Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 3. С. 41—55

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.6

О сходимости блочных итерационных методов

Е. Д. Котина
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. В работе рассматриваются блочные итерационные методы, исследуются вопросы сходимости блочных итерационных методов при выполнении «блочных условий Адамара» и «блочной» неприводимости матрицы системы.

Ключевые слова: блочные матрицы; блочные условия Адамара; блочные итерационные методы; сходимость блочных итерационных методов.

1. Введение

Большое количество отечественных и зарубежных работ посвящено проблемам решения дифференциальных уравнений с частными производными, сведению их к решению систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами [2; 3; 5-13; 17; 18; 20; 22; 23].

Теоремы сходимости итераций методов Якоби и Гаусса—Зейделя, последовательной верхней релаксации рассматриваются в многочисленных исследованиях, приведем здесь только некоторые из них [6, 8, 10, 17, 18, 20, 22, 23]. В книге [8] формулируются достаточные условия сходимости в норме H_A блочного метода Гаусса – Зейделя, метода последовательной релаксации при выполнении условия самосопряженности и положительной определенности оператора системы. Стандартным при доказательстве теорем сходимости также является предположение о том, что матрица системы имеет диагональное преобладание, в [6, 17] приводятся доказательства теорем сходимости итераций методов Якоби и Гаусса – Зейделя для данного случая.

Во многих статьях рассматриваются вопросы оценки спектральных радиусов для блочных матриц, например, [14, 21].

В данной статье рассматриваются блочные итерационные методы Якоби, Гаусса – Зейделя и последовательной верхней релаксации. Исследуются вопросы сходимости блочных итерационных методов при выполнении «блочных условий Адамара» и «блочной» неприводимости матрицы системы. Доказывается положительная определенность матрицы системы при выполнении определенных условий.

2. Блочные матрицы

Рассмотрим матрицу H с вещественными или комплексными компонентами размера $M \times M$, разбитую на n^2 блоков H_{ij} с размерами соответственно $s_i \times s_j$, где $s_k \geq 1$, $k = \overline{1, n}$, и $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = M$:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{n,n-1} & H_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Если выполняются «блочные условия Адамара»

$$\|H_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \|H_{ij}\| > 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

то по обобщенной **теореме Адамара** [1], H — невырожденная матрица. Здесь $\|\cdot\|$ операторная норма прямоугольной матрицы, подчиненная норме векторов [1].

Под «ослабленными блочными условиями Адамара» будем понимать условия:

$$\|H_{ii}^{-1}\|^{-1} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \|H_{ij}\| \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Заметим, что условия 2.2, 2.3 называют также условиями блочного строгого диагонального преобладания и блочного диагонального преобладания для матрицы H относительно разбиения 2.1, соответственно [4, 15].

Определение 1. *Будем говорить, что для блочной матрицы H, имеет место «блочная» приводимость, если перестановкой блочных рядов она может быть приведена к виду*

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ H_2 & H_3 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где H_1 и H_3 блочные матрицы, число блочных строк в которых равно числу блочных столбцов. В противном случае будем говорить, что имеет место «блочная» неприводимость матрицы H [1].

Под перестановкой блочных рядов в матрице H будем понимать соединение перестановки блочных строк с такой же перестановкой блочных столбцов матрицы H.

На блочные матрицы можно распространить теорему Ольги Тауски (см. работы [1, 14, 15, 19]):

Теорема 1. *Ольги Тауски (обобщенная). Если для матрицы H имеет место «блочная» неприводимость и выполняются «ослабленные блочные условия Адамара», причем, по крайней мере, в одном из этих условий выполняется строгое неравенство, то матрица H — невырожденна.*

Заметим, что здесь условия Адамара для блочных строк можно так же заменить условиями Адамара для блочных столбцов.

3. Блочные итерационные методы

Рассмотрим линейную систему

$$Hz = q, \tag{3.1}$$

где H — заданная невырожденная матрица размера $M \times M$, q — заданный вектор–столбец, состоящий из M компонент, z — искомый вектор неизвестных, размерности M.

