nonautonomous system of ordinary differential equations. It is shown that under certain assumptions, the motion along trajectories of the system of ordinary differential equations made the most of the probability density function distribution

Keywords: system of ordinary differential equations Liouville equation, probability density function, the integral curve, the maximum movement

Рудых Геннадий Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210

Киселевич Дарья Яковлевна, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (dariakis@mail.ru)

Rudykh Gennady, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)242210

Kiselevich Daria, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952)242210 (dariakis@mail.ru)