Серия «Математика»
2015. Т. 13. С. 84—99

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 533.911.5

Предельные дифференциальные включения и метод функций Ляпунова *

И. А. Финогенко
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Аннотация. В статье развивается метод исследования асимптотического поведения решений неавтономных систем, представленных в форме дифференциальных включений. Полученные результаты носят форму обобщений принципа инвариантности Ла-Салля.

Принципом инвариантности обычно называют теорему Ла-Салля для автономных дифференциальных уравнений, в которой (в рамках прямого метода Ляпунова) предполагается, что производная функции Ляпунова неположительна. Вывод, который из этого следует, состоит в том, что правые предельные множества решений принадлежат наибольшему инвариантному подмножеству из множества нулей производной функции Ляпунова. Ранее функции Ляпунова со знакопостоянной производной использовались в известной теореме Барбашина – Красовского об асимптотической устойчивости положений равновесия автономных систем. Эту теорему (вместе с теоремой Ла-Салля) также иногда характеризуют как принцип инвариантности.

Для неавтономных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с отсутствием свойств типа инвариантности правых предельных множеств решений, а также с описанием множества нулей производной функций Ляпунова. Попытки преодоления этих трудностей привели к понятию предельных дифференциальных уравнений, которые тем или иным способом строятся с использованием сдвигов (трансляций) правых частей исходных уравнений. Сейчас этот подход известен как метод предельных уравнений, который в сочетании с прямым методом Ляпунова позволяет эффективно исследовать асимптотическое поведение решений неавтономных систем. Эти исследования восходят к работам Дж. Селла и З. Артштейна по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений. Распространение метода предельных уравнений на более широкие классы систем ставит прежде всего вопрос о структуре и методах построения предельных уравнений. Здесь этот вопрос решается применительно к дифференциальным включениям.

Ключевые слова: предельные дифференциальные включения, функции Ляпунова, принцип инвариантности.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-00287.

1. Введение

Впервые функции Ляпунова со знакопостоянной производной применядись в теоремах А. М. Ляпунова, Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского (см. [1]) при исследовании устойчивости и асимптотической устойчивости положения равновесия автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

При этом требовались некоторые дополнительные предположения на саму функцию Ляпунова или анализ множества $E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова в силу уравнения (1.1) на наличие в ней целых траекторий.

Впоследствии выводы прямого метода Ляпунова, которые можно сделать лишь из знакоопостоянства производной функции Ляпунова для автономных дифференциальных уравнений, были аккумулированы в теореме Ла-Салля (см. [6, с. 190]), известной, как принцип инвариантности.

Теорема (J.P. LaSalle) *Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1.1) с непрерывной функцией $f(x)$ в правой части, $V(x)$ — локально липшицевая функция, такая, что $D^+V(x) \leq 0$. Тогда пересечение ω-предельного множества $\Lambda^+(x)$ решения $x(t)$ с областью Ω определения функции $f(x)$ содержится в объединении всех непродолжимых орбит из множества $E = \{x \in \Omega : D^+V(x) = 0)\}$.*

В настоящее время принцип инвариантности распространен и на другие классы автономнх систем, таких, как системы с последействием, дифференциальные включения и др. Но при рассмотрении неавтономных систем ваозникают трудности, которые могут быть выявлены уже при кратком анализе схемы доказательства теоремы Ла-Салля. Во-первых, существенным является то, что множество $\Lambda^+(x)$ обдадают некоторыми свойствами типа инвариантности. (В формулировке теоремы Ла-Салля вместо множества всех непродолжимых орбит можно рассматривать наибольшее полуинвариантное подмножество из E.) Для неавтономных уравнений ω-предельные множества свойствами инвариантности не обладают. Во-вторых, становится неясным, что понимать под множеством нулей производной функции Ляпунова, так как эта производная зависит не только от x, но также и от переменной t.

Попытки преодолеть эти трудности и перенести принцип инвариантности на неавтономные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.2}$$

привели к понятиям предельных уравнений, порождаемых сдвигами (трансляциями) $f^\tau(t, x) = f(t + \tau, x)$ функций $f(t, x)$ [5].

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1.2) и последовательность точек $t_k \to +\infty$. Обозначим $y_k(t) = x(t + t_k)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, $t \geq 0$. Тогда функции $y_k(t)$ являются решениями уравнений

$$\dot{y}_k(t) = f(t + t_k, y_k(t)).$$

При определенных условиях теорема Арцела позволяет для любого отрезка $I = [0, T]$ выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность из последовательности функций $y_k(t)$. Возникает вопрос о том, какому уравнению удовлетворяет предельная функция $y(t)$. Очевидно, что $y(t) \in \Lambda^+(x)$ и поэтому ответ на этот вопрос дает некоторое свойство типа инвариантности множества $\Lambda^+(x)$.

