Серия «Математика»
2016. Т. 17. С. 12—22

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.1+519.44/45
MSC 05+20

# Перечисление собственных $t$-мерных подпространств пространства $V_m$ над полем $GF(q)$

Г. П. Егорычев
*Сибирский федеральный университет*

**Аннотация.** В алгебре Шевалле над полем $K$, ассоциированной с произвольной системой корней, выделена нильтреугольная подалгебра $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r(r \in \Phi^+)\}$. В 2001 г. Г. П. Егорычевым и В. М. Левчуком были поставлены две проблемы перечисления идеалов: специальных идеалов в алгебрах классических типов (проблема 1) и всех идеалов (проблема 2). При их решении возникает задача нахождения числа $\widetilde{V}_{m,t}$, $1 \leq t \leq m$, всех собственных $t$-мерных подпространств пространства $V_m$ над полем $GF(q)$. Недавно В. П. Кривоколеско и В. М. Левчук нашли явное выражение для числа $\widetilde{V}_{m,t}$ через кратную сумму от $q$-комбинаторных чисел. Здесь с помощью метода коэффициентов интегрального представления и вычисления комбинаторных сумм, разработанного автором в конце 1980-х гг., найдено интегральное представление для чисел $\widetilde{V}_{m,t}$. Как следствие, получены две простые вычислительные формулы для этих чисел.

**Ключевые слова:** число подпространств пространства, метод коэффициентов, комбинаторные суммы.

## 1. Введение

Проблема нахождения числа подпространств пространств различного типа непосредственно связана с проблемой существования базисов в этих пространствах и их перечисления. Этой проблеме посвящено немалое число результатов различных авторов, из которых наиболее известной, вероятно, является следующая формула для числа $V_{m,t}$ всех подпространств размерности $t$, $1 \leq t \leq m$, векторного пространства $V_m$ над полем $GF(q)$ (см. [6], с. 50):

$$V_{m,t} = \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_q, \ 1 \leq t \leq m. \tag{1.1}$$

Здесь $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $q \neq 0, 1, 2, \ldots$, есть $q$-биномиальный коэффициент,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! \times [n-k]_q!} =$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q)\ldots(1-q^k)\cdot(1-q)\ldots(1-q^{n-k})}, \ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0, \ k > n. \qquad (1.2)$$

В [8] Г. П. Егорычевым и В. М. Левчуком были поставлены две проблемы перечисления идеалов: специальных идеалов в алгебрах классических типов (проблема 1) и всех идеалов (проблема 2). При решении этой проблемы недавно в [3] была найдена следующая формула (кратного суммирования) для числа $\widetilde{V}_{m,t}$, $1 \leq t \leq m$, всех собственных $t$-мерных подпространств пространства $V_m$ над полем $GF(q)$:

$$\widetilde{V}_{m,1} = (q-1)^{m-1},$$

$$\widetilde{V}_{m,2} = \frac{(q+1)}{q}(q^2-1)^{m-2} - \frac{1}{q}(q-1)^{m-2},$$

$$\widetilde{V}_{m,t} = \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leq m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \cdot \prod_{k=1}^{t-1}\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}, \ 3 \leq t \leq m. \qquad (1.3)$$

Здесь с помощью метода коэффициентов Егорычева ([1], [7]) найдено интегральное представление для чисел $\widetilde{V}_{m,t}$, и, как следствие этого результата, найдены две новые вычислительные формулы однократного суммирования для этих чисел. Первая формула рекуррентная, а вторая — типа включения-исключения, представленная комбинаторной знакопеременной суммой от произведений обычных и $q$-биномиальных коэффициентов. Ранее эти результаты были анонсированы (без доказательства) автором в [2]. В конце этой заметки поставлена задача нахождения комбинаторно-алгебраической интерпретации (прямого доказательства) полученных здесь формул для чисел $\widetilde{V}_{m,t}$.

