Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 3. С. 56—62

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.1

О тождествах с полиномиальными коэффициентами *

В.П. Кривоколеско
Красноярский государственный технологический университет

Е.К. Лейнартас
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Используя методы теории производящих функций и свойства композиции Адамара кратных степенных рядов, получена серия тождеств с полиномиальными коэффициентами, аналогичных тождеству Добеши – Цайльбергера – Егорычева.

Ключевые слова: комбинаторные суммы; производящие функции; интегральные представления.

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ — точки n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, а $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — точки n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$. Подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами, обозначим $\mathbb{Z}^n_+$. Далее обозначим $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$, $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n}$ и, если $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$, то $\beta! = \beta_1! \cdots \beta_n!$. Полиномиальные коэффициенты определяются для $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ следующей формулой

$$\frac{|\beta|!}{\beta!} = \frac{(\beta_1 + \dots + \beta_n)!}{\beta_1! \cdots \beta_n!}.$$

Фиксируем $s \in \mathbb{Z}^n_+$ и $\mu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Для $j = \mu, \mu + 1, \dots, n$ обозначим $B^s_{\mu,j} = \{\beta \in \mathbb{Z}^n_+ : \beta_\mu \le s_\mu, \dots, \beta_{j-1} \le s_{j-1}, \beta_j = s_j, \beta_{j+1} \le s_{j+1}, \dots, \beta_n \le s_n\}$.

Заметим, что для $\mu = 1$ множество $B^s_{\mu,j}$ состоит из конечного числа точек, а для $\mu > 1$–из бесконечного.

* Первый автор поддержан грантом Президента РФ НШ - 7347.2010, второй автор поддержан грантами РФФИ 11.01-000852, а также МО и Науки РФ 1.34.11

Теорема 1. *Если* $|z_1| + \cdots + |z_{\mu-1}| < 1$ *и* $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1$, *то для* $\mu = 1, \ldots, n$ *справедливы следующие тождества*

$$\sum_{j=\mu}^{n} z_j \sum_{\beta \in B^s_{\mu,j}} \frac{|\beta|!}{\beta!} z^\beta \equiv 1. \tag{1.1}$$

Прежде чем доказывать теорему, прокомментируем «крайние» случаи $\mu = 1$ и $\mu = n$.

Если $\mu = 1$, то ситуация следующая. Конструирование вейвлетов с компактными носителями (Daubechies wavelets) приводит к необходимости решить функциональное уравнение

$$(1-z)^N P(z) + z^N P(1-z) \equiv 1, 0 \leq z \leq 1$$

относительно неизвестной функции $P(z)$. Многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий данному уравнению, имеет вид

$$P_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1+k)!}{(N-1)!k!} z^k,$$

т.е. справедливо тождество (см. [9], [6])

$$(1-z)^N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1+k)!}{(N-1)!k!} z^k + z^N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1+k)!}{(N-1)!k!} (1-z)^k = 1. \tag{1.2}$$

Это тождество получается из теоремы 1 при $n = 2$ и $s_1 = s_2 = N - 1$. Многочлены $P_N(z)$ используются далее в вейвлет-теории для построения фильтров Добеши.

Цайльбергер Д. (Zeilberger D.,[10]) дал вероятностную интерпретацию тождества 1.2 и привел вариант его обобщения на многомерный случай. Относительно теоремы 1 этот вариант означает, что рассмотрен случай $s_1 = s_2 = \cdots = s_n$. Случай же произвольных s_j, т.е. формула 1.1 для $\mu = 1$ доказан в работе Г.П. Егорычева [2]. Отметим, что наряду с теорией вейвлетов и теорией вероятностей тождество, аналогичное тождеству 1.2, использовалось в работе [7] при исследовании асимптотических распределений В.К. Иванова. Кроме того, в работе [3] был получен набор тождеств с биномиальными коэффициентами, одно из которых совпадает с 1.2. В последнем случае источником тождеств оказалось интегральное представление функций, голоморфных в ограниченных линейно выпуклых областях с кусочно-регулярной границей (см. [4]). В данном представлении функция выражается через сумму интегралов по множествам различных размерностей с ядрами, построенными с помощью кратной геометрической прогрессии. Их разложение в ряды и последующее почленное интегрирование и приводит к тождествам с биномиальными коэффициентами. Как оказалось структура ядер этих интегральных представлений аналогична ядру интегрального представления композиции Адамара кратных степенных рядов (см. [5]). Применение же конструкции композиции Адамара позволяет не только существенно упростить доказательство тождества для $\mu = 1$ в n-мерном случае, но и естественным образом получить тождества для остальных значений μ.

