Серия «Математика»
2015. Т. 13. С. 41—55

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.54 + 512.55

Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа *

А. В. Литаврин
Сибирский федеральный университет

Аннотация. В статье изучаются автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, ассоциированной с системой корней Φ. Группа автоморфизмов описана для симплектического типа $C_n,\ n > 4$.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильпотентная подалгебра, кольцо Ли, автоморфизм.

1. Введение

Проблема описания автоморфизмов (максимальных) унипотентных подгрупп U групп лиева типа над полем решена в работах Дж. Гиббса [8] (при $char K \neq 2, 3$) и В.М. Левчука [3]. В алгебре Шевалле $\mathcal{L}_K$ с базисом $\{e_r\ (r \in \Phi),\ \cdots\}$ над полем или кольцом K, ассоциированной с системой корней Φ [7, § 4.4], выделяют нильпотентную подалгебру $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r | r \in \Phi^+\}$. В статье изучается задача описания автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$.

Алгебра Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над K. Группы автоморфизмов кольца $NT(n, K)$, его ассоциированного кольца Ли и присоединенной группы (она изоморфна унитреугольной группе $UT(n, K)$) изучены ранее [4]. Структурные связи унипотентной подгруппы $U = U\Phi(K)$ группы Шевалле типа Φ над K и кольца Ли $N\Phi(K)$ выявлялись в [3]. Исследования $Aut\ (\mathcal{L}_K)$ см. в [9], [2] и [5].

В § 2 определяются основные элементарные автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$: автоморфизмы индуцированные автоморфизмами ос-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

новного кольца, диагональные, внутренние, графовые и центральные автоморфизмы. Порождаемые ими автоморфизмы называют стандартными.

В решении проблемы описания $Aut\ U$ существенным оказывается следующее обобщение в [3] центральных автоморфизмов:

Автоморфизм ϕ группы или кольца Ли, тождественный по модулю m-го гиперцентра и внешний по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют гиперцентральным автоморфизмом высоты m.

Мы исследуем автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n. Главным результатом статьи является

Основная теорема. Пусть K — ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Всякий автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n $(n > 4)$ есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты ≤ 5 автоморфизмов.

Когда $2K = K$ и аннулятор элемента 3 в кольце K нулевой, автоморфизмы алгебры Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 2)$ были описаны ранее [6]; наибольшая высота гиперцентральных автоморфизмов в этих случаях ≤ 3.

Отметим, что в теореме оценка высоты гиперцентральных автоморфизмов не улучшаемая, см. § 4. Гиперцентральные автоморфизмы наибольшей высоты, как правило, вырождаются для малых лиевых рангов; в этих случаях автоморфизмы требуют отдельного рассмотрения (§ 6).

Доказательству основной теоремы посвящены §-§ 2–5.

Обозначения и терминология, связанные с системами корней, стандартны (см. [7]): Φ — система корней, Φ^+ — система положительных корней и $\Pi(\Phi)$ — база системы корней Φ. Полагаем также

$$p(\Phi) := max\{(r,r)/(s,s) \mid r, s \in \Phi\}.$$

Всюду в статье K есть ассоциативно — коммутативное кольцо с единицей, K^+ — его аддитивная группа и $\mathcal{A}_z := \{x \in K \mid x * z = 0\}$ — аннулятор элемента z в K.

2. Элементарные автоморфизмы и центральные ряды

Автоморфизмы всякой алгебры однозначно определяются действием на ее базе. В алгебре $\mathcal{L}_K$ структурные константы $N_{r,s}$ $(r, s \in \Phi^+)$ базиса Шевалле выявляет теорема Шевалле о базисе (см. [7]), согласно которой $[e_r, e_s] = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и

$$[e_r, e_s] = N_{r,s} e_{r+s} \quad (r, s, r+s \in \Phi^+). \tag{2.1}$$

Кольцо Ли $N\Phi(K)$ порождается элементами xe_r $(r \in \Phi^+, x \in K)$ (при $p(\Phi)!K = K$ даже элементами xe_r $(r \in \Pi(\Phi),\ x \in K)$) и основные соотношения в этих терминах записываются в виде:

$$xe_r + ye_r = (x+y)e_r \quad (r \in \Phi^+,\ x, y \in K); \tag{2.2}$$

$$[xe_r, ye_s] = xyN_{r,s}e_{r+s} \quad (r, s, r+s \in \Phi^+); \tag{2.3}$$

$$[xe_r, ye_s] = 0 \quad (r, s \in \Phi^+, r+s \notin \Phi^+). \tag{2.4}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Автоморфизм ϕ аддитивной группы кольца Ли $N\Phi(K)$ есть его автоморфизм тогда и только тогда, когда ϕ сохраняет соотношения (2.3), (2.4).*

Перечислим элементарные автоморфизмы (помимо графовых [7]).

Диагональные автоморфизмы. K-характером решетки корней, то есть аддитивной группы $< \Phi^+ >$ называют любой ее гомоморфизм χ в мультипликативную группу K^* основного кольца K коэффициентов. Ясно, что χ определяется значениями на простых корнях. Ему соответствует ([7, § 7.1]) диагональный автоморфизм $h(\chi) : e_r \to \chi(r)e_r$ $(r \in \Phi^+)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$.