## 2. Решение задачи

В дальнейших выкладках мы используем схему вычислений и терминологию метода коэффициентов, включая понятие оператора формального вычета $res$ и его свойства (см. [1], гл.1; [7] ). Для формального степенного ряда Лорана $A(u) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n u^n$, $k$ — целое число, с комплексными коэффициентами, по определению, оператор

$$res_u\{A(u)\} = a_{-1}. \qquad (2.1)$$

В частности, для степени $a^n$, $a \in \mathbb{R}$, справедлива следующая простая формула:

$$a^n = res_u\{(1-au)^{-1}u^{-n-1}\},\ n = 0,1,2,\ldots \tag{2.2}$$

**Лемма 1.** *Следующее интегральное представление для $\widetilde{V}_{m,t}$ справедливо:*

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_v\{v^{-m+t-1}\prod_{k=1}^{t}\Big(1-v(q^k-1)\Big)^{-1}\},\ 1 \le t \le m. \tag{2.3}$$

*Доказательство.* Согласно (1.3) при $3 \le t \le m$ имеем

$$\widetilde{V}_{m,t} = \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\le m}\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\prod_{k=1}^{t-1}\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1} :=$$

$$= \sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_3=j_2+1}^{j_4-1}\cdots\sum_{j_{t-1}=j_{t-1}+1}^{j_t-1}\sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{m}\frac{\left(q^t-1\right)^{m-j_t}}{\left(q-1\right)^{t-j_t}}\times\prod_{k=1}^{t-1}\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

Заменяя множители общего члена под знаком последней суммы по формуле (2.2)

$$\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1} = res_{u_k}\left(1-u_k\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1}u_t^{-(j_{k+1}-j_k-1)-1},\ 2 \le k \le t-1,$$

и

$$\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} = (q-1)^{m-t}\left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)^{m-j_t} =$$

$$= (q-1)^{m-t}res_{u_t}\left(1-u_t\left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)\right)^{-1}u_t^{-(m-j_t)-1},$$

получим

$$\widetilde{V}_{m,t} = (q-1)^{m-t}\times$$

$$\times\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_3=j_2+1}^{j_4-1}\cdots\sum_{j_{t-1}=j_{t-1}+1}^{j_t-1}\sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{m}res_{u_t}\left(1-u_t\left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)\right)^{-1}u_t^{-(m-j_t)-1}\times$$

$$\times\prod_{k=2}^{t-1}res_{u_k}\left(1-u_k\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1}u_t^{-(j_{k+1}-j_k-1)-1} = (q-1)^{m-t}\times$$

$$\times\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_3=j_2+1}^{j_4-1}\cdots\sum_{j_{t-1}=j_{t-1}+1}^{j_t-1}\sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{m}res_{u_2,u_3,\ldots,u_t}\{\left(1-u_2\left(\frac{q^2-1}{q-1}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(1-u_3\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)\right)^{-1}\cdots\left(1-u_t\left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times u_2^{-(j_3-j_2-1)-1}u_3^{-(j_4-j_3-1)-1}\cdots u_{t-1}^{-(j_t-j_{t-1}-1)-1}u_t^{-(m-j_t)-1}\}.$$

В последней (кратной) сумме сначала распространим суммирование по каждому индексу $j_2$, $j_3, \ldots, j_t$ до $\infty$. Это возможно, поскольку добавленные члены указанной суммы, очевидно, равны нулю по определению оператора $res$ для каждой переменной $u_2$, $u_3, \ldots, u_t$. Таким образом,

$$\widetilde{V}_{m,t} = (q-1)^{m-t} \times$$

$$\times \sum_{j_2=2}^{\infty} \sum_{j_3=j_2+1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{t-1}=j_{t-1}+1}^{\infty} \sum_{j_t=j_{t-1}+1}^{\infty} res_{u_2,u_3,\ldots,u_t}\{\left(1-u_2\left(\frac{q^2-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(1-u_3\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \cdots \left(1-u_t\left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times u_2^{-(j_3-j_2-1)-1} u_3^{-(j_4-j_3-1)-1} \cdots u_{t-1}^{-(j_t-j_{t-1}-1)-1} u_t^{-(m-j_t)-1}\}.$$