Рассмотрим разбиение системы 3.1, согласно структуре матрицы H, описанной выше в 2.1:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{n,n-1} & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Здесь z_i, q_i представляют собой подвекторы векторов z, q, состоящие из s_i компонент, согласно разбиению матрицы H.

Будем рассматривать линейные стационарные блочные методы первого порядка, согласованные с системой 3.1 [6], которые могут быть записаны в виде

$$z^{k+1} = Gz^k + d, \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{3.3}$$

G — итерационная матрица данного метода размера $M \times M$, а d — соответствующий известный вектор.

Пусть $\overline{z}$ — единственное решение системы 3.1, тогда итерационный метод 3.3 называют согласованным с системой 3.1, если

$$\overline{z} = G\overline{z} + d. \tag{3.4}$$

Как известно [6, 10], необходимым и достаточным условием сходимости итерационного метода 3.3 к единственному решению системы 3.1 при любом начальном приближении z_0 является

$$\rho(G) < 1, \tag{3.5}$$

где $\rho(G)$ — спектральный радиус матрицы G.

Согласованные итерационные методы возникают естественным образом при следующем подходе. Пусть

$$H = P - Q \tag{3.6}$$

— расщепление матрицы H, и предположим, что матрица P — невырожденная. Легко убедиться в том, что процесс

$$z^{k+1} = P^{-1}Qz^k + P^{-1}q, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.7}$$

является согласованным итерационным методом. Для таких методов вопрос о сходимости сводится к установлению того, что $\rho(P^{-1}Q) < 1$ [6, 17].

Далее рассмотрим блочные методы Якоби, Гаусса – Зейделя и метод последовательной верхней релаксации *SOR (Successive Over Relaxation).*

Представим матрицу H следующим образом:

$$H = D - E - F, \tag{3.8}$$

где D — матрица, состоящая из диагональных блоков

$$D = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H_{nn} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -H_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H_{n1} & \cdots & -H_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -H_{12} & \cdots & -H_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

заметим, что нулями здесь обозначены нулевые блоки соответствующих размерностей.

Блочный метод Якоби

Блочный метод Якоби решения системы 3.1, отвечающий введенному разбиению 3.2, имеет вид

$$H_{ii}z_i^{k+1} = -\sum_{j \neq i}^{n} H_{ij}z_j^k + q_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.9}$$

или с учетом 3.8

$$Dz^{k+1} = (E+F)z^k + q, \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{3.10}$$

Блочный метод Гаусса – Зейделя

Блочный метод Гаусса – Зейделя решения системы 3.1, отвечающий введенному разбиению 3.2, имеет вид

$$H_{ii}z_i^{k+1} = -\sum_{j<i}^{n} H_{ij}z_j^{k+1} - \sum_{j>i}^{n} H_{ij}z_j^k + q_i, \tag{3.11}$$

$$i = 1,\ldots,n, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

или с учетом 3.8, используя матричные обозначения

$$(D-E)z^{k+1} = Fz^k + q, \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{3.12}$$

Методы Якоби и Гаусса—Зейделя также можно записать в виде

$$Pz^{k+1} = (P-H)z^k + q,$$

где $P - Q$ — расщепление матрицы H, для метода Якоби

$$P = D,$$

для метода Гаусса – Зейделя

$$P = D - E.$$

Блочный метод последовательной верхней релаксации

Блочный метод последовательной верхней релаксации решения системы 3.1, отвечающий введенному разбиению 3.2, имеет вид

$$H_{ii}z_i^{k+1} = \omega\Big(-\sum_{j<i}^{n} H_{ij}z_j^{k+1} - \sum_{j>i}^{n} H_{ij}z_j^k + q_i\Big) + (1-\omega)H_{ii}z_i^k, \tag{3.13}$$

$$i = 1,\ldots,n, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

В матричном виде процедура SOR может быть записана, как

$$Dz^{k+1} = \omega(Ez^{k+1} + Fz^k + q) + (1-\omega)Dz^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{3.14}$$

Данный метод базируется на расщеплении

$$\omega H = (D - \omega E) - (\omega F + (1-\omega)D).$$

Заметим, что при $\omega = 1$ мы имеем метод Гаусса – Зейделя.