Для любых $r \in \Phi^+$ и $t \in K$ алгебра Ли $N\Phi(K)$ допускает *корневой автоморфизм* $x_r(t)$, тождественный на e_s при $s + r \notin \Phi^+$ и

$$x_r(t):\ e_s \to e_s + \sum_{i=1}^{q(r,s)} \frac{1}{i!} N_{r,s}N_{r,r+s}\cdots N_{r,(i-1)r+s}t^i e_{ir+s}\ (s, s+r \in \Phi^+),$$

где $q(r,s)$ – наибольшее целое число $i \geq 0$ такое, что $s + ir \in \Phi$. Все корневые автоморфизмы порождают *внутренние автоморфизмы.*

Всякий автоморфизм ν основного кольца K индуцирует *кольцевой автоморфизм* $\widetilde{\nu} : xe_r \to x^\nu e_r$ $(r \in \Phi^+)$ кольца Ли $N\Phi(K)$.

Центральные автоморфизмы. Автоморфизм группы или кольца Ли, тождественный по модулю центра, называют центральным. Центр любого кольца Ли R совпадает с аннулятором

$$Ann(R) = \{x \in R \mid [x, R] = 0\}.$$

Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$, порождаемые перечисленными элементарными автоморфизмами, называют *стандартными.* К нестандартным автоморфизмам приводят обобщения центральных автоморфизмов — *гиперцентральные автоморфизмы* (см. введение).

Для построения характеристических идеалов и гиперцентральных автоморфизмов нам потребуются центральные ряды. В произвольном кольце Ли R определяют нижний центральный ряд

$$R = \Gamma_1(R) \supseteq \Gamma_2(R) \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_n \supseteq \Gamma_{n+1}(R) = [\Gamma_n(R), R] \supseteq \cdots \quad (n \geq 1)$$

и верхний центральный или гиперцентральный ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \cdots, \quad Z_{i+1}(R) := \{g \in R \mid [g, R] \subseteq Z_i(R)\} \ \ (i \geq 0).$$

Как в [1] и [7], используем максимальный корень ρ системы Φ, функцию высоты $ht(r)$ на корнях r и число Кокстера $h := ht(\rho) + 1$ системы корней Φ. *Стандартным центральным рядом* алгебры $N\Phi(K)$ называют ряд

$$L_1 = N\Phi(K) \supset L_2 \supset \cdots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0,$$

$$L_i := < Ke_r| \ \ r \in \Phi^+, \ ht(r) \geq i > .$$

Все структурные константы $N_{r,s}$ $(r, s, r+s \in \Phi^+)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ обратимы в кольце K при $p(\Phi)!K = K$. По аналогии с [3, Лемма 1] устанавливается стандартность при $p(\Phi)!K = K$ верхнего и нижнего центрального ряда.

Лемма 2. *Верхний и нижний центральные ряды кольца Ли $N\Phi(K)$ при $p(\Phi)!K = K$ совпадают с её стандартным центральным рядом.*

Центральные ряды алгебры Ли $NC_n(K)$ при необратимом $p(\Phi)!$ мы опишем в § 3.

В системе корней Φ ранга больше 1 всегда существует (и единственен, кроме случая Φ типа A_n) простой корень q такой, что $s = \rho - q \in \Phi^+$. Тогда отображение

$$\alpha(t) : xe_q \to xe_q + txe_s, \ ye_a \to ye_a \ (a \neq q) \tag{2.5}$$

для всякого $t \in K$ есть гиперцентральный автоморфизм высоты 2 алгебры $N\Phi(K)$ при $t \neq 0$, исключая тип C_n.

Для Φ типа C_n $(n \geq 3)$ имеем $s - q \in \Phi^+$ и $\alpha(t)$ есть произведение центрального и внутреннего ($x_{s-q}(t)$-сопряжение) автоморфизмов. В этом случае к гиперцентральному автоморфизму высоты 2 приводит отображение

$$xe_q \to xe_q + txe_{s-q}, \ ye_a \to ye_a \ (a \in \Phi^+ \setminus \{q\}, \ t \in K). \tag{2.6}$$

3. Специальное представление алгебры $NC_n(K)$

Нам потребуется представление из [3] алгебр $N\Phi(K)$ классического типа. Каждый корень r системы корней Φ классического типа записывается в [3] в виде

$$r = p_{i,mj}, \quad 1 \leq j < i \leq n, \ m \in \{0, -1, 1\}.$$

Полагая $e_r = e_{i,mj}$, произвольный элемент из $N\Phi(K)$ можно записать в виде суммы $||a_{iv}|| = \sum a_{iv}e_{iv}, \ \ (a_{iv} \in K)$ и представить Φ^+-матрицей $||a_{iv}||$. Для типа C_n это

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_{1,-1} & & & \\ & & a_{2,-2} & a_{2,-1} & a_{21} & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n,-n} & \cdots & a_{n,-2} & a_{n,-1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1}. \end{array}$$

Нам потребуется (см. [3, Лемма 2])

Лемма 3. *Знаки структурных констант алгебры $NC_n(K)$ можно выбрать так, что верны равенства:*
1) $[e_{ij}, e_{jv}] = e_{iv}, \quad 1 \le j < i \le n, \ 1 \le |v| < j < n;$
2) $[e_{ij}, e_{i,-j}]_{\cdot i,-i}, \quad n \ge i > j \ge 1;$
3) $[e_{jm}, e_{i,-m}] = [e_{im}, e_{j,-m}] = e_{i,-j}, \quad n \ge i > j > m \ge 1.$

В общем случае кольцо Ли $NC_n(K)$ порождают

$$\{Ke_{ii-1}\ (2 \le i \le n); \quad Ke_{i,-i}\ (1 \le i \le n)\} \tag{3.1}$$

Через T_{it} обозначаем идеал алгебры $NC_n(K)$, состоящий из C_n^+-матриц $||a_{uv}||$ с условием $a_{uv} = 0$ при $u < i$ или $v > t$. Централизаторы $C(T_{it})$ в матричном виде вычисляются по простой формуле. (По определению, $T_{1,0} := T_{1,-1}$.)

