Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 3. С. 32—40

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

О применении преобразования Себана – Бонда и теоремы Коши – Ковалевской в одной краевой задаче для системы Навье – Стокса *

А. И. Дрегля
Иркутский государственный университет

Аннотация. Система дифференциальных уравнений Навье – Стокса с помощью замены Себана – Бонда сводится к двум нелинейным дифференциальным уравнениям в форме Коши – Ковалевской. Получены достаточные условия разрешимости этой системы с начальными и начально-краевыми условиями, обоснована сходимость рядов в методе Крайна.

Ключевые слова: метод Крайна; погранслои; уравнения Близиуса; сходимость рядов; асимптотика; численные методы.

1. Введение

В статьях Лоренса Крайна [6, 7] предложен способ построения аналитических решений уравнений Навье – Стокса

$$\frac{\partial}{\partial x}(ur) + \frac{\partial}{\partial r}(vr) = 0, \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{1.2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\nu}{P}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{1.3}$$

где ν — кинематическая вязкость и P — число Прандтля. При этом вопрос о сходимости соответствующих рядов оставался открытым. Уравнения (1.1) – (1.3) играют важную роль в математических моделях

* Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (мероприятие 1.2.2, проект 2012-1.2.2-12-000-1001-012), частично поддержана грантом Минобрнауки РФ, номер госрегистрации НИР: 01200804682.

формования волокна [6, 7] и в других моделях прикладной математики. В данной работе уравнения погранслоя (1.1) – (1.3) сводятся к системе двух нелинейных уравнений в частных производных в форме Коши – Ковалевской. Получены достаточные условия разрешимости этой системы с начально-краевыми условиями и доказана сходимость рядов представляющих решение. На этой основе проведены численные расчеты распределений скоростей теплообмена соответствующих моделей формования синтетических волокон.

2. Редукция системы (1.1) – (1.3), существование и построение решений

Воспользуемся заменой переменных Себана и Бонда [11]

$$X = 2\sqrt{\frac{4\nu x}{U_0 a^2}}, \quad Y = \sqrt{\frac{U_0 a^2}{4\nu x}}\left[\frac{r^2 - a^2}{2a^2}\right], \tag{2.1}$$

$$\psi = \frac{4\nu x}{X} F(X, Y). \tag{2.2}$$

$$G = \frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty}, \tag{2.3}$$

где T_c, T_∞ постоянные величины соответствующие температурным значениям волокна в начале процесса формования волокна и соответственно в конце процесса. Тогда уравнения (1.2) и (1.3) примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left[(1 + XY)\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right] + F\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + X\left[\frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}\right] = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left[(1 + XY)\frac{\partial G}{\partial Y}\right] + PF\frac{\partial G}{\partial Y} + PX\left[\frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial G}{\partial X}\right] = 0. \tag{2.5}$$

Будем рассматривать эту систему с граничными условиями

$$Y = 0: \ F + X\frac{\partial F}{\partial X} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial Y} = 2, \ G = 1,$$

$$Y = \infty: \ \frac{\partial F}{\partial Y} = G = 0.$$

Решение системы (2.4) и (2.5) будем искать и виде рядов

$$F = F_0 + XF_1 + X^2 F_2 + \dots . \tag{2.6}$$

$$G = G_0 + XG_1 + X^2 G_2 + \dots . \tag{2.7}$$

Следовательно, первые приближения для F и G будут соответственно F_0 и G_0, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^3 F_0}{\partial Y^3} + F_0 \frac{\partial^2 F_0}{\partial Y^2} = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial Y^2} + P F_0 \frac{\partial G_0}{\partial Y} = 0. \tag{2.9}$$

Эти уравнения идентичны уравнениям для плоской пластины [10]. Численные расчеты для уравнения Блазиуса (2.8) приведены в [1, 8, 9].

Функция G_1 удовлетворяет уравнению:

$$G_1'' + P(F_0 G_1' - F_0' G_1) + (Y G_0'' + G_0') + 2 P F_1 G_0' = 0, \tag{2.10}$$

где производные взяты по Y.