Если функция $f(t, x)$ является равномерно непрерывной и ограниченой на множествах вида $R^1 \times K$, $K \subset R^n$ — компактное множество, то семейство сдвигов $\{f(t + \tau, x)\}$ является предкомпактным множеством в некотором полном функциональном пространстве со сходимостью в компактно-открытой топологии. В этом случае для каждой последовательности $t_k \to +\infty$ существует подпоследовательность такая, что $f(t + t_{k_i}, x) \to f'(t, x)$. Предельное уравнение определяется в виде:

$$\dot{x} = f'(t, x),$$

и предельная функция $y(t)$ является его решением. Если $V(t, x)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенству $\dot{V}(t, x) \leq w(t, x) \leq 0$, то некоторый аналог принципа инвариантности для неавтономного уравнения (1.2) может быть установлен в терминах так называемой предельной пары (f', w').

Если функция $f(t, x)$ типа Каратеодори, то еще один путь исследований состоит в том, что предельная функция $f'(t, x)$ определяется из условия

$$\lim_{t_k \to +\infty} \int_0^t f^{t_k}(s, x) ds = \int_0^t f'(s, x) ds \tag{1.3}$$

для любого фиксированного $t \geq 0$, или в более общем случае, из условия

$$\lim_{t_k \to +\infty} \int_a^b f^{t_k}(s, \phi_k(s)) ds = \int_a^b f'(s, \phi(s)) ds \tag{1.4}$$

для любой последовательности непрерывных функций $\phi(t)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ сходящейся к функции $\phi(t)$. Отметим, что при некоторых условиях пределы в (1.3), (1.4) могут существовать, но не иметь интегрального представления от каких-либо функций $f'(t, x)$ и тогда предельные уравнения записываются в операторном виде (Artstein Z., 1977–1978)

Представленные выше рассмотрения неавтономных систем в настоящее время называются методом предельных уравнений. Распространение этого метода на другие классы систем прежде всего ставит вопрос о способах построения предельных уравнений. В наших исследованиях предельные отображения построены на выводе, который можно сделать из следующей теоремы Дэви [14] о сходимости последовательности абсолютно непрерывных функций $y_k(t)$.

Теорема (J.L. Davy)*Пусть последовательность* $\{y_k(\cdot)\}$ *абсолютно непрерывных функций* $y_k : I \to R^n$, $I = [a, b]$, *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $y_k(t) \to y(t)$ *при любом фиксированном* $t \in I$*;*

2) $\|\dot{y}_k(t)\| \leq g(t)$ *для почти всех* $t \in I$, *где* $g : I \to R^1$ *— суммируемая по Лебегу функция.*

Тогда $y(t)$ *— абсолютно непрерывная функция, такая, что*

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} \dot{y}_k(t) \tag{1.5}$$

для почти всех $t \in I$, *где* $\overline{co}$ *— символ выпуклой замкнутой оболочки множества.*

Введем в рассмотрение многозначное, вообще говоря, отображение

$$F'(t, x) = \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} f(t + t_k, x).$$

Если $\dot{y}_k(t) = f(t + t_k, y_k(t))$, то в силу формулы (1.5) для предельной функции $y(t)$ выполняется

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} f(t + t_k, y_k)$$

и при некоторых дополнительных условиях на правую часть уравнения (1.2) функция $y(t)$ является решением дифференциального включения

$$\dot{x} \in F'(t, x). \tag{1.6}$$

Тогда $F'(t, x)$ можно охарактеризовать, как предельное многозначное отображение для функции $f(t, x)$, а включение (1.6) — предельное дифференциальное включение.

Сравнительный анализ показывает, что если последовательность сдвигов $f^{t_k}(t, x)$ сходится поточечно при каждых фиксированных (t, x) к функции $g(t, x)$, то $g(t, x) = F'(t, x)$. Это будет иметь место в случае сходимости последовательности $\{f^{t_k}(t, x)\}$ в компактно-открытой топологии.

При условии ограниченности последовательности функций $t \to f^{t_k}(t, x)$ при каждом фиксированном x по норме пространства $L_1(I, R^n)$ классов эквивалентности функций суммируемых по Лебегу равенство

$$\lim_{t_k\to+\infty} \int_0^t f^{t_k}(s, x)ds = \int_0^t g(s, x)ds \tag{1.7}$$

для любого фиксированного $t \geq 0$ является необходимым и достаточным условием слабой сходимости этой последовательности в пространстве $L_1(I, R^n)$ для любого отрезка $I = [0, T]$. Тогда легко показать, что предельная функция $g(t,x)$, определенная равенством (1.7), является селектором многозначного отображения $F'(t,x)$.

В данной статье изучаются неавтономные дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{1.8}$$

Относительно переменной t предполагается лишь то, что для каждого фиксированного x многозначное отображение $t \to F(t,x)$ имеет измеримый селектор. В частности, это имеет место в теории разрывных систем при определении решения в смысле А. Ф. Филиппова. В этой ситуации при построении предельных отображений возникают трудности принципиального характера и возможности использования каких-либо теорем и фактов математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости функциональных последовательностей не очевидны.

2. Предварительные сведения

Здесь мы приводим некоторые определения и факты теории многозначных отображений (см. [2]–[4]), которые используются в дальнейшем.