Лемма 4. *Для кольца Ли $N\Phi(K)$ типа C_n $(n \ge 3)$ будут верны равенства:*

$$C(T_{ij}) = T_{1,-j-1} \quad (-i \le j < i < n),$$

$$C(T_{nj}) = T_{1,-j-1} + \mathcal{A}_2 T_{nn-1} \quad (-n \le j < n).$$

Доказательство. Данные равенства проверяются, с помощью леммы 3, прямыми вычислениями. □

Для алгебры $NC_n(K)$ через T_0 обозначим подалгебру, в которой базу образуют всевозможные элементы e_{iv}, $|v| < i$. Далее, полагаем

$$L'_i := L_i \cap T_0 \quad (1 < i < 2n).$$

Лемма 5. *В кольце Ли $NC_n(K)$, $n \ge 3$ имеем следующие равенства*

$$\Gamma_i = L'_i + \sum_{i/2 < t \le n} 2Ke_{t,-t} \quad (1 < i < 2n),$$

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 L_{2n-i-1} \quad (1 \le i < 2n-1), \qquad Z_{2n-1} = L_1,$$

$$C(\Gamma_{n+j}) = T_{1j} + \mathcal{A}_2 e_{nj+1}, \ C(\Gamma_j) = T_{1,-(n-j)-1} + \mathcal{A}_2 e_{n,-(n-j)} \ (1 \le j \le n).$$

Кроме того, T_{ij} — характеристический идеал при $i < n$.

Доказательство. Идеалы Γ_i, Z_i вычисляются индукцией по i с помощью леммы 3. Используя лемму 3, вычисляем централизаторы:

$$C(\Gamma_{n+j})=T_{1,j}+\mathcal{A}_2e_{n,j+1},\quad C(\Gamma_j)=T_{1,-(n-j)-1}+\mathcal{A}_2e_{n,-(n-j)}\ (1\leq j\leq n).$$

Характеристичность членов нижнего центрального ряда дает характеристичность идеалов $T_{1,j}+\mathcal{A}_2e_{n,j+1}$, $-(n-1)\leq j<n$.

Покажем характеристичность идеалов T_{ij} при $i<n$.

Идеал $T_{1,-1}$ является максимальным абелевым, так как он самоцентрализуемый, в силу леммы 4. Это же верно и для его образа относительно любого автоморфизма $\phi\in Aut(N\Phi(K))$. Поэтому

$$\Gamma_n\subset T_{1,-1}^{\phi}\subset C(\Gamma_n)=T_{1,-1}+\mathcal{A}_2e_{n,1}=T_{1,-1}+Z_n,$$

$$Z_n=L_n+\mathcal{A}_2L_{n-1},\quad T_{1,-1}=T_{1,-1}^{\phi}\mod Z_n.$$

Далее находим

$$(T_{2,-1}\cap T_0)+T_{n,-1}\subset Z_1+[T_{1,-1}^{\phi},L_1]\subset T_{1,-1}^{\phi}\subset$$

$$\subset C((T_{2,-1}\cap T_0)+T_{n,-1})\subset C(T_{n,-1})=T_{1,-1}+\mathcal{A}_2T_{n,n-1}.$$

Если сейчас идеал $T_{1,-1}^{\phi}$ не лежит в $T_{1,-1}$, то он обязан содержать элемент $\alpha=ae_{n,1}\mod T_{1,-1}$ при $a\neq 0$. Это приводит к противоречию:

$$0=[e_{2,-1},\alpha]=[e_{2,-1},ae_{n,1}]Ⓡ_{n,-2}.$$

Отсюда вытекает равенство $T_{1,-1}^{\phi}=T_{1,-1}$ и характеристичность $T_{1,-1}$.

Как следствие, получаем характеристичность идеала

$$T_{2,-1}=T_{1,-1}\cap[T_{1,-1},L_1]+(T_{1,-1}\cap Z_{2n-2}).$$

Идеал $T_{2,1}$ содержит идеал $T_{2,-1}$ и, по его модулю, есть максимальный абелев идеал подалгебры с базисом $\{e_{i,v}\mid i\geq 2,\ -i\leq|v|<i\}$. Следовательно, $T_{2,1}$ и $T_{2,-2}=C(T_{2,1})$ — характеристические идеалы.

Из описания автоморфизмов кольца Ли $NA_n(K)$ [4] и изоморфности $NC_n(K)/T_{2,-2}\simeq NA_n(K)$ следует характеристичность идеалов $T_{1,j}$ $(1\leq j\leq n-2)$ и их централизаторов $C(T_{1,j})=T_{1,-j-1}$.

Характеристичность идеала $T_{i,i-1}$ $(1<i<n)$ получаем из того, что он содержит характеристический идеал $T_{i,-i}=T_{1,-i}$ и по его модулю есть абелев идеал. Поскольку $T_{i,j}=T_{i,i-1}\cap T_{1,j}$, то идеалы $T_{i,j}$ $(i<n)$ также характеристичны. Лемма доказана. □

4. Гиперцентральные автоморфизмы

Центр и аннулятор кольца Ли $NC_n(K)$, по лемме 5, равны $Z_1 = \mathcal{A}_2 e_{n,-n+1} + Ke_{n,-n}$. Легко проверяется, что любым $\delta \in End(K^+)$, $\lambda \in Hom(K^+, \mathcal{A}_2)$ и $1 \leq i \leq n$ соответствует центральный автоморфизм

$$\zeta_{i,\lambda,\delta} : xe_{ii'} \to xe_{ii'} + x^{\lambda} e_{n,-n+1} + x^{\delta} e_{n,-n} \quad (x \in K,\ x \neq 0) \tag{4.1}$$