Заметим, что при $P \gg 1$ аппроксимация G_1 может быть найдена легко. В этом случае полезно заменить независимую переменную Y на $J = Y\sqrt{P}$ и использовать приближения (которые верны в рамках ошибки порядка $\frac{1}{\sqrt{P}}$): $F_0 \doteqdot 2Y = \frac{2J}{\sqrt{P}}$, $G_0 \doteqdot 1 - erf J$, $F_1 \doteqdot \frac{1}{2} F_1''(0) Y^2 = -0.190 \frac{J^2}{P}$. На основании работы [6] уравнение (2.10) приводится к виду

$$\frac{d^2 \tilde{G}_1}{dJ^2} + 2J \frac{d\tilde{G}_1}{dJ} - 2\tilde{G}_1 + \frac{1}{\sqrt{P}} [(2 - F_1''(0)) J^2 - 1] \Phi_1 = 0, \tag{2.11}$$

где $\Phi_1 = \frac{d\Phi}{dJ}$ и $\Phi = erf J$. Уравнение (2.11) имеет решение

$$\tilde{G}_1 = \frac{1}{4\sqrt{P}} \left[(J^2 \Phi_1 + J\Phi - J) + \frac{1}{2} F_1''(0)(-J^2 \Phi_1 + J\Phi - J) \right], \tag{2.12}$$

при этом

$$\left(\frac{d\tilde{G}_1}{dY} \right) \bigg|_{y=0} = -0.2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{P}} \right). \tag{2.13}$$

Для малых X число Нуссольта принимает вид

$$N = -\frac{0.8\pi}{X}. \tag{2.14}$$

Следующее приближение для F (суть F_1) определим из уравнения:

$$F_1''' + F_0 F_1'' - F_0' F_1' + 2 F_0'' F_1 + Y F_0''' + F_0'' = 0, \tag{2.15}$$

с граничными условиями

$$F_1(0) = 0, \; F_1'(0) = 0, \; \lim_{Y \to \infty} F_1' = 0. \tag{2.16}$$

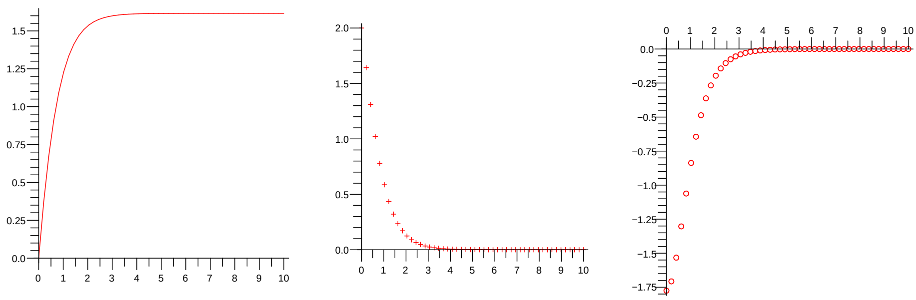

Рис. 1. Первая аппроксимация распределения скорости для функции F_0 и ее первой и второй производной.

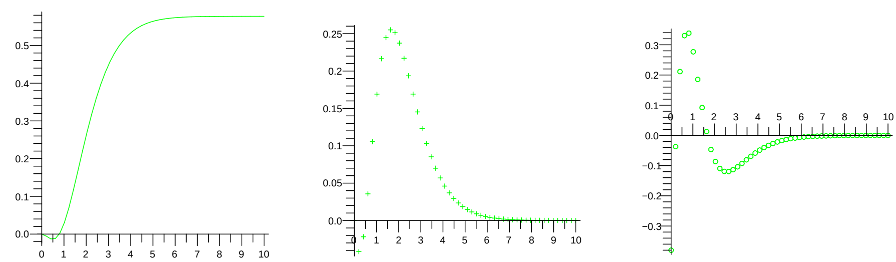

Рис. 2. Первая аппроксимация распределения скорости для функции F_1 и ее первой и второй производной.

Численные решения уравнений (2.8) и (2.15) с соответствующими граничными условиями для аппроксимации уравнения движения (2.4) представлены на рис. 1 – 4.

Численные решения для системы уравнений (2.8), (2.15), (2.9) и (2.12) с соответствующими граничными условиями для уравнения теплопроводности (2.5) представлены в таблицах 1, 2.

Подставляя ряды (2.6) и (2.7) в уравнения (2.4) и (2.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях X можем получить дифференциальные уравнения для определения последующих коэффициентов рядов. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$F_n^{(3)}+F_n^{(2)}F_0-nF_n^{(1)}F_0^{(1)}+(n+1)F_nF_0^{(2)}+M_n(F_0,F_1,...,F_{n-1})=0, \quad (2.17)$$

$$G_n^{(2)}+PF_0G_n^{(1)}-PF_0^{(1)}G_n+N_n(F_0,...,F_n,G_1,...,G_{n-1})=0, \quad (2.18)$$

где $n=1,2,...$, M_n, N_n — определенные функции, например M_1 определена как

$$M_1=F_0^{(2)}+YF_0^{(3)}.$$

Таблица 1.