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из R^n обозначается $\rho(B,A) = \sup_{b\in B} d(b,A)$, где $d(b,A) = \inf_{a\in A} \|b-a\|$. Через $A^\epsilon = \{x : d(x,A) < \epsilon\}$ обозначается ϵ-окрестность множества A и через $\overline{A}$ — замыкание множества A. Очевидно, что $\rho(B,A) < \epsilon \Leftrightarrow B \subset A^\epsilon$ и значение $\rho(B,A)$ не изменится, если множество A или B заменить на его замыкание.

Через $comp\, R^n$ $(conv\, R^n)$ обозначается совокупность всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств из R^n. Если X — метрическое пространство с метрикой $\varrho(\cdot,\cdot)$, то отображение $G : X \to comp\, R^n$ будем называть *полунепрерывным сверху* (соответственно — *полунепрерывным снизу*) в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x,x_0) < \delta$, выполняется $G(x) \subset (G(x_0))^\epsilon$ ((соответственно — $G(x_0) \subset G(x))^\epsilon$).

Отображение $G(x)$ называется *непрерывным* в точке x_0, если оно одновременно полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу в этой точке.

Полунепрерывность сверху, полунепрерывность снизу и непрерывность на множестве означает наличие у отображения этих свойств в каждой точке этого множества.

Метрика Хаусдорфа в пространстве $compR^n$ определяется равенством (см. [3, стр. 23]): $dist\,(A,B) = \max\{\rho(B,A),\, \rho(A,B)\}$. Непрерывность отображений из X в пространство $comp\, R^n$ с метрикой Хусдорфа понимается в обычном для метрических пространств смысле и совпадает с приведенным выше определением непрерывности.

Скажем, что точка p принадлежит *нижнему пределу* $Li\,A_n$ последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots \in comp\,R^n$, если любая окрестность точки p пересекается со всеми множествами A_n, начиная с некоторого номера. Точка p принадлежит *верхнему пределу* $Ls\,A_n$ последовательности $A_1, A_2, \ldots$, если любая окрестность точки p пересекается с бесконечным числом множеств A_n. Справедливы следующие утверждения (см. [3, стр. 343-347]):

$$p \in Li\,A_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(p, A_n) = 0;\ p \in Ls\,A_n \Leftrightarrow \lim\ \inf_{n\to+\infty} d(p, A_n) = 0. \tag{2.1}$$

и равенства:

$$\overline{Li\,A_n} = Li\,A_n = Li\,\overline{A}_n,\ \overline{Ls\,A_n} = Ls\,A_n = Ls\,\overline{A}_n. \tag{2.2}$$

Последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots$ называется *сходящейся* к множеству A: $A = \mathrm{Lim}_{n\to+\infty} A_n$, если $A = Li\,A_n = Ls\,A_n$. Сходимость ограниченной последовательности множеств в пространстве $comp\,R^n$ в смысле метрики Хаусдорфа совпадает со сходимостью в смысле операции Lim [4, стр. 56].

В дальнейшем без оговорок используются следующие равенства для ограниченных множеств $A \subset R^n$ (см. [7, стр. 50]):

$$\overline{co}\,A = co\,\overline{A},\ (co\,A)^{\epsilon} = co\,(A^{\epsilon}), \tag{2.3}$$

где символ co (соответственно, $\overline{co}$) обозначает выпуклую (соответственно, выпуклую замкнутую) оболочку множества. Отметим также неравенства:

$$\rho(co\,A, co\,B) \leq \rho(A, B),\ dist\,(co\,A, co\,B) \leq dist\,(A, B), \tag{2.4}$$

справедливые для любых множеств $A, B \subset comp\,R^n$, из которых вытекает, что если отображение $G : X \to comp\,R^n$ полунепрерывно сверху, полунепрерывно снизу или непрерывно, то соответствующими свойствами обладает и отображение $co\,G : X \to conv\,R^n$, $(co\,G)(x) = co\,G(x)$.

Пусть $J = [a, b]$ — отрезок числовой прямой R^1 с мерой Лебега μ. Отображение $H : J \to comp\,R^n$ *измеримо*, если для него выполняется свойство Лузина (см. [2, стр. 62-65]). Измеримое многозначное отображение имеет измеримый селектор: существует измеримая функция $h :\to R^n$ такая, что $h(t) \in H(t)$ для всех $t \in J$. Полунепрерывное сверху и полунепрерывное снизу многозначные отображения со значениями в $compR^n$ являются измеримыми. Многозначное отображение $H : R^1 \to compR^n$ называется измеримым, если его сужение на любой отрезок J измеримо

При построении предельных многозначных отображений мы придерживаемся схемы, изложенной во введении и основанной на теореме Дэви. Поэтому предварительно рассмотрим ограниченное многозначное отображение $H(t)$, определенное для всех $t \in R^1$ и значениями которого являются непустые подмножества из R^n.