Далее проведём следующую замену индексов суммирования: $i_1 = j_2 - 2$, $i_2 = j_3 - j_2 - 1$, $i_3 = j_4 - j_3 - 1, \ldots,$ $i_{t-1} = j_t - j_{t-1} - 1$, и, как следствие, $i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_{t-1} = (j_2 - 2) + j_t - j_2 - (t-2)$, т.е. $i_1 + i_2 + \ldots + i_{t-1} = j_t - t$, и $j_t = i_1 + i_2 + \ldots + i_{t-1} + t$. Таким образом, имеем

$$\widetilde{V}_{m,t} = (q-1)^{m-t} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{t-1}=0}^{\infty} res_{u_2,\, u_3,\ldots,u_t}\{\left(1-u_2\left(\frac{q^2-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(1-u_3\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \cdots \left(1-u_t\left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times u_2^{-i_2-1} u_3^{-i_3-1} \cdots u_{t-1}^{-i_{t-1}-1} u_t^{-m+(i_1+i_2+\ldots+i_{t-1}+t)-1}\}.$$

Теперь, проведя перегруппировку членов последней суммы, последовательно выделяя её члены с индексами $i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}$, получим

$$\widetilde{V}_{m,t} = (q-1)^{m-t} res_{u_t}\{(\sum_{i_1=0}^{\infty} u_t^{-m+t+i_1-1} \times$$

$$\times \left(1-u_t\left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)\right)^{-1}) \prod_{k=2}^{t-1} \left[\sum_{i_k=0}^{\infty} u_t^{i_k} res_{u_2} \left(1-u_k\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1} u_2^{-i_k-1}\right]\}.$$

Наконец, проведём в последнем выражении суммирование по $i_1$ по формуле геометрической прогрессии

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} u_t^{i_1} = \frac{1}{1-u_t}, |u_t| < 1,$$

и следующее суммирование в каждой из квадратных скобок (независимо) по индексам $i_2, \ldots, i_{t-1}$ по правилу подстановки метода коэффициентов: замена $u_k = u_t$, $k = 2, 3, \ldots, t-1$ :

$$\sum_{i_k=0}^{\infty} u_t^{i_k} res_{u_k} \left(1 - u_k \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1} u_k^{-i_k-1} = \left[\left(1 - u_k \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1}\right]_{u_k=u_t,} =$$

$$= \left(1 - u_t \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1}, \; k = 2, 3, \ldots, t-1.$$

Таким образом, имеем

$$\widetilde{V}_{m,t} = (q-1)^{m-t} \times$$

$$\times res_{u_t} \{ \frac{u_t^{-m+t-1}}{1-u_t} \left(1 - u_t \left(\frac{q^t-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \times \prod_{k=2}^{t-1} \left(1 - u_t \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \} :=$$

$$= (q-1)^{m-t} res_u \{ u^{-m+t-1} \times (1-u)^{-1} \prod_{k=2}^{t} \left(1 - u \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)^{-1} \} =$$

(замена $v = u/(q-1)$, $u = (q-1)v$, $du = (q-1)dv$)

$$= (q-1)^{m-t} res_v \{ (q-1)^{-m+t-1} v^{-m+t-1} \times$$

$$\times (q-1) \times (1 - (q-1)v)^{-1} \prod_{k=2}^{t} \left(1 - v \left(q^k - 1\right)\right)^{-1} \} =$$

$$= res_v \{ v^{-m+t-1} \prod_{k=1}^{t} \left(1 - v \left(q^k - 1\right)\right)^{-1} \},$$

что завершает доказательство леммы 1 при $3 \le t \le m$.