Первая аппроксимация распределения скорости для функции F_0, F_1 и их первых и вторых производных.

N	1	2	3	4	5
F_0	1.218553	1.533083	1.599455	1.612806	1.615464
F_0'	0.603567	0.13248714	0.026869	0.005359	0.001065
F_0''	−0.858023	−0.208639	−0.043201	−0.008653	−0.001722
F_1	0.027446	0.261262	0.448101	0.533272	0.563855
F_1'	0.163368	0.240737	0.129497	0.050171	0.016491
F_1''	0.28499	−0.800315	−0.107140	−0.52452	−0.019295

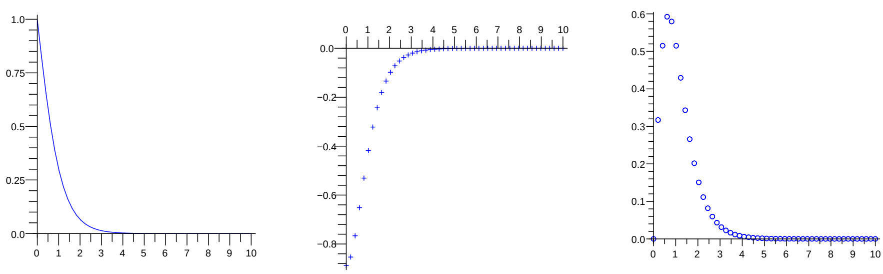

Рис. 3. Первое приближение распределения тепла для функции G_0 и ее первой и второй производной.

Чтобы найти решение уравнений (2.17) и (2.18), мы должны задать начальные условия.

Решим систему (2.4) – (2.5) с начальными условиями:

$$(\alpha)\begin{cases} F\mid_{Y=0}= a_{00}+a_{01}X+a_{02}X^2+\ldots \\ F_Y'\mid_{Y=0}= a_{10}+a_{11}X+a_{12}X^2+\ldots \\ F_{Y^2}''\mid_{Y=0}= a_{20}+a_{21}X+a_{22}X^2+\ldots, \end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases} G\mid_{Y=0}= b_{00}+b_{01}X+b_{02}X^2+\ldots \\ G_Y'\mid_{Y=0}= b_{10}+b_{11}X+b_{12}X^2+\ldots. \end{cases}$$

Тогда для уравнений (2.17) – (2.18) получаем начальные условия вида

$$\begin{cases} F_n\mid_{Y=0}= a_{0n} \\ F_n'\mid_{Y=0}= a_{1n} \\ F_n''\mid_{Y=0}= a_{2n} \end{cases} \qquad \begin{cases} G_n\mid_{Y=0}= b_{0n} \\ G_n'\mid_{Y=0}= b_{1n} \end{cases}$$

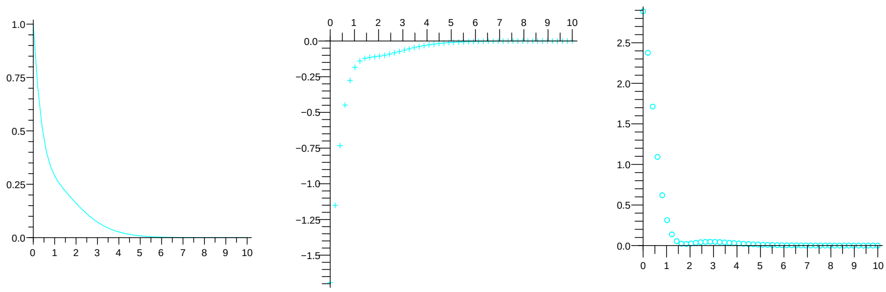

Рис. 4. Первое приближение распределения тепла для функции G_1 и ее первой и второй производной.

Таблица 2.

Первое приближение распределения тепла для функции G_0, G_1 и их первой производной.