4. Сходимость блочных итерационных методов

Рассмотрим доказательство несколько общих теорем, обеспечивающих сходимость рассмотренных блочных итерационных методов.

Докажем следующую теорему, являющуюся блочным аналогом теоремы, рассмотренной в [17]:

Теорема 2. *Если для матрицы H выполняются «блочные условия Адамара» 2.2 или для матрицы H имеет место «блочная» неприводимость и выполняются «ослабленные блочные условия Адамара» 2.3, причем, по крайней мере, в одном из этих условий выполняется строгое неравенство, то согласованные с системой 3.1 итерационные методы Якоби и Гаусса – Зейделя сходятся при любом начальном приближении z_0.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение теоремы при выполнении «блочных условий Адамара». Пусть λ — наибольшее по модулю собственное число итерационной матрицы $G = P^{-1}Q$ ($G_{JA} = D^{-1}(E + F)$ для метода Якоби и $G_{GS} = (D-E)^{-1}F$ для метода Гаусса—Зейделя), и пусть z — собственный вектор, соответствующий данному собственному числу. Выберем такой номер m, что

$$\|z_i\| \leq \|z_m\|, \tag{4.1}$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Можем записать

$$\lambda z_m = -\sum_{j=1, j\neq m}^{n} H_{mm}^{-1} H_{mj} z_j,$$

Тогда из 2.2 следует, что

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1, j\neq m}^{n} \frac{\|H_{mj}\|}{\|H_{mm}^{-1}\|^{-1}} < 1,$$

Что доказывает утверждение теоремы относительно сходимости метода Якоби.

Для доказательства сходимости итераций Гаусса – Зейделя рассмотрим соответствующее уравнение $(D - E)^{-1}Fz = \lambda z$ и выпишем m-й блочный ряд в следующем виде:

$$-\sum_{j=m+1}^{n} H_{mj}z_j = \lambda(H_{mm}z_m + \sum_{j=1}^{m-1} H_{mj}z_j.$$

Умножим данное равенство на H_{mm}^{-1}:

$$-H_{mm}^{-1}\sum_{j=m+1}^{n} H_{mj}z_j = \lambda(z_m + H_{mm}^{-1}\sum_{j=1}^{m-1} H_{mj}z_j).$$

Далее, воспользовавшись известными неравенствами для норм и неравенством 4.1, получаем

$$|\lambda| \le \frac{\sum_{j=m+1}^{n}\|H_{mj}\|}{\|H_{mm}^{-1}\|^{-1} - \sum_{j=1}^{m-1}\|H_{mj}\|} =$$

$$= \frac{\sum_{j=m+1}^{n}\|H_{mj}\|}{\sum_{j=m+1}^{n}\|H_{mj}\| + (\|H_{mm}^{-1}\|^{-1} - \sum_{j=1,j\neq m}^{n}\|H_{mj}\|)} < 1.$$

Таким образом, мы доказали утверждение теоремы при выполнении «блочных условий Адамара». При выполнении условий «блочной» неприводимости матрицы H и «ослабленных блочных условий Адамара» с выполнением, по крайней мере, в одном из этих условий строгого неравенства на основании вышеизложенного можно лишь сделать вывод, что

$$\rho(G) \le 1,$$

где G — итерационная матрица для метода Якоби (G_{JA}) или для метода Гаусса—Зейделя (G_{GS}). Докажем, что в этом случае тоже имеет место строгое неравенство: $\rho(G) < 1$. Будем доказывать от противного, пусть λ — собственное число матрицы $P^{-1}Q$ и пусть $|\lambda| = 1$. Тогда матрица $(P^{-1}Q - \lambda I)$ — особая, здесь I — единичная матрица. Тогда очевидно, что и матрица $(Q - \lambda P)$ также будет являться особой, но так как $|\lambda| = 1$, то для матрицы $(Q - \lambda P)$ будет иметь место «блочная» неприводимость и выполнятся «ослабленные блочные условия Адамара», причем с выполнением, по крайней мере, в одном из этих условий строгого неравенства, а тогда мы получаем противоречие с теоремой 1. Следовательно, предположение о том, что у матрицы $P^{-1}Q$ может быть собственное число: $|\lambda| = 1$ - неверно. Получаем, что $\rho(G) < 1$. □