Для окончания доказательства покажем, что формула (2.3) для чисел $\widetilde{V}_{m,t}$ при $3 \le t \le m$ даёт значения для этих чисел при начальных $t = 1$ и 2, приведённых в формуле (1.3). Действительно, согласно (2.3) имеем при $t = 1$ :

$$res_v \{ v^{-(m-1)-1} \prod_{k=1}^{t} (1 - v(q-1))^{-1} \} =$$

$$= res_v \{ v^{-(m-1)-1} \times \left(1 + \sum_{i=1} (q-1)^i v^i \right) \} = (q-1)^{m-1},$$

что соответствует формуле (1.3) при $t = 1$. Аналогично согласно (2.3) имеем при $t = 2$ :

$$res_v \{ v^{-(m-2)-1} \prod_{k=1}^{2} \left(1 - v \left(q^k - 1\right)\right)^{-1} \} =$$

$$= res_v\{v^{-(m-2)-1}\left(1-v\left(q-1\right)\right)^{-1}\left(1-v\left(q^2-1\right)\right)^{-1}\} =$$

$$= \frac{(q+1)}{q} res_v\{v^{-(m-2)-1}\left(1-v\left(q^2-1\right)\right)^{-1}\} -$$

$$- \frac{1}{q} res_v\{v^{-(m-2)-1}\left(1-v\left(q-1\right)\right)^{-1}\} =$$

$$= \frac{(q+1)}{q}(q^2-1)^{m-2} - \frac{1}{q}(q-1)^{m-2},$$

что соответствует формуле (1.3) при $t = 2$. □

С помощью простой замены переменных под знаком оператора $res$ в формуле (2.3) для $\widetilde{V}_{m,t}$ в следующей лемме мы получим две новые формулы для $\widetilde{V}_{m,t}$, каждая из которых имеет некоторое самостоятельное значение.

**Лемма 2.** *Следующие две формулы (интегральные представления) справедливы для числа $\widetilde{V}_{m,t}$, $1 \le t \le m$:*

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_z\{z^{-m-1} \times (1-z)^{m-1} \frac{z^t}{(qz)_t}\}, \tag{2.4}$$

$$= res_z\{z^{-m+t-1} \times (q-z)^{m-1} q^{-t-1} \frac{1}{(z)_t}\}. \tag{2.5}$$

*где, в соответствии со стандартными обозначениями для $q$-многочленов $(z)_t$ и $(zq)_t$, положено*

$$(z)_t = (1-z)(1-qz)\dots(1-q^{t-1}z),$$

$$(zq)_t = (1-zq)(1-q^2z)\dots(1-q^tz) = \prod_{k=1}^{t}(1-zq^k). \tag{2.6}$$

*Доказательство.* Если в (2.3) под знаком оператора $res_v$ (интеграла) сделать замену $v = \frac{z}{1-z}$, и, соответственно,

$$dv = (1-z)^{-2}dz, \Big(1 - v(q^k-1)\Big) = (1-zq^k)/(1-z),$$

то получим формулу (2.4):

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_v\{v^{-m+t-1}\prod_{k=1}^{t}\left(1-v\left(q^k-1\right)\right)^{-1}\} =$$

$$= res_z\{z^{-m+t-1}(1-z)^{m-t+1}(1-z)^{-2} \times \prod_{k=1}^{t}\left(\frac{1-z}{1-zq^k}\right)\} =$$

$$= res_z\{z^{-m+t-1}(1-z)^{m-1} \times \prod_{k=1}^{t}(1-zq^k)^{-1}\} =$$

$$= res_z\{z^{-m-1} \times (1-z)^{m-1}\frac{z^t}{(qz)_t}\}.$$

Аналогично, если в (2.4) под знаком оператора $res_v$ (интеграла) сделать замену $z = w/q$, и, соответственно, $dz = dw/q$, $(qz)_t = (w)_t$, то получим формулу (2.5):