Другой «крайний» случай $\mu = n$ связан с бесконечными последовательностями испытаний Бернулли. Тождество 1.1 при $n = 2$ можно записать в виде

$$z_2 \sum_{\beta_1=0}^{\infty} \frac{(\beta_1+s_2)!}{\beta_1! s_2!} z_1^{\beta_1} z_2^{s_2} = 1, \tag{1.3}$$

которое в отрицательном биномиальном распределении допускает следующую интерпретацию.

Пусть z_1—вероятность успеха, а z_2—вероятность неудачи в схеме Бернулли. Тогда $\frac{(\beta_1+s_2)!}{\beta_1! s_2!} z_1^{\beta_1} z_2^{s_2}$— это вероятность того, что в серии $(\beta_1 + s_2)$ испытаний произойдет β_1 успех и s_2 неудач. Проводим испытания до тех пор, пока не наступит ровно s_2+1 неудача, тогда левая часть равенства 1.3 есть вероятность того, что s_2+1 неудача наступила после конечного числа испытаний.

Таким образом (см. [8], стр. 181) равенство 1.3 означает, что возможностью существования бесконечной последовательности испытаний с числом неудач меньшим, чем $(s_2 + 1)$ можно пренебречь.

Приведем конструкцию композиции Адамара кратных степенных рядов ([5]).

Пусть даны два степенных ряда кратности n и m соответственно:

$$f(\xi) = \sum_{\alpha \geq 0} a(\alpha)\xi^{\alpha}, \tag{1.4}$$

$$g(\eta) = \sum_{\beta \geq 0} b(\beta)\eta^{\beta}, \tag{1.5}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, а «векторное» неравенство $\alpha \geq 0$ означает, что $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть, кроме того, дано линейное отображение $D : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ с матрицей, которую мы будем обозначать той же буквой

$$D = \|d_{ij}\|_{m \times n}, \tag{1.6}$$

где $d_{ij} \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Определим композицию рядов 1.4 и 1.5 следующим образом

$$h(z) = \sum_{\beta \geq 0} a(\beta D + s) b(\beta) z^{\beta}. \tag{1.7}$$

Здесь $s \in \mathbb{Z}^n$ и s фиксировано, а мультииндекс β умножается слева на матрицу 1.6 обычным образом. Если $m = n = 1, d_{11} = 1, s_1 = 0$, то 1.7 — классическая адамаровская композиция рядов (см. [1]). Поскольку в формулах 1.4, 1.5 мультииндексы α и β принимают неотрицательные значения, то 1.7 можно (и удобнее) записать в виде

$$h(z) = \sum_{\substack{\beta D+s\geq 0\\ \beta\geq 0}} a(\beta D+s)b(\beta)z^{\beta}, \tag{1.8}$$

т.е. в виде суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования.

Приведем интегральное представление для композиции Адамара.

Лемма 1. *Пусть функция 1.4 голоморфна в замкнутом полицилиндре* $U = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi| \leq r_k, k = 1, \dots, n\}$, *а функция 1.5 — в замкнутом полицилиндре* $V = \{\eta \in \mathbb{C}^m : |\eta_i| \leq R_i, i = 1, \dots, m\}$. *Тогда функция 1.8 голоморфна в полицилиндре* $W = \{z \in \mathbb{C}^m : |z_i| < \rho_i, i = 1, \dots, m\}$, *где* $\rho_i = r_1^{d_{i1}} \cdot \dots \cdot r_n^{d_{in}} R_i$, $i = 1, \dots, m$, *и для* $z \in W$ *справедливо интегральное представление*

$$h(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\gamma} f(\xi) g(\frac{z}{\xi^D}) \cdot \frac{d\xi}{\xi^{s+I}}, \tag{1.9}$$

где $\xi^D = (\xi_1^{d_{11}} \cdot \dots \cdot \xi_n^{d_{1n}}, \dots, \xi_1^{d_{m1}} \cdot \dots \cdot \xi_n^{d_{mn}})$, $\gamma = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_k| = r_k$, $k = 1, \dots, n\}$, $I = (1, \dots, 1)$, $d\xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$.