Далее будем рассматривать матрицы с вещественными компонентами и норму матрицы согласованную с евклидовой нормой вектора. Сформулируем следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть H — симметричная матрица с блочным разбиением 2.1, диагональные блоки которой являются положительно определенными. Обозначим через λ_i минимальное собственное число матрицы диагонального блока H_{ii}. Если для матрицы H выполняются следующие условия:*

$$\lambda_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \|H_{ij}\| \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

причем, по крайней мере, в одном из этих условий выполняется строгое неравенство, то матрица H — положительно определенная.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$W(z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

запишем ее следующим образом:

$$W(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i^T H_{ii} z_i + z_1^T \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} H_{1j} z_j + z_2^T \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} H_{2j} z_j + \cdots + z_n^T \sum_{j=1, j\neq n}^{n} H_{nj} z_j.$$

Далее воспользуемся соотношением Рэлея [12] и известными неравенствами для норм [1, 13]. Получаем

$$W(z) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|z_i\|^2 - \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} \|H_{1j}\| \|z_1\| \|z_j\| - \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} \|H_{2j}\| \|z_2\| \|z_j\| - \ldots$$

$$- \sum_{j=1, j\neq n}^{n} \|H_{nj}\| \|z_n\| \|z_j\|. \tag{4.3}$$

Заметим, что собственные числа симметричной положительно-определенной матрицы больше нуля (т. е. $\lambda_i > 0$). Производя дальнейшую оценку 4.3 квадратичной формы, получаем:

$$W(z) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|z_i\|^2 - \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} \|H_{1j}\| \left(\frac{\|z_1\|^2}{2} + \frac{\|z_j\|^2}{2} \right) -$$

$$-\sum_{j=1,j\neq 2}^{n}\|H_{2j}\|\left(\frac{\|z_2\|^2}{2}+\frac{\|z_j\|^2}{2}\right)-\dots-\sum_{j=1,j\neq n}^{n}\|H_{nj}\|\left(\frac{\|z_n\|^2}{2}+\frac{\|z_j\|^2}{2}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|z_i\|^2-\frac{1}{2}\|z_1\|^2\left[\sum_{j=1,j\neq 1}^{n}\|H_{1j}\|+\|H_{21}\|+\dots+\|H_{n1}\|\right]$$

$$-\frac{1}{2}\|z_2\|^2\left[\|H_{12}\|+\sum_{j=1,j\neq 2}^{n}\|H_{2j}\|+\dots+\|H_{n2}\|\right]-\dots$$

$$-\frac{1}{2}\|z_n\|^2\left[\|H_{1n}\|+\|H_{2n}\|+\dots+\sum_{j=1,j\neq n}^{n}\|H_{nj}\|\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|z_i\|^2-\frac{1}{2}\|z_1\|^2\left[\sum_{j=1,j\neq 1}^{n}\|H_{1j}\|+\sum_{j=1,j\neq 1}^{n}\|H_{j1}\|\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\|z_2\|^2\left[\sum_{j=1,j\neq 2}^{n}\|H_{2j}\|+\sum_{j=1,j\neq 2}^{n}\|H_{j2}\|\right]-\dots$$

$$-\frac{1}{2}\|z_n\|^2\left[\sum_{j=1,j\neq n}^{n}\|H_{nj}\|+\sum_{j=1,j\neq n}^{n}\|H_{jn}\|\right].$$

Так как $H_{ij}=H_{ji},\ i\neq j$, то можем записать

$$W(z)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|z_i\|^2-\|z_1\|^2\sum_{j=1,j\neq 1}^{n}\|H_{1j}\|-\|z_2\|^2\sum_{j=1,j\neq 2}^{n}\|H_{2j}\|-\dots$$

$$-\|z_n\|^2\sum_{j=1,j\neq n}^{n}\|H_{nj}\|.$$

И, окончательно, имеем

$$W(z) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \|H_{ij}\| \right) \|z_i\|^2. \qquad (4.4)$$

Исходя из выполнения условий 4.2 теоремы, получаем, что в правой части неравенства 4.4 все выражения в скобках неотрицательны, а хотя бы одно строго больше нуля, делаем вывод, что данная квадратичная форма $W(z)$ является положительно определенной. □

Следствие 1. *Если матрица A является симметричной с положительными диагональными элементами и для нее имеет место диагональное преобладание ($a_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{M} |a_{ij}|$, $i = \overline{1, n}$, причем строгое неравенство выполняется хотя бы для одного i) [6], то матрица A будет положительно определенной.*

Мы получим утверждение данного следствия, если рассмотрим в теореме блоки размерности 1×1.