(на остальных элементарных матрицах действие тождественное), где $1' = -1$ и $i' = i - 1$ в остальных случаях. Они порождают подгруппу всех центральных автоморфизмов кольца Ли $NC_n(K)$, когда $2K = K$. С другой стороны, при $2K = 0$ любым $2 \leq i \leq n$ соответствует центральный автоморфизм

$$\xi_{i,\lambda,\delta} : \ xe_{i,-i} \to xe_{i,-i} + x^{\lambda} e_{n,-n+1} + x^{\delta} e_{n,-n} \ (x \in K,\ x \neq 0), \tag{4.2}$$

где $\delta \in End(K^+)$, $\lambda \in Hom(K^+, \mathcal{A}_2)$ и при $i = n$ также $(1 + \delta) \in Aut\ (K^+)$. Очевидно, $\zeta_{i,\lambda,\delta}$ (аналогично, $\xi_{i,\lambda,\delta}$) – автоморфизм алгебры Ли $NC_n(K)$ тогда и только тогда, когда

$$x^{\lambda} = 1^{\lambda} x,\ x^{\delta} = 1^{\delta} x \quad (x \in K).$$

Выявим гиперцентральные автоморфизмы высоты > 1 алгебры Ли $NC_n(K)$. Их определяем действием на базисных единицах e_{ij} (образ e_{ij} опускаем, если действие тождественное). Так, каждому элементу $t \in K$ сопоставляем гиперцентральный автоморфизм

$$e_{nn-1} \to e_{nn-1} + te_{n-1,-n+1}, \tag{4.3}$$

совпадающий с автоморфизмом (2.6) из § 2.

При $t \in \mathcal{A}_3$ в работе [6] вводился автоморфизм

$$e_{nn-1} \to e_{nn-1} + te_{n-1,-n+2},\ e_{nn-2} \to e_{nn-2} + te_{n-1,-n+1}. \tag{4.4}$$

Гиперцентральный автоморфизм наибольшей высоты получаем для любого элемента $t \in \mathcal{A}_2$ по правилу

$$e_{nn-1} \to e_{nn-1} + te_{n-2,-n+3},\ e_{nn-2} \to e_{nn-2} + te_{n-1,-n+3}, \tag{4.5}$$

$$e_{nn-3} \to e_{nn-3} + te_{n-1,-n+2}.$$

Это отображение тождественно на всех порождающих (3.1), кроме e_{nn-1}. Продолжение ϕ линейно на $NC_n(K)$ и тождественно на всех элементах e_{iv} базиса Шевалле, кроме e_{nn-1} и элементов

$$e^{\phi}_{nn-2} = [e^{\phi}_{nn-1}, e^{\phi}_{n-1,n-2}] = e_{nn-2} + te_{n-1,-n+3},\ e^{\phi}_{nn-3} = e_{nn-3} + te_{n-1,-n+2}.$$

При $i \leq n - 2$ имеем $[e_{nn-1}, e_{iv}] = 0$ и поэтому соотношение

$$[e_{nn-1}, e_{iv}]^{\phi} = [e^{\phi}_{nn-1}, e^{\phi}_{iv}]$$

равносильно равенству

$$[te_{n-2,-n+3}, e_{iv}] = 0.$$

Когда $v = n-3$, получаем $i = n-2$ и $2te_{n-2,-n+2} = 0$, т. е. $2t = 0$. При этом условие ϕ-инвариантности основных соотношений в случаях $i = n, n-1$ также легко проверяется. Аналогично проверяются условия

$$[e_{nn-2}, e_{iv}]^{\phi} = [e_{nn-2}^{\phi}, e_{iv}^{\phi}] \ \ (e_{iv} \neq e_{nn-2}),$$

$$[e_{nn-3}, e_{iv}]^{\phi} = [e_{nn-3}^{\phi}, e_{iv}^{\phi}] \ \ (e_{iv} \neq e_{nn-3}).$$

Несложно проверяется, что при $t \in \mathcal{A}_2$ определены автоморфизмы:

$$e_{nn-1} \to e_{nn-1} + te_{n-2,-n+2}, \ e_{nn-2} \to e_{nn-2} + te_{n-1,-n+2}; \tag{4.6}$$

$$e_{n-1n-2} \to e_{n-1n-2} + te_{n,-n+2}; \tag{4.7}$$

$$e_{n-1n-2} \to e_{n-1n-2} + te_{n,-n+3}, \ e_{n-1n-3} \to e_{n-1n-3} + te_{n,-n+2}; \tag{4.8}$$

$$e_{n-1n-2} \to e_{n-1n-2} + te_{n-1,-n+1}, \ e_{nn-2} \to e_{nn-2} + te_{n,-n+1}. \tag{4.9}$$

5. Доказательство основной теоремы

Пусть ϕ - произвольный автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 5)$. Леммы 6, 7, 8 и 9 описывают его действие на порождающих (3.1).

Лемма 6. *Всякий автоморфизм ϕ кольца Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 5)$ тождественен по модулю $T_{2,-2} + L_n$, с точностью до умножения на стандартные автоморфизмы.*

Доказательство. Пусть ϕ — автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 5)$. Тогда в силу характеристичности, по лемме 5, идеала $T_{2,-2}$, получаем, что ϕ индуцирует автоморфизм на факторкольце $NC_n(K)/T_{2,-2} \simeq NA_n(K) \simeq NT(n+1, K)$.