Доказательство.

Разложим подинтегральные функции 1.4 и 1.5 в равномерно сходящиеся на γ ряды, перемножим их и почленно проинтегрируем, учитывая свойство

$$\int_{\gamma} \xi^{\alpha} \cdot \frac{d\xi}{\xi} = \begin{cases} (2\pi i)^{-n}, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned}(2\pi i)^{-n} \int_{\gamma} f(\xi) g(\frac{z}{\xi^D}) \cdot \frac{d\xi}{\xi^{s+I}} = \\ = (2\pi i)^{-n} \int_{\gamma} (\sum_{\alpha\geq 0} a(\alpha)\xi^{\alpha})(\sum_{\beta\geq 0} b(\beta)\frac{z^{\beta}}{\xi^{\beta D}}) \cdot \frac{d\xi}{\xi^{s+I}} = \\ = (2\pi i)^{-n} \int_{\gamma} \sum_{\alpha,\beta\geq 0} a(\alpha)b(\beta)z^{\beta}\xi^{\alpha-\beta D-s} \cdot \frac{d\xi}{\xi^{s+I}} = \\ = \sum_{\substack{\beta D+s\geq 0\\ \beta\geq 0}} a(\beta D+s)b(\beta)z^{\beta} = h(z).\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функции

$$f_j(\xi) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(1-\xi_k)}, g(\xi) = \frac{1}{(1-\xi_1-\cdots-\xi_n)}, j = 1,\ldots,n.$$

Коэффициенты $a_j(\alpha)$ и $b(\beta)$ разложения в степенной ряд функций $f_j(\xi) = \sum_{\alpha\geq 0} a_j(\alpha)\xi^\alpha$ и $g(\xi) = \sum_{\beta\geq 0} b(\beta)\xi^\beta$ соответственно равны

$$a_j(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha_j = 0, \\ 0, & \alpha_j \neq 0, \end{cases}$$

и $b(\beta) = \frac{|\beta|!}{\beta!}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, j = 1,\ldots,n$.

Для фиксированного μ в качестве матрицы D выберем квадратную $(m = n)$ с нулями всюду, кроме главной диагонали, причем $d_{11} = \cdots = d_{\mu-1,\mu-1} = 0, d_{\mu,\mu} = \cdots = d_{nn} = -1$. Из выбора D и равенства $a_j(\alpha) = 0$ при $\alpha_j = 0$ следует, что множество целых решений системы неравенств $\begin{cases} \beta D + s \geq 0, \\ \beta \geq 0 \end{cases}$ совпадает с $B^s_{\mu,j}$, т.е. композиция Адамара $h_j(z)$ степенных рядов f_j и g в данном случае равна $h_j(z) = \sum_{\beta\in B^s_{\mu,j}} \frac{|\beta|!}{\beta!} z^\beta$, а нужное нам тождество примет вид $\sum_{j=\mu}^n z_j h_j(z) = 1$.

Если $z = (z_1,\ldots,z_n)$ удовлетворяет условию $|z_1| + \cdots + |z_{\mu-1}| < 1$, то всегда можно найти положительные $r_1,\ldots,r_n$ такие, что $|r_j| < 1$ и $|z_1| + \cdots + |z_{\mu-1}| + |z_\mu| r_\mu + \cdots + |z_n| r_n < 1$. Возьмем $R = (R_1,\ldots,R_n)$ таким образом, чтобы $R_1 > |z_1|,\ldots,R_{\mu-1} > |z_{\mu-1}|, R_\mu > |z_\mu| r_\mu,\ldots,R_n > |z_n| r_n$, но при этом $R_1 + \cdots + R_n < 1$. Функции $f_j(\xi)$ голоморфны в полицилиндре $U = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_k| \leq r_k, k = 1,\ldots,n\}$, а функция $g(\eta)$ голоморфна в полицилиндре $V = \{\eta \in \mathbb{C}^n : |\eta_k| \leq R_k, k = 1,2,\ldots,n\}$. Тогда композиция по Адамару $h_j(z)$ этих функций голоморфна в полицилиндре $W = \{|z_1| < R_1,\ldots,|z_{\mu-1}| < R_{\mu-1}, |z_\mu| < \frac{R_\mu}{r_\mu},\ldots,|z_n| < \frac{R_n}{r_n}\}$ и для $z \in W$ справедливо (см. формулу 1.9) интегральное представление

$$h_j(z) = (2\pi i)^{-n} \int_\gamma \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (1-\xi_k)^{-1} \frac{1}{1 - \sum_{p=1}^{\mu-1} z_p - \sum_{p=\mu}^n z_p \xi_p} \cdot \frac{d\xi}{\xi^{s+I}}.$$