Замечание 1. Пусть H — эрмитова матрица [10] с блочным разбиением 2.1, диагональные блоки которой являются положительно определенными эрмитовыми матрицами. Тогда при выполнении условия 4.2, матрица H будет являться положительно определенной эрмитовой матрицей, т. е. соответствующая этой матрице форма Эрмита будет положительно определенной.

Замечание 2. Пусть норма матрицы является подчиненной евклидовой норме вектора, тогда $\lambda_i = \|H_{ii}^{-1}\|^{-1}$ и условия 4.2 теоремы 3 могут быть записаны, как «ослабленные блочные условия Адамара» 2.3.

Определение 2. *Будем говорить, что вещественная не обязательно симметричная матрица V является положительно определенной, если*

$$z^T V z > 0 \qquad (4.5)$$

для всех вещественных векторов $z \neq 0$ [6, 17]. Это эквивалентно требованию, чтобы симметричная часть матрицы V, равная $(V + V^T)/2$, была положительно определенной в обычном смысле.

Определение 3. *Расщепление $H = P - Q$ называется P–регулярным, если матрица P невырождена, а матрица $P + Q$ положительно определена [6].*

Далее приведем формулировку известной теоремы о P– регулярном расщеплении [6]:

Теорема 4. *Если H — симметричная положительно-определенная матрица и $H = P - Q$ ее P–регулярное расщепление, то $\rho(P^{-1}Q) < 1$.*

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 5. *Если для матрицы H выполняются условия теоремы 3, то при любом $\omega \in (0, 2)$ и при любом начальном приближении z_0 итерации метода последовательной верхней релаксации сходятся к решению уравнения $Hz = q$.*

Доказательство. Так как выполняются условия теоремы 3, то матрица будет положительно определенной. Далее, так как, $H = D - E - E^T$, то матрица перехода (итерационная матрица) метода SOR имеет вид

$$G_{SOR} = (D - \omega E)^{-1}(\omega E^T + (1 - \omega)D),$$

а матрицы P и Q следующие:

$$P = \omega^{-1}(D - \omega E), Q = \omega^{-1}(\omega E^T + (1 - \omega)D).$$

Покажем, что данное расщепление является P–регулярным. Так как диагональные блоки матрицы D положительно определены, то матрица P невырожденная. Рассмотрим матрицу $P + Q$. Рассмотрим следующее выражение

$$\frac{1}{2}(P + P^T) + \frac{1}{2}(Q + Q^T) = \frac{1}{2\omega}(2D - \omega E - \omega E^T)+$$

$$+\frac{1}{2\omega}(\omega E + \omega E^T + 2(1 - \omega)D) = \frac{2 - \omega}{\omega}D.$$

Получаем, что матрица $P + Q$ положительно определена при любом $\omega \in (0, 2)$, следовательно, данное расщепление P–регулярное по определению, а, тогда применяя теорему 4, получаем, что $\rho(P^{-1}Q) < 1$, следовательно, при любом начальном приближении z_0 итерации метода последовательной верхней релаксации сходятся к решению уравнения $Hz = q$. □

5. Блочные матрицы с блоками второго порядка

Рассмотрим более подробно случай, когда все блоки H_{ij} в 2.1 имеют размер 2×2, он порождается системами дифференциальных уравнений с частными производными, состоящими из двух уравнений.

Так, например, при дискретизации системы двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя неизвестными функциями, мы можем получить линейную систему вида

$$\begin{aligned} Ax + By &= d, \\ Bx + Cy &= e. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — искомые значения одной неизвестной функции, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ — искомые значения второй неизвестной функции, $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^T$ — векторы с вещественными коэффициентами, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$ матрицы размерности $n \times n$ с вещественными коэффициентами, матрица B — это матрица связи.