С учетом характеристичности идеала $T_{1,-1}$ и известного описания $Aut(NA_n(K))$ [4, Теорема 1], получаем тождественность ϕ на Ke_{nn-1} (аналогично, на $Ke_{iv}, v < i < n$) по модулю характеристического идеала $T_{2,-2} + T_{n-2,-1}$ (соответственно, $T_{2,-2} + L_n$), с точностью до умножения на стандартный автоморфизм (произведение диагонального, индуцированного кольцевого и внутреннего автоморфизмов). Поэтому для любых $x, y \in K$ и подходящих $y', y'' \in K$ получаем

$$0 = [xe_{21}, ye_{nn-1}]^{\phi} = [(xe_{21})^{\phi}, (ye_{nn-1})^{\phi}] = xy'e_{n-2,-2} +$$
$$+ xy''e_{n-1,-2} \ \ mod \ T_{n,-1},$$

то есть $(Ke_{nn-1})^{\phi} \subset T_{2,-2} + L_n$. Таким образом лемма доказана. □

Лемма 7. *Автоморфизм ϕ кольца Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 5)$, тождественный по модулю $T_{2,-2}+L_n$, с точностью до умножения на внутренний автоморфизм, действует на множествах Ke_{ii-1}, $2 \leq i \leq n-3$ как центральный автоморфизм. Кроме того,*

$$(xe_{nn-1})^\phi \in xe_{nn-1} + T_{n-2,-n+2} + Ke_{n-2,-n+3},$$

$$(xe_{n-2n-3})^\phi \in xe_{n-2n-3} + T_{n,-n+2} + Ke_{n-2,-n+2},$$

$$(xe_{n-1n-2})^\phi \in xe_{n-1n-2} + Ke_{n-1,-n+1} + T_{n,-n+3}.$$

Доказательство. Исследуем образы

$$(xe_{ii-1})^\phi = ||x_{uv}^{(i)}||,\ 1 < i \leq n,\ x \in K.$$

По лемме 3, с точностью до умножения ϕ на сопряжение элементом из $T_{2,-2}+L_{n-1}$, можно считать выполненными равенства:

$$1_{i,-m}^{(i)} = 0,\ 1 \leq m < i \leq n; \quad 1_{n,-i}^{(i)} = 0,\ 1 \leq i < n.$$

Учитывая перестановочность образа $||x_{uv}^{(i)}||$ и e_{j+1j}^ϕ $(1 \leq i < j < n)$, получаем, что ненулевые элементы матрицы $||x_{uv}^{(i)}||$ лежат лишь в i -той и n - той строках.

Когда $i \leq n-3$, имеем $x_{n,-m}^{(i)} = 0$ при всех $m \neq i, n, n-1$, поскольку элемент $(xe_{ii-1})^\phi$ перестановочен с элементами e_{n-1m}^ϕ $(1 \leq m \leq n-2,\ m \neq i)$.

Из перестановочности xe_{n-2n-3} с элементами e_{n-1m} $(m = 1, 2, ..., n-3)$ получаем, что $x_{n,-m}^{(i)} = 0$ при $m \neq i, n, n-1, n-2$. Аналогично, перестановочность xe_{n-1n-2} с элементами e_{ii-1} $(2 \leq i \leq n-3)$ дает $x_{n,-s}^{(n-1)} = 0,\ \ 0 < s < n-3$. Перестановочность xe_{nn-1} с элементами e_{ii-1} $(2 \leq i \leq n-2)$ дает включение

$$(xe_{nn-1})^\phi \in xe_{nn-1} + T_{n-2,-n+2} + Ke_{n-2,-n+3}.$$

Далее, при $1 < i \leq n-2,\ x, y \in K$ находим произведение

$$[(ye_{i+1i})^\phi, (xe_{ii-1})^\phi] =$$

$$= yxe_{i+1i-1} + \sum_{m=2}^{i-1} x_{i,-m}^{(i)} ye_{i+1,-m} \pm x_{n,-i}^{(i)} ye_{n,-i-1} \pm$$

$$\pm (x_{i,-i}^{(i)} y - y_{i+1,-i+1}^{(i+1)} x) e_{i+1,-i}.$$

Его $(i+1, m)$ — координата равна $yx_{im}^{(i)}$ $(-i < m < 0)$, а $(n, -i-1)$ — координата равна $x_{n,-i}^{(i)} y$. Пользуясь симметричностью по $x, y \in K$, получаем равенство $yx_{im}^{(i)}=xy_{im}^{(i)}$. Из него подстановкой $x=1$ получаем $y_{im}^{(i)}=0$ и, аналогично, $y_{n,-i}^{(i)}=0$ при всех $y\in K$.

Далее находим, при определенном выборе знаков $\pm$, следующие равенства

$$(yxe_{i+1i-1})^{\phi}=[(ye_{i+1i})^{\phi},(xe_{ii-1})^{\phi}]=yxe_{i+1i-1}\pm yx_{i,-i}^{(i)}e_{i+1,-i},$$

$$(yxe_{i+2,i})^{\phi}=[(ye_{i+2,i+1})^{\phi},(xe_{i+1i})^{\phi}]=yxe_{i+2,i}\pm yx_{i,-i}^{(i)}e_{i+2,-i-1},$$

$$0=[(abe_{i+2,i})^{\phi},(yxe_{i+1,i-1})^{\phi}]=\pm abx_{i,-i}^{(i)}ye_{i+2,-i-1},$$

откуда $x_{i,-i}^{(i)}=0$ при $2\le i\le n-3$. Используя ϕ-инвариантность перестановочности xe_{ii-1} $(2\le i\le n-3)$ с элементом e_{nn-1}, получаем также $x_{n,-n+1}^{(i)}\in\mathcal{A}_2$.