Обозначим

$$H^*(t) = \cap_{b\geq 0}\overline{co} \cup_{a\geq b} H(t+a),\ H'(t) = \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} H(t+t_k),$$

где $t_n \to +\infty$ — произвольная последовательность (одна и та же для любых (t,x))

Следующая лемма показывает какими свойствами, вытекающими лишь из определения, обладает отображение $H'(t)$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Для любого фиксированного t *множества* $H^*(t)$ *и* $H'(t)$ *непустые, выпуклые и компактные и справедливы равенства*

$$\lim_{b\to+\infty} dist(\overline{co} \cup_{a\geq b} H(t+a), H^*(t)) = 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} dist(\overline{co} \cup_{k\geq n} H(t+t_k), H'(t)) = 0. \tag{2.6}$$

2. Множество $H^*(t)$ *не зависит от* t: $H^*(t) = H^*(t')$ *для всех* $t, t' \in R^1$. *(В дальнейшем будем пролагать, что* $H^*(t) = H^*(0)$ *для всех* t *и обозначать* $H^*(0)$ *символом* H^*.*)*

3. Для любой последовательности $t_n \to +\infty$ *выполняется* $H'(t) \subset H^*$ *для любого* t.

4. Если существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\overline{H(t)}, G) = 0, \tag{2.7}$$

то

$$H'(t) = H^* = co\, G \tag{2.8}$$

для любого отображения $H'(t)$ *и для любого* t.

5. Если существует предел

$$\lim_{t_n\to+\infty} dist(\overline{H(t+t_n)}, G(t)) = 0,$$

то $H'(t) = co\, G(t)$ *для отображения* H', *соответствующего последовательности* $\{t_n\}$.

6. Если отображение $H = h(t)$ *однозначно, то отображение* $h'(t)$ *в общем случае многозначно и множество* h^* *содержит более одной точки. При этом значение* h^* *(соответственно,* $h'(t)$*) будет однозначно тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim_{t\to+\infty} h(t)$. *(соответственно, тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim_{t_n\to+\infty} h(t+t_n)$*).*

7. Множество H^* представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций $h(t) \in H(t)$ при условии, что $t \to +\infty$.

8. При любом фиксированном t множество $H'(t)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов $z_k \in H(t+t_k)$, где $\{t_k\}$ — последовательность, которая определяет отображение $H'(t)$.

Доказательство. Обозначим,

$$H(t,b) = \overline{co} \cup_{a \geq b} H(t+a),\ H^n(t) = \overline{co} \cup_{k \geq n} H(t+t_k). \tag{2.9}$$

Из условий леммы вытекает, что множества $H(t,b)$ и $H^n(t)$ компактны и выпуклы для любых t, b и $n = 1, 2, \ldots$

Докажем утверждение 1. Пусть $b_k \to +\infty$ — произвольная последовательность. Тогда из нее можно выделить бесконечно большую монотонно возрастающую подпоследовательность, за которую, чтобы не вводить новых обозначений, примем саму эту последовательность. Обозначим $P(t) = \cap_{k \geq 1} H(t, b_k)$. Так как последовательность непустых компактных множеств $H(t,b_k)$ монотонно убывает по включению (при любом фиксированном t), то из теоремы [3, стр. 422] получаем, что множество $P(t)$ непустое, компактное и справедливое равенство

$$\lim_{k \to +\infty} dist(H(t,b_k), P(t)) = 0. \tag{2.10}$$

Легко видеть, что множество $P(t)$ совпадает с $H^*(t) = \cap_{b>0} H(t,b)$ и как пересечение выпуклых множеств является выпуклым. Итак, из любой последовательности $b_k \to +\infty$ можно выделить подпоследовательность, для которой выполняется (2.10) с одним и тем же значением предела, равным $H^*(t)$. Тогда справедливо равенство (2.5).

Равенство (2.6) доказывается аналогично с использованием второго равенства (2.9)

Докажем утверждение 2. В силу (2.5) для любого $b' > 0$ выполняется

$$\lim_{b \to +\infty} dist(H(t, b+b'), H^*(t)) = 0.$$

С другой стороны для любых b и b' справедливо равенство $H(t, b+b') = H(t+b', b)$ и поэтому

$$\lim_{b \to +\infty} dist(H(t, b+b'), H^*(t+b')) = 0.$$

Следовательно, $H^*(t) = H^*(t+b')$ и теперь легко видеть, что $H^*(t) = H^*(t')$ для любых t, $t' \in R^1$.

Утверждение 3 вытекает непосредственно из определений отображений H^* и $H'(t)$

Докажем утверждение 4. Из (2.7) вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется число B, такое, что

$$H(t) \subset G^{\epsilon},\, G \subset (H(t))^{\epsilon}$$

для всех $t > B$. Отсюда получаем

$$\overline{co} \cup_{t>b} H(t) \subset co\, \overline{G^{\epsilon}},\, co\, G \subset \overline{co} \cup_{t>b} (H(t))^{\epsilon}$$

для любого $b > B$. Следовательно,

$$\lim_{b \to +\infty} dist(\overline{co} \cup_{t \geq b} H(t), co\, G) = 0$$

и

$$\lim_{n \to +\infty} dist(\overline{co} \cup_{k \geq n} H(t + t_k), co\, G) = 0$$

для любой последовательности $t_k \to +\infty$ и любого t. Теперь равенство (2.8) вытекает из (2.5) и (2.6).