Если мы теперь введем следующие обозначения $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$, где $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, то систему 5.1 можно записать в виде 3.1:

$$Hz = q, \tag{5.2}$$

здесь H — блочная матрица с квадратными блоками второго порядка, сформированная следующим образом:

$$H = D - E - F,$$

$$D = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_{nn} \end{pmatrix}, H_{ii} = \begin{pmatrix} a_{ii} & b_{ii} \\ b_{ii} & c_{ii} \end{pmatrix},$$

$$E + F = - \begin{pmatrix} 0 & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & 0 & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, H_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ b_{ij} & c_{ij} \end{pmatrix}, i \neq j;$$

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T, q_i = \begin{pmatrix} d_i \\ e_i \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим несколько следствий из теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть для матрицы H, выполняются следующие условия: 1) $a_{ii}c_{ii} - b_{ii}^2 > 0, a_{ii} > 0, c_{ii} > 0, i = \overline{1, n}$,*

$$\text{2)} \qquad \frac{a_{ii} + c_{ii}}{2} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \|H_{ij}\| + \sqrt{\left(\frac{a_{ii} - c_{ii}}{2}\right)^2 + b_{ii}^2}, i = \overline{1, n} \tag{5.3}$$

и для некоторого i

$$\frac{a_{ii}+c_{ii}}{2} > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \|H_{ij}\| + \sqrt{\left(\frac{a_{ii}-c_{ii}}{2}\right)^2 + b_{ii}^2},$$

3) условие «блочной» непроводимости.

Тогда итерационные методы Якоби и Гаусса—Зейделя сходятся при любом начальном приближении z_0 к единственному решению системы 5.2.

Следствие 3. *Пусть матрица C отличается от матрицы A только диагональными элементами, т.е. $c_{ij} = a_{ij}$, $i \neq j$, а матрица B — диагональная, т.е. $b_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$, тогда мы можем сформулировать следующее достаточное условие сходимости.*

Если для матрицы H, выполняются условия:

1) $a_{ii}c_{ii} - b_{ii}^2 > 0, a_{ii} > 0, c_{ii} > 0, i = \overline{1,n}$,

$$\text{2)} \qquad \frac{a_{ii}+c_{ii}}{2} \geq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \sqrt{\left(\frac{a_{ii}-c_{ii}}{2}\right)^2 + b_{ii}^2}, i = \overline{1,n} \qquad (5.4)$$

и для некоторого i

$$\frac{a_{ii}+c_{ii}}{2} > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \sqrt{\left(\frac{a_{ii}-c_{ii}}{2}\right)^2 + b_{ii}^2},$$

3) условие «блочной» непроводимости.

Тогда итерационные методы Якоби и Гаусса – Зейделя сходятся при любом начальном приближении z_0 к единственному решению системы 5.2.

Условия 5.4 получаются из условий 5.3, если мы возьмем норму матрицы H_{ij} подчиненную евклидовой норме, в данном случае она будет равна

$$\|H_{ij}\| = |a_{ij}|.$$

Рассмотрим далее случай симметричности матрицы H. Запишем условие симметричности матрицы A:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Следствие 4. *В случае, когда матрица B — диагональная, а матрица C отличается от матрицы A только диагональными элементами, т. е. $c_{ij} = a_{ij}$, $i \neq j$, причем $a_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, и выполняются условия 5.4, то при любом $\omega \in (0,2)$ и при любом начальном приближении z_0 итерации метода последовательной верхней релаксации сходятся к решению уравнения $Hz = q$.*

Очевидно, что в рассматриваемом случае выполняются условия теоремы 3, а тогда действует теорема 5.

6. Заключение

В заключение приведем пример системы дифференциальных уравнений с частными производными, которая, при замене частных производных соответствующими конечными разностями приводится к алгебраической системе вида 5.1, с матрицей, удовлетворяющей условиям 5.4, а так же условию симметричности.