По доказанному, получаем ϕ действует тождественно на множествах Ke_{ii-1} при $2\le i\le n-3$, с точностью до умножения на внутренний и центральный автоморфизмы, а для случаев $i=n-2,n-1,n$ имеем:

$$(xe_{nn-1})^{\phi}\in xe_{nn-1}+T_{n-2,-n+2}+Ke_{n-2,-n+3},$$

$$(xe_{n-2n-3})^{\phi}\in xe_{n-2n-3}+T_{n,-n+2}+Ke_{n-2,-n+2},$$

$$(xe_{n-1n-2})^{\phi}\in xe_{n-1n-2}+Ke_{n-1,-n+1}+T_{n,-n+3}.$$

Лемма доказана. □

Подгруппу гиперцентральных автоморфизмов, порожденных автоморфизмами (4.3)–(4.9), обозначим через V.

Лемма 8. *Пусть ϕ — автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$ $(n\ge 5)$, удовлетворяющий утверждениям леммы 7. Тогда, с точностью до умножения на центральный, внутренний автоморфизмы и автоморфизм из V, ϕ тождественен на элементах из Ke_{ii-1} при $2\le i\le n$.*

Доказательство. В силу выбора ϕ, для любых $x,y,z\in K$ существуют $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,$ β_3,β_4 $\gamma_1,...,\gamma_6\in End(K^+)$ такие, что по модулю $T_{n,-n}$ выполняются равенства

$$(xe_{n-2n-3})^{\phi}=xe_{n-2n-3}+x^{\alpha_1}e_{n,-n+1}+x^{\alpha_2}e_{n,-n+2}+x^{\alpha_3}e_{n-2,-n+2},$$

$$(ye_{n-1n-2})^{\phi}=ye_{n-1n-2}+y^{\beta_1}e_{n,-n+2}+y^{\beta_2}e_{n-1,-n+1}+y^{\beta_3}e_{n,-n+3}$$
$$+y^{\beta_4}e_{n,-n+1},$$

$$(ze_{nn-1})^{\phi}=ze_{nn-1}+z^{\gamma_1}e_{n,-n+1}+z^{\gamma_2}e_{n,-n+2}+z^{\gamma_3}e_{n-1,-n+1}+$$
$$+z^{\gamma_4}e_{n-1,-n+2}+z^{\gamma_5}e_{n-2,-n+2}+z^{\gamma_6}e_{n-2,-n+3}.$$

Для произвольного $x \in K$ по модулю $T_{n,-n}$ получаем соотношения

$$0 = [(xe_{n-1n-2})^{\phi}, e^{\phi}_{n-1n-2}] = \pm(x1^{\beta_1} - x^{\beta_1})e_{n,-n+1},$$

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e^{\phi}_{nn-1}] = \pm 2(x1^{\gamma_1} - x^{\gamma_1})e_{n,-n} \pm (x1^{\gamma_3} - x^{\gamma_3})e_{n,-n+1} \pm$$
$$\pm(x1^{\gamma_4} - x^{\gamma_4})e_{n,-n+2}.$$

Отсюда, при некотором $b \in \mathcal{A}_2$ получаем

$$x^{\gamma_1} = 1^{\gamma_1}x + b,\ x^{\beta_1} = 1^{\beta_1}x,\ x^{\gamma_3} = 1^{\gamma_3}x,\ x^{\gamma_4} = 1^{\gamma_4}x\ \ (x \in K). \tag{5.1}$$

Вычислим ϕ – образы элементов xye_{n-1n-3} и zye_{nn-2}.

$$(xye_{n-1n-3})^{\phi} = [(ye_{n-1n-2})^{\phi}, (xe_{n-2n-3})^{\phi}] = xye_{n-1n-3} - xy^{\beta_3}e_{n,-n+2}+$$
$$x^{\alpha_2}ye_{n,-n+1} + yx^{\alpha_3}e_{n-1,-n+2},$$
$$(zye_{nn-2})^{\phi} = [(ze_{nn-1})^{\phi}, (ye_{n-1n-2})^{\phi}] = zye_{nn-2} + (zy^{\beta_2} - yz^{\gamma_2})e_{n,-n+1}$$
$$-2yz^{\gamma_4}e_{n-1,-n+1} - yz^{\gamma_5}e_{n-1,-n+2} + 2zy^{\beta_4}e_{n,-n} - z^{\gamma_6}ye_{n-1,-n+3}.$$

Пользуясь их инвариантностью при изменениях $x, y \in K$, сохраняющих произведение xy, получаем при некотором $b \in \mathcal{A}_2$

$$x^{\beta_4} = x1^{\beta_4} + b,\ x^{\alpha_2} = 1^{\alpha_2}x,\ x^{\alpha_3} = 1^{\alpha_3}x,\ x^{\beta_3} = 1^{\beta_3}x, \tag{5.2}$$
$$x^{\beta_2} = 1^{\beta_2}x,\ x^{\gamma_2} = 1^{\gamma_2}x,\ x^{\gamma_5} = 1^{\gamma_5}x,\ x^{\gamma_6} = 1^{\gamma_6}x.$$

Таким образом, умножением ϕ на корневые автоморфизмы и центральные автоморфизмы получаем $\alpha_2 = \beta_4 = 0$.

Произведение $[(ze_{nn-1})^{\phi}, (xye_{nn-2})^{\phi}]$ равно нулю. Его $(n, -n)$-координата равна

$$2(xzy^{\beta_2} - zyx^{\gamma_2} - xyz^{\gamma_2}) = 0$$

при любых $x, y, z \in K$. Делая подстановки $x = z = 1$ и $z = y = 1$, получаем включения

$$y^{\beta_2} \in \mathcal{A}_2 + 2 * y * 1^{\gamma_2}, \quad x^{\gamma_2} \in \mathcal{A}_2 + x(1^{\beta_2} - x * 1^{\gamma_2}),$$

которые показывают, что с точностью до умножения ϕ на корневой автоморфизм ($te_{n-1,-n+2}$ – сопряжение) и автоморфизм (4.9) верны равенства $\beta_2 = \gamma_2 = 0$.