N	1	2	3	4	5
G_0	0.301783	0.662435	0.134347	0.267996	0.532728
G_0'	−0.429011	−0.104319	−0.216006	−0.432698	−0.861045
G_1	0.288841	0.161625	0.729456	0.267143	0.856935
G_1'	−0.190674	−0.106676	−0.668176	−0.288583	−0.101708

Граничные условия

$$\left(F + X\frac{\partial F}{\partial X}\right) |_{Y=0}= 0;\ \frac{\partial F}{\partial Y} |_{Y=0}= 2;\ G |_{Y=0}= 1$$

требуют следующего выбора постоянных в формулах (α) и (β):
$a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0,\ a_{10} = 2,\ a_{11} = a_{12} = .. = 0;$
$b_{00} = 1,\ b_{01} = b_{02} = ... = 0,$
остальные постоянные могут быть произвольными. Принимаяем во внимание, что уравнения (2.4) – (2.5) имеют тривиальные решения

$$F = const,\ \ G = const.$$

В силу этого на полуоси $0 < Y < \infty$ эти уравнения имеют разрывные решения. А именно справедлива

Теорема 1. *Существует* $R > 0$ *такое, что в области* $D = \{0 \le X \le R, 0 \le Y < \infty\}$, *уравнения (2.4) – (2.5) с условиями* $Y = 0:\ F + X\frac{\partial F}{\partial X} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial Y} = 2,\ G = 1;\ Y = \infty:\ \frac{\partial F}{\partial Y} = G = 0,$ *имеют решение*

$$F = \begin{cases} \widehat{F}(X,Y), & 0 < Y < R, 0 < X < R, \\ c, & R < Y < \infty, \end{cases}$$

$$G = \begin{cases} \widehat{G}(X,Y), & 0 < Y < R, 0 < X < R, \\ 0, & R < Y < \infty, \end{cases}$$

где c–произвольная постоянная, $\widehat{F}(X,Y)$, $\widehat{G}(X,Y)$ — единственное аналитическое решение уравнений (2.4) – (2.5) с условиями Коши

$$(I) \begin{cases} F(X,Y)\mid_{Y=0} = 0 \\ F'_Y(X,Y)\mid_{Y=0} = 2 \\ F''_{Y^2}(X,Y)\mid_{Y=0} = a_2(X) \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} G(X,Y)\mid_{Y=0} = 1 \\ G'_Y(X,Y)\mid_{Y=0} = b_1(X), \end{cases}$$

где $a_2(X)$, $b_1(X)$ — фиксированные аналитические функции определенные при $0 \le X \le \overline{R}$, R — радиус сходимости рядов

$$F = F_0 + XF_1 + X^2F_2 + \ldots,$$

$$G = G_0 + XG_1 + X^2G_2 + \ldots,$$

$0 < R \le \overline{R}$

Доказательство теоремы:

Существование единственного при $0 \le X \le R$, $0 \le Y \le R$ решения системы (2.4) – (2.5) с условиями Коши

$$\widehat{F}(X,0) = 0,\ \widehat{F}'_Y(X,0) = 2,\ \widehat{F}^{(2)}_Y(X,0) = a(X),$$

$$\widehat{G}(X,0) = 1,\ \widehat{G}_Y(X,0) = b(X)$$

следует из теоремы Коши-Ковалевской (см., например, [4]). Выполнение граничного условия $\left(F + X\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{Y=0} = 0$, $G\big|_{Y=0} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial Y}\big|_{Y=0} = 2$ вытекает из вида решения F, G. Тривиальным решением системы (2.4) – (2.5) являются произвольные постоянные. Поэтому разрывное решение

$$F = \begin{cases} \widehat{F}(X,Y), & 0 \le Y \le R, 0 \le X \le R, \\ c, & R < Y < \infty, \end{cases}$$

$$G = \begin{cases} \widehat{G}(X,Y) & 0 \le Y \le R, 0 \le X \le R, \\ 0, & R \le Y < \infty, \end{cases}$$

удовлетворяет граничному условию на бесконечности $\frac{\partial F}{\partial Y}\big|_{Y=\infty} = 0$, $G\big|_{Y=\infty} = 0$. Теорема доказана.