Утверждение 5 доказывается аналогично 4.

Утверждение 6 вытекает из утверждений 1, 4 и 5.

Докажем утверждение 7. Обозначим $\Phi^* = \cap_{b \geq 0} \overline{co} \cup_{t \geq b} H(t)$. Так как $\Phi^* = H^*$, утверждение 7 будет доказано, если мы установим, что множество Φ^* представляет собой выпуклую замкнутую оболочку пределов всех сходящихся последовательностей $\{h(t_n)\}$ таких, что $h(t_n) \in H(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Обозначим $P(b) = \cup_{t \geq b} H(t)$ и $P^* = \cap_{b \geq 0} \overline{P(b)}$. Рассуждая также как при доказательстве утверждения 1 этой леммы, убеждаемся, что P^* — непустое компактное множество и

$$\lim_{b \to +\infty} dist(\overline{P(b)}, P^*) = 0. \tag{2.11}$$

Из соотношений (2.3), (2.4), равенств (2.11) и (2.5) вытекает, что $co\, P^* = \Phi^*$. Таким образом, нам осталось доказать, что P^* — множество пределов всех последовательностей со свойством $h(t_n) \in H(t_n)$.

Пусть $b_n \to +\infty$ — произвольная последовательность. Из равенства (2.11) и свойств (2.2) операций Li и Ls заключаем, что

$$Li\, P(b_n) = Ls\, P(b_n) = P^*. \tag{2.12}$$

Возьмем произвольный элемент $p \in P^*$. Из (2.1) и (2.12) вытекает, что существует последовательность $p_n \in P(b_n)$, сходящаяся к p. Следовательно, найдется последовательность элементов $h(t_n)$, удовлетворяющих условию $h(t_n) \in H(t_n)$, и таких, что $p_n = h(t_n) \to p$.

Обратно, пусть p — предел некоторой сходящейся последовательности со свойством $h(t_n) \in H(t_n)$. Тогда, очевидно, $h(t_{k_n}) \in P(b_n)$, если только $t_{k_n} \geq b_n$. Таким образом, p является пределом некоторой подпоследовательности из последовательности $\{h(t_n)\}$. Еще раз воспользовавшись соотношениями (2.1) и (2.12), заключаем, что $p \in P^*$.

Утверждение 8 доказывается аналогично. $\square$

.

Лемма 2. *Пусть* $H : R^1 \to comp\, R^n$. *Тогда:*

1. Если $H(t)$ *измеримо, то* $H'(t)$ *измеримо.*

2. Если $H(t)$ *имеет измеримый селектор, то* $H'(t)$ *имеет измеримый селектор.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из того, что отображение $H'(t)$ получается из последовательности измеримых многозначных отображений $H(t+t_k)$ при помощи счетных операций объединения, пересечения и переходу к выпуклым замкнутым оболочкам. Поэтому (см. [2, стр. 68]) $H'(t)$ является измеримым многозначным отображением.

Докажем 2. Пусть отображение $H'(t)$ определяется последовательностью $\{t_k\}$ и $z(t) \in H(t))$ — измеримое сечение, существование которого предполагается. Тогда, очевидно, $z(t+t_k) \in H(t+t_k)$. Обозначим $Z(t) = \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} z(t+t_k)$. Тогда $Z(t)$ — измеримое на каждом отрезке $[\alpha, \beta]$ многозначное отображение (см. [2, стр. 68]) и по построению выполняется включение $Z(t) \subset H'(t)$. Измеримое многозначное отображение $Z(t)$ имеет измеримое сечение $y(t)$, которое, очевидно, и будет сечением многозначного отображения $H'(t)$. □

3. Предельное дифференциальное включение

Будем рассматривать дифференциальное включение (1.8).

Через $F^a(t,x) = F(t+a,x)$ обозначается сдвиг многозначного отображения $F(t,x)$ на величину $a > 0$. Введем в рассмотрение многозначное отображение, порождаемое сдвигами, которое будем называть предельным для многозначного отображения F:

$$F'(t,x)) = \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t+t_k,x), \tag{3.1}$$

где $t_n \to +\infty$ — произвольная последовательность (одна и та же для любых (t,x)).

Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t,x). \tag{3.2}$$

называется *предельным* для включения (1.8).

Свойства отображения $F'(t,x)$ относительно переменной t установлены в леммах 1 и 2, в которых для фиксированного x следует положить $H(t) = F(t,x)$. Сформулируем условия, которые используются в дальнейшем для изучения включения (3.2).