Если точка z удовлетворяет условиям теоремы, то по построению полицилиндра W эта точка лежит в W. Учитывая равенство $\sum_{p=\mu}^n z_p(1 -$

$\xi_p) = \sum_{p=\mu}^n z_j - \sum_{p=\mu}^n z_p\xi_p$ и условие $\sum_{p=\mu}^n z_p = 1 - \sum_{p=0}^{\mu-1} z_p$ найдем, что

$$\sum_{j=\mu}^n z_j h_j(z) =$$

$$(2\pi i)^{-n} \int_\gamma \sum_{j=\mu}^n z_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n (1-\xi_k)^{-1} \frac{1}{1-\sum_{p=1}^{\mu-1} z_p - \sum_{p=\mu}^n z_p\xi_p} \cdot \frac{d\xi}{\xi^{s+I}} =$$

$$= (2\pi i)^{-n} \int_\gamma \frac{\sum_{j=\mu}^n z_j(1-\xi_j)}{\prod_{k=1}^n (1-\xi_k)} \frac{1}{1-\sum_{p=1}^{\mu-1} z_p - \sum_{p=\mu}^n z_p\xi_p} \cdot \frac{d\xi}{\xi^{s+I}} =$$

$$= (2\pi i)^{-n} \int_\gamma \prod_{k=1}^n (1-\xi_k)^{-1} \frac{d\xi}{\xi^{s+I}} = 1.$$

Отметим, что последнее равенство получается из интегральной формулы Коши и оно завершает доказательство. □

Список литературы

1. Аналитическое продолжение / Л. Бибербах. – М. : Наука, 1967.
2. Егорычев Г. П. Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$ /Г.П. Егорычев// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 3, № 4. – С. 39–44.
3. Кривоколеско В. П. Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах и некоторые комбинаторные тождества/ В. П. Кривоколеско // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. – 2009. – № 2(2). – С. 176–188.
4. Кривоколеско В. П. Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах / В. П. Кривоколеско, А. К. Цих// Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 3. – С. 579–593.
5. Лейнартас Е. К. Многомерная композиция Адамара и суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования / Е. К. Лейнартас // Сиб. мат. журн. – 1989. – Т. 30, № 2. – С. 102–107.
6. Новиков И. Я. Основы теории всплесков / И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин // УМН. – 1998. – Т. 53, № 6(324). – С. 53–128.
7. Шелкович В. М. Структура одного класса асимптотических распределений В. К. Иванова / В. М. Шелкович, А. П. Южаков // Изв. вузов. Матем. – 1991. – №4. – С. 70–73.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1 / В. Феллер. – М. : МИР, 1984. – 528 с.
9. Daubeacheis I. Ten Lectures on Wavelets / I. Daubeacheis // SIAM. – Philadelphia, 1992.
10. Zielberger D. On an identity of Daubeachies / D. Zielberger // Amer. Math. Monthly 100 (1993) — bottom of p. 487.

V. P. Krivokolesko, E. K. Leinartas
On identities with polynomial coefficients

Abstract. By using methods of the generating functions and properties of Hadamars composition of multiple power series we get a series of identities with polynomial coefficients which are similar to identities of Daubeacheis-Zielberger-Egorychev.
Keywords: combinatorial sums, generating function, integral representation

Кривоколеско Вячеслав Павлович, доцент, Красноярский государственный технологический университет, 660049, Красноярск, пр. Мира, 82, тел:. 8-391-2278781
(krivokolesko@gmail.com)
Лейнартас Евгений Константинович, профессор, Сибирский федеральный университет, Институт математики, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79, тел.: 8-391-2062076
(lein@mail.ru)

Krivokolesko Viacheslav Pavlovich, Krasnoyarsk State Technology University, 82, pospekt Mira, Krasnoyarsk, 660049, professor. Phone: 8-391-2278781 (krivokolesko@gmail.com)
Leinartas Evgeny Konstantinovich, Siberian Federal University, 79, prospekt Svobodny, Krasnoyarsk, 660041, professor.
Phone: 8-391-2062076 (lein@mail.ru)