С другой стороны, соотношения

$$0 = [(xe_{n-2n-3})^{\phi}, (ye_{nn-1})^{\phi}] = \pm 2x^{\alpha_1}ye_{n,-n} \pm 2xy^{\gamma_6}e_{n-2,-n+2},$$
$$0 = [(xye_{nn-2})^{\phi}, (ze_{n-1n-3})^{\phi}] = \pm 2xyz^{\beta_3}e_{n,-n} \pm xyz^{\alpha_3}e_{n,-n+1},$$
$$0 = [(xe_{n-1n-2})^{\phi}, (yze_{nn-2})^{\phi}] = \pm 2yzx^{\beta_1}e_{n,-n} \pm 2xyz^{\gamma_5}e_{n-1,-n+1}.$$

дают ограничения

$$2K^{\alpha_1} = 0,\ 2K^{\beta_1} = 0,\ 2K^{\beta_3} = 0,\ 2K^{\gamma_5} = 0,\ 2K^{\gamma_6} = 0 \qquad (5.3)$$

и условие $\alpha_3 = 0$. Вместе с (5.1),(5.2) ограничения (5.3) показывают, что умножением ϕ на гиперцентральные автоморфизмы вида (4.7),(4.8),(4.5) мы можем добиться условий $\beta_1 = \beta_3 = \gamma_6 = 0$. Умножая ϕ на центральный автоморфизм, получаем $\alpha_1 = 0$.

В силу (5.1),(5.2) и соотношения

$$0 = [(e_{nn-1})^{\phi}, (e_{nn-2})^{\phi}] = (-2 * 1^{\gamma_4} - 1^{\gamma_4})e_{n,-n+1} = -3 * 1^{\gamma_4} e_{n,-n+1},$$

получаем $1^{\gamma_4} \in \mathcal{A}_3$, то есть $\gamma_4 = 0$, с точностью до умножения ϕ на автоморфизм (4.4).

С учетом (5.1), (5.2), (5.3), с точностью до умножения ϕ на автоморфизмы (4.3), (4.6), справедливы условия $\gamma_3 = \gamma_5 = 0$. Далее. Умножая ϕ на произведение корневого и центрального автоморфизмов, получаем равенство $\gamma_1 = 0$. Лемма доказана. ☐

Лемма 9. *Пусть ϕ - автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$ ($n \geq 5$), тождественный на Ke_{ii-1} ($2 \leq i \leq n$). Тогда ϕ тождественен на $Ke_{i,-i}$ при $1 \leq i \leq n$, с точностью до умножения ϕ на стандартный автоморфизм.*

Доказательство. Из характеристичности идеалов $T_{1,-i}$ и перестановочности при $s \neq -i$ элементов $e_{i,-i}$ и e_{s+1s} вытекают включения

$$(xe_{1,-1})^{\phi} \in xe_{1,-1} + Ke_{n,-1} + Z_1, \qquad (5.4)$$

$$(xe_{i,-i})^{\phi} \in Ke_{i,-i} + Ke_{n,-i} + Z_1 \quad (i = 2, ..., n-1).$$

Эти включения и характеристичность идеала $T_{1,-1}$ показывают, что верно равенство:

$$(ye_{1,-1})^{\phi} = ye_{1,-1} + y^{\lambda}e_{n,-1} \mod Z_1, \quad \lambda \in End(K^+).$$

Используя абелевость идеала $T_{2,-2}$, находим произведение

$$[(ze_{21})^{\phi}, (ye_{1,-1})^{\phi}] = zye_{2,-1} + y^{\lambda}ze_{n,-1}.$$

Симметричность этого произведения, относительно y, z, дает $y^{\lambda_1} = 1^{\lambda_1}y$ для всякого $y \in K$. Поэтому ϕ действует тождественно на $Ke_{1,-1}$, с точностью до умножения на корневой автоморфизм.

В силу (5.4), существуют $\lambda_i, \delta_i \in End(K^+)$ такие, что по модулю центра выполняются равенства

$$(xe_{i,-i})^{\phi} = x^{\delta_i}e_{i,-i} + x^{\lambda_i}e_{n,-i}, \quad (2 \leq i \leq n-1,\ x \in K).$$

Для них получаем

$$(xe_{i+1,-i})^{\phi} = [(e_{i+1i})^{\phi}, (xe_{i,-i})^{\phi}] = x^{\delta_i} e_{i+1,-i} + x^{\lambda_i} e_{n,-i-1} \quad (2 \leq i \leq n-2),$$

$$(xe_{n,-n+1})^{\phi} = [(e_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,-n+1})^{\phi}] = x^{\delta_i} e_{n,-n+1} + 2x^{\lambda_i} e_{n,-n}.$$

С другой стороны,

$$(xe_{i+1,-i})^{\phi} = [(xe_{ii-1})^{\phi}, (e_{i+1,-i+1})^{\phi}].$$

По условию леммы, ϕ тождественен на элементах $xe_{ii-1}, e_{i+1,-i+1}$. Отсюда $(xe_{i+1,-i})^{\phi} xe_{i+1,-i}$ и, как следствие, $\lambda_i = 0$, $\delta_i = 1$ $(2 \leq i \leq n)$, с точностью до умножения ϕ на стандартный автоморфизм. Лемма доказана. □

Окончание доказательства. Из леммы 8 вытекает, что с точностью до умножения на автоморфизмы из V и стандартные автоморфизмы, ϕ – тождественен на элементах из Ke_{ii-1} $(2 \leq i \leq n)$. В силу леммы 9, получаем тождественность ϕ на элементах из $Ke_{i,-i}$ $(1 \leq i \leq n)$.