А1. *Для каждых* (t,x). *множество* $F(t,x)$ *непусто и компактно.*

A2. *При почти каждом фиксированном t многозначное отображение $x \to F(t,x)$ полунепрерывно сверху.*

A3.*Для любого x существует измеримый селектор многозначного отображения $t \to F(t,x)$.*

A4. *Для любого ограниченного множества $Q \subset R^n$ существует константа M, такая, что для любых $(t,x) \in R^1 \times Q$ и $f \in F(t,x)$ выполняется неравенство $\|f\| \leq M$.*

A5. *Для любого x и $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$ и γ, такие, что*

$$F(t,x') \subset (F(t,x))^{\epsilon} \tag{3.3}$$

для всех $t > \gamma$ и $\|x' - x\| < \delta$.

Замечание 1. При выполнении условий A1–A4 и дополнительном условии выпуклости значений многозначного отображения $F(t,x)$ задача (1.8) для любых начальных данных (t_0, x_0) имеет локальное решение (см., например, [2]). При этом любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0, \omega)$ и любое ограниченное непродолжимое решение определено на промежутке $[t_0, +\infty)$. При условии невыпуклости значений $F(t,x)$ для существования решений включения (1.8) условия A2 и A3 следует заменить на условие Каратеодори для отображения $F(t,x)$, т. е. предположить, что отображение $t \to F(t,x)$ измеримо, а отобраджение $x \to F(t,x)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Отметим также, что условие A5 требуется для изучения свойств предельного многозначного отображения $F'(t,x)$ относительно переменной x. Оно означает, что $\lim_{t \to +\infty, x' \to x} \rho(F(t,x'), F(t,x) = 0$ и всегда выполняется, если $F(t,x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x равномерно относительно переменной t, т. е. A5 можно рассматривать как некоторое усиление условия A2.

Будем говорить, что множество $D \subset R^n$ *квазиинвариантно*, если для любого $y \in D$ существует решение $x(t)$ включения (3.2) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t,x)$ в правой части, такое, что $x(0) = y$ и $x(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Множество всех ω-предельных точек решения $x(t)$ включения (1.8) обозначим $\Lambda^+(x)$.

Теорема 1. *Пусть правая часть диффереенциального включения (1.8) удовлетворяет условиям A1–A5. Тогда:*

1. Правая часть предельного дифференциального включения (3.2) удовлетворяет условиям A1–A4.

2. Предельное дифференциальное включение (3.2) для любых начальных данных (t_0, x_0) имеет локальное решение и любое его ограниченное непродолжимое вправо решение определено на правом максимальном промежутке существования $[t_0, +\infty)$.

3. Для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (1.8), для любой последовательности $t_k \to +\infty$, $t_k \geq t_0$, $k = 1, 2, \dots$ и для любого числа $T > 0$ из последовательности функций $y^k(t) = x(t + t_k)$, $t \in I = [0, T]$, можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

4. Предел $y(t)$ любой равномерно сходящейся на отрезке I последовательности функций $y^k(t)$ является решением включения (3.2) с предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ многозначным отображением $F'(t, x)$ в правой части и выполняется начальное условие $y(0) = \lim_{k\to+\infty} x(t_k)$.

5. Для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (1.8) множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и выполняется условие $d(x(t), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$, где d означает расстояние от точки до множества в пространстве R^n.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Для этого требуется доказать, что для предельного отображения $F'(t, x)$ выполняются условия A1–A4.

Условие A1 для отображения F' вытекает из утверждения 1 леммы 1. При этом множества $F'(t, x)$ выпуклые.

Докажем условие A2. Пусть отображение F' определяется последовательностью $\{t_k\}$. Нам достаточно показать, что для любого фиксированного x_0 и произвольного $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\rho(F'(t, x), F'(t, x_0)) < \epsilon \tag{3.4}$$

для всех $t \in R^1$ и $\|x - x_0\| < \delta$.

Из условия A5 получаем, что для любых (t, x_0) и произвольного $\epsilon > 0$ существуют число $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ и номер $m = m(x_0, t, \epsilon)$ такие, что

$$\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, x) \subset \overline{co} \cup_{k\geq n} (F(t + t_k, x_0))^\epsilon \tag{3.5}$$

для всех $n \geq m$ и $\|x - x_0\| < \delta$. С учетом равенства (2.6) перейдем в (3.5) к пределу в метрике Хаусдорфа при $n \to +\infty$ при каждых фиксированных (t, x). Тогда $F'(t, x) \subset \overline{(F'(t, x_0))^\epsilon}$, откуда вытекает (3.4). Это неравенство означает, что $F'(t, x)$ полунепрерывно в точке x_0 по переменной x.

Условие A3 вытекает из леммы 2.

Условие A4 вытекает из формулы (3.1 и тем самым утвердение 1 теоремы доказано.

Утверждение 2 теоремы вытекает из утверждения 1 и соответствующих общих теорем существования решений из [2].

Утверждение 3 легко устанавливается с использованием условия A4, примененного к многозначному отображению $F(t, x)$, и теоремы Арцела. Утверждение 4 вы текает из теоремы Дэви, определения предельного отображения $F'(t, x)$ и условия A5.