Таким примером является система для определения оптического потока [5, 16]:

$$
\begin{aligned}
-\alpha^2\Delta u + \rho_x^2 u + \rho_x\rho_y\nu = -\rho_t\rho_x,\\
-\alpha^2\Delta \nu + \rho_y^2 \nu + \rho_x\rho_y u = -\rho_t\rho_y.
\end{aligned}
$$

Здесь $\rho = \rho(t, x, y, z)$, ρ_t, ρ_x, ρ_y — соответствующие частные производные, α^2 — некоторая постоянная.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
2. Голуб Дж. Матричные вычисления : пер. с англ. / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М. : Мир, 1999. – 548 с.
3. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений : пер. с англ. / А. Джордж, Дж. Лю. – М. : Мир, 1984. – 333 с.
4. Икрамов Х. Д. О блочном аналоге свойства диагонального преобладания / Х. Д. Икрамов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. мат. кибернетика. – 1983. – № 4. – С. 52–55.
5. Котина Е. Д. Коррекция движения при томографических и планарных радионуклидных исследованиях / Е. Д. Котина, К. М. Максимов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2011. – С. 29–36.
6. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем : пер. с англ. / Дж. Ортега. – М. : Мир, 1991. – 367 с.
7. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение : пер. с англ. / Дж. Райс. – М. : Мир, 1984. – 264 с.
8. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 324 с.
9. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – М. : Мир, 1985. – 264 с.
10. Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – М., 1963. – 734 с.
11. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений : пер. с англ. / Дж. Форсайт, К. Молер. – М. : Мир, 1969. – 167 с.
12. Хейгеман Л. Прикладные итерационные методы : пер. с англ. / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М. : Мир, 1986. – 446 с.

13. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.
14. Cheng-Yi Zhang. The Eigenvalue Distribution of Block Diagonally Dominant Matrices and Block H-Matrices / Cheng-Yi Zhang, Shuanghua Luo, Aiqun Huang, Junxiang Lu // Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081–3810. A publication of the International Linear Algebra Society. – 2010. – Vol. 20. – P. 621–639.
15. Feingold D. G. Block Diagonally Dominant Matrices and Generalizations of the Gerschgorin Circle Theorem / D. G. Feingold, R. S. Varga // Pacific Journal of Mathematics. – 1962. – Vol. 12. – P. 1241–1250.
16. Horn B. K. P. Determining optical flow / B. K. P. Horn, B. G. Schunck // Artificial intelligence. – 1981. – Vol. 17. – P. 185–203.
17. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems / Y. Saad. – Philadelphia : Siam, 2003. – 552 p.
18. Saad Y. Iterative solution of linear systems in the 20th century / Y. Saad, H. A. Vorst // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2003. – Vol. 12, iss. 1–2. – P. 1–33.
19. Taussky O. A Recurring Theorem on Determinants / O. Taussky // Amer. Math. Monthly. – 1949. – Vol. 51 – P. 672–676.
20. Varga R. S. Matrix Iterative Analysis / R. S. Varga. – Springer Series in Computational Mathematics, 2000. – 322 p.
21. Wei Zhang Bounds for the Spectral Radius of Block H- Matrices / Wei Zhang, Han. Zheng-Zhi // Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081–3810. A publication of the International Linear Algebra Society. – 2006. – Vol. 15. – P. 269–273.
22. Young D. M. Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type / D. M. Young // Ph. D. Thesis. 1950. — 74 p.
23. Young D. M. Iterative Solution of Large Linear Systems / D. M. Young. – N. Y. : Academic Press, 1971. – 563 p.

E.D. Kotina

On convergence of block iterative methods

Abstract. In this work block iterative methods are considered, the convergence of block iterative methods are investigated under fulfillment of block Hadamard conditions and block irreducibility of the matrix.

Keywords: block matrices, block Hadamard criteria, block iterative methods, convergence of block iterative methods.

Котина Елена Дмитриевна, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35, тел.: (812)4284868 (ekotina123@mail.ru)

Kotina Elena, Saint-Petersburg State University, 35, Universitetskij pr., Saint-Petersburg, 198504 professor, Phone: (812)4284868 (ekotina123@mail.ru)