При произвольной постоянной c и произвольных начальных функциях $a(X), b(X)$ в условиях

$$\widehat{F}(X,0) = 0,\ \widehat{F}'_Y(X,0) = 2,\ \widehat{F}^{(2)}_Y(X,0) = a(X),$$

$$\widehat{G}(X,0)=1,\ \widehat{G}_Y(X,0)=b(X)$$

построенное решение F, G поставленной краевой задачи может оказаться разрывным. Чтобы решение было непрерывным, функции $a(X), b(X)$, постоянную c и подвижную границу R надо выбирать определенным образом. Для этого достаточно $a(X), b(X)$, c и R_1, где $R_1 \leq R$ выбрать так, чтобы решение задачи Коши (2.4) и (2.5) с условиями

$$\widehat{F}(X,0)=0,\ \widehat{F}'_Y(X,0)=2,\ \widehat{F}^{(2)}_Y(X,0)=a(X),$$

$$\widehat{G}(X,0)=1,\ \widehat{G}_Y(X,0)=b(X)$$

при $Y = R_1$ удовлетворяли условиям $\widehat{F}(X,R_1) = const$, $\widehat{G}(X,R_1) = 0$. Подходящие функции $a(X), b(X)$, постоянную c и подвижную границу R_1, вообще говоря, можно выбрать известным методом прогонки или методом стрельбы.

3. Заключение

Доказанная теорема гарантирует разрешимость рассматриваемой краевой задачи в классе разрывных функций и устанавливает сходимость рядов в численно-аналитическом методе Крайна [6, 7] для системы Навье-Стокса (1.1) – (1.3). Методом пристрелки, вообще говоря, можно подобрать такие начальные функции и “подвижную” границу R_1, при которых соответствующее решение будет непрерывным. Ввиду важности построения непрерывных решений при моделировании процессов формования волокон на основе системы (1.1) – (1.3) этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. Результаты расчетов, приведенные в таблицах 1, 2, показывают, что привлечение старших членов разложения в ряды существенно повышают точность в моделировании процесса формования в сравнении с результатами работ [6, 7].

Список литературы

1. Дрегля А. Краевые задачи в моделировании формования волокон аналитические и численные методы / А. Дрегля. – Saarbrucken : Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 110 с.
2. Дрегля А. И. Некоторые аналитические и точные решения систем уравнений в теории моделирования полимеров / А. И. Дрегля // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11. – С. 61–70.
3. Дрегля А. И. О решениях одной нелинейной краевой задачи на полуоси с малым параметром / А.И. Дрегля // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 313–316.

4. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – М. : Наука, 1961.
5. Сидоров Н. А. О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях / Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев, А. И. Дрегля // Мат. заметки. – 2012. – Т. 91. – С. 120–135.
6. Crane L. J. Heat Transfer on Continuous Solid Surfaces / L. J. Crane // Ing. Arch. Bd. – 1974. - Vol. 23. – P. 203–214.
7. Crane L. J. Boundary Layer Flow on a Circular Cylinder Moving in Fluid at Rest / L. J. Crane // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). - 1972. – Vol. 23. – P. 201–212.
8. Dreglea A. I. Robust Numerical Method Based On Blasius' Approach For Flow Past a Flat Plate in The Case Of Heat Transfer For Large Reynolds Numbers / A. I. Dreglea, G. I. Shishkin // Abstracts of the International Conference CMAM-1, Minsk, Belarus. – 2003. – P. 19–20.
9. Dreglea A. I. Robust Numerical Method Based on Blasius Approach for a Flow Past Flat Plate For Large Reinolds Numbers / A. I. Dreglea, G. I. Shishkin // Proc. of Irish Soc. Sci. and Eng. Comput.: Ann. Symp., Irish Soc. Sci. and Eng. Comput. Publ., 23–24 May, 2003. – Belfield, Dublin, 2003. – P. 14.
10. Robust Computational Techniques for Boundary Layers / P. A. Farrel, A. F. Hegarty, J. J. H. Miller, G. I. Shishkin. – Florida, USA : Chapman and hall CRC, 2000. – 275 p.
11. Saban R. A. Skin-friction and heat-transfor characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow / R. A. Saban, R. Bond // J. Aero. Science. – 1951. - Vol. 18. – P. 671.

Aliona Dreglea

Application of the Seban and Bond Transform and the Cauchy – Kovalevskaya Theorem for one Boundary Layer Problem for Navier – Stocks Equations

Abstract. The Seban and Bond change of variables and the Cauchy – Kovalevskaya theorem are employed for solution to the boundary layer problem derived from the Navier – Stocks equations in the theory of melt spinning process.

Keywords: melt spinning, PDE, Navier-Stoks equation.

Дрегля Алена Ивановна, м.н.с, отдел НИЧ, Иркутский государственный университет, 664033, Иркутск. ул. К. Маркса, 1, (adreglea@gmail.com)

Dreglea Aliona, Irkutsk State Univertsity, 1 K. Marksa St., 664033, Irkutsk, Russia, (adreglea@gmail.com)