В утверждении 5 компактность, связность и условие

$$d(x(t), \Lambda^+(x)) \to 0$$

при $t \to +\infty$ являются общими свойствами ω- предельных множеств ограниченных непрерывных кривых. Свойство квазиинвариантности вытекает из утверждений 3 и 4. $\square$

Замечание 2. 1. Из доказательства видно, что в теореме 2 установлена равномерная относительно t полунепрерывность сверху предельного отображения $F'(t,x)$ по переменной x в каждой точке x_0.

2. Для однозначных отображений $F(t,x)$ условия A2 и A3 совпадают с условиями Каратеодори и в рамках предположений теоремы 1 предельные (в общем случае многозначные) отображения $F'(t,x)$ удовлетворяют условиям Каратеодори.

3. Условие A3 существования измеримого сечения у отображения $t \to F(t,x)$ в теореме 2 можно заменить на более сильное условие измеримости по t этого отображения. Тогда и предельное отображение $F'(t,x)$ будет измеримым по переменной t.

4. Принцип инвариантности

Пусть $V : R^1 \times R^n \to R^1$ — непрерывно дифффереренцируемая функция. Производную $\dot{V}^+(t,x)$ функции $V(t,x)$ в силу дифференциального включения (1.8) определим следующим равенством:

$$\dot{V}^+(t,x) = \sup_{y \in F(t,x)} (\langle \nabla_x V, y\rangle + V_t),$$

где $\nabla_x V$ — градиент функции V по переменной x, V_t — частная производная по t, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Через $w : R^1 \times R^n \to R^+$ будем обозначать измеримую по t, непрерывную по x и ограниченную на каждом множестве $R^1 \times K$ функцию, где $K \subset R^n$ — компактное множество. В дальнейшем предполагаем, что для любого x выполняется условие:

$$\lim_{t \to +\infty, x' \to x} \|w(t,x') - w(t,x)\| = 0.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия A1–A5, $x(t)$ — ограниченное решение включения (1.8) с ω-предельным множеством $\Lambda^+(x)$, Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, ограниченная снизу на каждом множестве вида $R^1 \times Q$, где $Q \subset R^n$ — компактное множество, такая, что для каждого x и для почти всех t выполняется нервенство*

$$\dot{V}^+(t,x) \le -w(t,x).$$

Тогда для каждой точки $y \in \Lambda^+(x)$ существуют предельные отображения w', F' (соответствующие одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$) и решение $y(t)$ включения (3.2) с начальным условием $y(0) = y$ такое, что $y(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$ и $w'(t, y(t)) = 0$ для почти всех $t \geq 0$.

С учетом теоремы 1, теорема 2 вытекает из результатов раздела 4 статьи [8] и статьи [9] применительно к включениям без запаздывания.

Обозначим

$$\alpha(x) = \lim_{t \to +\infty} \inf_{t \in (b, +\infty)} w(t, x).$$

Следствие 1. *Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (1.8) множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E_w = \{x \in R^n : \alpha(x) = 0\}.$$

Замечание 3. Отметим, что предельные многозначные отображения $F'(t, x)$ для отображения $F(t, x)$ и $co\, F(t, x)$ совпвдают. Поэтому полученные результаты могут в равной степени применяться к дифференциальным включениям с выпуклыми полунепрерывными сверху по x и с невыпуклыми при условиях Каратеодори правыми частями.

К дифференциальным включениям с условиями A1–A4 приводят дифференциальные уравнения с разрывными (измеримыми) правыми частями при общем определении решений в смысле А.Ф. Филиппова. Для измеримой по переменным (t, x) функции $f(t, x)$ через $F(t, x)$ обозначается выпуклая замкнутая оболочка множества всех предельных значений функции $f(t, x')$, когда $x' \to x$, пробегая почти всю окрестность точки x. (Точное определение см. в [7, стр. 66].) Тогда многозначное отображение $x \to F(t, x)$ полунепрерывно сверху, а для отображения $t \to F(t, x)$ при каждом фиксированном x известно лишь то, что оно имеет измеримый селектор.

Список литературы

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. – М. : Наука, 1970. – 240 с.
2. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. – М. : КомКнига, 2005. – 215 с.
3. Куратовский К. Топология. Т. 1 / К. Куратовский. – М. : Мир, 1966. – 594 с.
4. Куратовский К. Топология. Т. 2 / К. Куратовский. – М. : Мир, 1969. – 624‘с.