Учитывая, что кольцо Ли $NC_n(K)$ порождается (3.1) получаем, что ϕ раскладывается в произведение стандартного автоморфизма и гиперцентрального автоморфизма из V. Теорема доказана. ■

6. Замечание о случае малых рангах

Заметим, что схема доказательства основной теоремы нарушается при малых n. Строение подгруппы V гиперцентральных автоморфизмов существенно отличается при $n = 4$ от случая $n \geq 5$. При этом, отображения (4.3)-(4.8) определяют автоморфизмы алгебры Ли $NC_n(K)$ при $n = 4$. При $n = 3$ отображение (4.8), (4.5) не определены, что приводит к необходимости рассматривать этот случай отдельно. Когда $n = 2$, не определены отображения (4.3)-(4.8).

Как отмечалось выше, автоморфизмы алгебры Ли $NC_n(K)$ при $n = 2, 3, 4$ описаны в [6], когда 2 — обратимый элемент кольца K и $\mathcal{A}_3 = 0$.

Далее исследуем автоморфизмы алгебры Ли $NC_2(K)$ при $2K = 0$.

Алгебра Ли $NC_2(K)$ изоморфна алгебре Ли $NB_2(K)$. Базу $NB_2(K)$ составляют e_a, e_b, e_{a+b} и e_{2a+b}. При $2K = K$ алгебру $NB_2(K)$ порождают элементы e_a, e_b. Пусть $2K = 0$. Тогда минимальное порождающее множество составляют e_a, e_b, e_{2a+b}. Непосредственные вычисления показывают, что любой матрице $A \in GL(2, K)$ однозначно соответствует автоморфизм алгебры $NB_2(K)$, переводящий столбец $(e_a, e_b)^T$ в $A(e_a, e_b)^T$ и тождественный на Ke_{2a+b}; обозначаем его через $\widetilde{A}$ (множество всех автоморфизмов $\widetilde{A}$ обозначим $\widetilde{GL}(2, K)$).

По аналогии с основной теоремой доказывается

Теорема 2. Пусть K — ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Если $2K = 0$, то группу автоморфизмов алгебры $NB_2(K)$ порождают $\widetilde{GL}(2, K)$, центральные и внутренние автоморфизмы.

Автор статьи выражает благодарность профессору В. М. Левчуку за внимание, проявленное к данному исследованию.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1972.
2. Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами / Е. И. Бунина // Успехи мат. наук. – 2007 – Т. 62, вып. 5. – С. 143–144.
3. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле / В. М.Левчук // Алгебра и логика. – 1990 – Т. 29, вып. 3. – С. 316–338.
4. Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов / В. М. Левчук // Сиб. мат. журн. – 1983 – Т. 24, вып. 4. – С. 543–557.
5. Bunina E. I. Combinatorial and logical aspects of linear groups and Chevalley groups / E. I. Bunina, A. V. Mikhalev // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005 – Vol. 85, N 1–3. – P. 57–74.
6. Cao Y. Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings / Y. Cao, D. Jiang, J. Wang // J. Algebra. – 2007. – Vol. 17, N 3. – P. 527–555.
7. Carter R. Simple groups of Lie type / R. Carter. – N. Y. : Wiley and Sons, 1972.
8. Gibbs J. Automorphisms of certain unipotent groups / J. Gibbs // J. Algebra – 1970 – Vol. 14, N 2. – P. 203-228.
9. Seligman G. B. On automorphisms of Lie algebras of classical type / G. B. Seligman // I-III, Trans. Amer. Math. Soc. – 1959 (I), 1960 (II), 1960 (III). – Vol. 92, 94, 97. – P. 430-448, 452-481, 286-316.

Литаврин Андрей Викторович, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
(e-mail: anm11@rambler.ru)

A. V. Litavrin

Automorphisms of the Nilpotent Subalgebra $N\Phi(K)$ Chevalley Algebra of Symplectic Type

Abstract. We study automorphisms of the nilpotent subalgebra $N\Phi(K)$ of the Chevalley algebra associated with a root system Φ over associative commutative ring K with the identity. In the present paper the automorphism group Aut $(N\Phi(K))$ is described for the symplectic type.

Keywords: Chevalley algebra, nilpotent subalgebra, Lie ring, automorphism.

References

1. Bunina E.I Automorphisms of Chevalley groups of some type over local rings (in Russian). *Uspekhi matem. nauk*, 2007, vol. 62, no 5, pp. 143-144.
2. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups (in Russian). *Algebra i logika*, 1990, vol. 29, no 3, pp. 316-338.
3. Levchuk V.M. Connections between the unitriangular group and certain rings. Part 2. Groups of automorphisms (in Russian). *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1983, vol. 24, no 4, pp. 543-557.
4. Bourbaki N. Groupes et algebraes de Lie. Paris, 1972.
5. Bunina E.I., Mikhalev A.V. Combinatorial and logical aspects of linear groups and Chevalley groups. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2005, vol. 85, no 1–3, pp. 57-74.
6. Cao Y., Jiang D., Wang D. Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings. *J. Algebra*, 2007, vol. 17, no 3, pp. 527-555.
7. Carter R. Simple groups of Lie type. New York, Wiley and Sons, 1972.
8. Gibbs J. Automorphisms of certain unipotent groups. *J. Algebra*, 1970, vol. 14, no 2, pp. 203-228.
9. Seligman G.B. On automorphisms of Lie algebras of classical type. *I-III, Trans.Amer. Math. Soc.*, 1959 (I), 1960 (II), 1960 (III), vol. 92, 94, 97, pp. 430-448, 452-481, 286-316.

Litavrin Andrey Viktorovich, Postgraduate, Siberian Federal University, 79, Svobodny, Krasnoyarsk, 660041 (e-mail: anm11@rambler.ru)