5. Мартынюк А. А. Устойчивость движения: метод предельных уравнений / А. А. Мартынюк, Д. Като, А. А. Шестаков. – Киев : Наукова думка, 1990. – 256 с.
6. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, М. Абетс, М. М. Лалуа. – М. : Мир, 1980. – 300 с.
7. Филиппов А. Ф. Диффенренциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
8. Финогенко И. А. Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем / И. А. Финогенко // Сиб. мат. журн. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 271–284.
9. Финогенко И. А. Предельные функционально-дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем с запаздыванием / И. А. Финогенко // Докл. АН. – 2014. – Т. 455, № 6. – С. 637–639.
10. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equation / Z. Artstein // J. Differ. Equations. – 1977. – Vol. 23. – P. 216–223.
11. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equations / Z. Artstein // J. Differ. Equations. – 1977. Vol. 23. – P. 224–243.
12. Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations / Z. Artstein // J. Differ. Equations. – 1977. – Vol. 25. – P. 184–202.
13. Artstein Z. Uniform asymptotic stability via limiting equations / Z. Artstein // J. Differ. Equations. – 1978. – Vol. 27. – P.172–189.
14. Davy J. L. Properties of solution set of a generalized differential equation / J. L. Davy // Bull. Austral. Math. Soc. – 1972. – Vol. 6. – P. 379–398.
15. Sell G. R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 / G. R. Sell // Trans. Amer. Vath. Soc. – 1967. – Vol. 22. – P. 241–283.

Финогенко Иван Анатольевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел. (3952)427100, (e-mail: fin@icc.ru)

I. A. Finogenko

Limiting Differential Inclusions and the Method of Lyapunov's Functions

Abstract. In article the method of research of asymptotic behaviour for solutions of the nonautonomous systems submitted in the form of differential inclusions develops. The received results carry the form of generalizations of the LaSalle's principle of invariance .

Principle of invariance usually call as LaSalle's theorem for the autonomous differential equations in which (in the frame of Lyapunov's direct method) it is supposed, that derivative of Lyapunov's function is nonpositivity. The conclusion which this implies, will be, that the right limiting sets of solutions belong to the greatest invariant subset from set of zero of derivative function of Lyapunov. Before Lyapunov's functions with constant signs were used in Barbashin – Krasovsky's known theorem about asymptotic stability of positions of balance of autonomous systems. This theorem (together with LaSalle's theorem) also sometimes characterize, as a principle of invariancy.

For the nonautonomous equations on this way there are the difficulties connected to absence of properties such as invariancy of the right limiting sets of solutions, and also with the description of set of zero of a derivative of Lyapunov's functions. Attempts of

Известия Иркутского государственного университета.
2015. Т. 13. Серия «Математика». С. 84–99

overcoming of these difficulties have led to concept of the limiting differential equations. Method of the limiting equations in a combination to Lyapunov's direct method allows to investigate effectively asymptotic behaviour of solution of nonautonomous systems. These researches go back to works of G.R. Selll and Z. Artstein on topological dynamics of the nonautonomous differential equations. Distribution of a method of the limiting equations on wider classes of systems brings an attention to the question about structure and methods of construction of the limiting equations. We this question is solved with reference to differential inclusions.

Keywords: limiting differential inclusion, Lyapunov's function, principle of invariance.

Список литературы

1. Barbashin E.A. Lyapunov's functions (in Russian). Moscow, Nauka, 1970. 240 p.
2. Borisovich Yu.G. Gelman B.D., Myshkis A.D., Obuhovsky V.V. Introduction in the theory of multiple-valued maps and differential inclusions (in Russian). Moscow, KomKniga, 2005. 215 p.
3. Kuratovsky K. Topology. Vol. 1 (in Russian). Moscow, Mir, 1966. 594 p.
4. Kuratovsky K.Topology. Vol. 2 (in Russian). Moscow, Mir, 1969. 624 p.
5. Martynyuk A.A. Kato D., Shestakov A.A. Stability of motion: method of limiting equations (in Russian). Kiev, Naukova Dumka, 1990. 256 p.
6. Rush H., Abets M., Lalua M.M. Lyapunov's direct method in the theory of stability (in Russian). Moscow, Mir, 1980. 300 p.
7. Filippov A.F. Differential equations with discontinuous right-hand part (in Russian). Moscow, Nauka, 1985. 224 p.
8. Finogenko I.A. Limiting differential inclusions and a principle of invariancy for on-line systems (in Russian). *Sibirsky math. zurnal*, 2014, vol. 20, no 1, pp. 271-284.
9. Finogenko I.A. Limiting functional-differential inclusions and a principle of invariancy for nonautonomous systems with delay (in Russian). *Doklady AN*, 2014, vol. 455, no 6,- pp. 637-639.
10. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equation. *J. Differ. Equations*, 1977, vol. 23, pp. 216-223.
11. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equations. *J. Differ. Equations*, 1977, vol. 23, pp. 224-243.
12. Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations. *J. Differ. Equations*, 1977, vol. 25, pp. 184–202.
13. Artstein Z. Uniform asymptotic stability via limiting equations. *J. Differ. Equations*, 1978, vol. 27, pp. 172-189.
14. Davy J.L. Properties of solution set of a generalized differential equation. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1972, vol. 6, pp. 379–398.
15. Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2. *Trans. Amer. Vath. Soc.*, 1967, vol. 22, pp. 241-283.

Finogenko Ivan Anatol'evich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Matrosov Institute for System Dinamics and Control Theory of SB RAS, 134, Lermontov st. Irkutsk, 664033,
tel. (3952)427100, (e-mail: `fin@icc.ru`)