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_w\{\left(\frac{w}{q}\right)^{-m+t-1} \times \left(1-\frac{w}{q}\right)^{m-1}\frac{1}{q}\frac{1}{(w)_t}\} =$$

$$= res_w\{w^{-m+t-1} \times (q-w)^{m-1}q^{-t-1}\frac{1}{(w)_t}\}.$$

Из формул (2.3) и (2.4) непосредственно вытекают две вычислительные формулы для чисел $\widetilde{V}_{m,t}$. □

**Лемма 3.** *Рекуррентная формула для вычисления $\widetilde{V}_{m,t}$. Следующая рекуррентная формула справедлива для числа всех собственных $t$-мерных подпространств пространства $V_m$ над конечным полем $GF(q)$ :*

$$\widetilde{V}_{m,t} = \sum_{k=0}^{m-t}(q^t-1)^k \times \widetilde{V}_{m-1-k,t-1}. \tag{2.7}$$

*Доказательство.* Если в формуле (2.3) для $\widetilde{V}_{m,t}$

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_v\{v^{-m-1}(v^t\prod_{k=1}^{t}\left(1-v\left(q^k-1\right)\right)^{-1})\}$$

под знаком оператора $res_v$ воспользоваться формулой геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-v\left(q^t-1\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(q^t-1\right)^k v^k, |v| < 1/(q^t-1),$$

то получим

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_v\{v^{-m-1} \times \frac{1}{1-v\left(q^t-1\right)} \times (v^t\prod_{k=1}^{t-1}(1-v\left(q^k-1\right))^{-1})\} =$$

$$= res_v\{v^{-m-1} \times (\sum_{k=0}^{\infty}(q^t-1)^k v^k) \times (v^t\prod_{k=1}^{t-1}\left(1-v\left(q^k-1\right)\right)^{-1})\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-t} (q^t-1)^k \times res_v\{v^{-(m-1-k)-1} \times (v^{t-1} \prod_{k=1}^{t-1} \left(1 - v\left(q^k - 1\right)\right)^{-1})\} :=$$

(по формуле (2.3) для $\widetilde{V}_{m,t}$ относительно каждого слагаемого последней суммы)

$$= \sum_{k=0}^{m-t} (q^t-1)^k \times \widetilde{V}_{m-1-k,t-1},$$

что завершает доказательство (2.7). □

В следующей лемме числа $\widetilde{V}_{m,t}$ выражены через конечную знакопеременную сумму (типа включения-исключения) от произведений обычных и $q$-биномиальных коэффициентов с отрицательными степенями.

**Лемма 4.** *Комбинаторная формула для вычисления $\widetilde{V}_{m,t}$. Следующая формула справедлива для числа всех собственных $t$-мерных подпространств пространства $V_m$ над конечным полем $GF(q)$ :*

$$\widetilde{V}_{m,t} = \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^{m-t-k} q^k \binom{m-1}{t+k-1} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q . \tag{2.8}$$

*Доказательство.* Если в формуле (2.4) для $\widetilde{V}_{m,t}$

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_z\{z^{-m+t-1} \times (1-z)^{m-1} \frac{1}{(qz)_t}\}$$

под знаком оператора $res_z$ воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(1-z)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m-1}{k} z^k,$$

и формулой хорошо известного $q$-аналога бинома Ньютона с отрицательными степенями

$$\frac{1}{(qz)_t} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^k z^k, \; |z| < 1,$$

то получим

$$\widetilde{V}_{m,t} = res_z\{z^{-m+t-1} \times (\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} z^k) \times (\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^k z^k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-t} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^k (-1)^{m-t-k} \binom{m-1}{m-t-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^{m-t-k} q^k \binom{m-1}{t+k-1} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q,$$

что завершает доказательство (2.8). □

## 3. Заключение

Хорошо известно, что биномиальные коэффициенты $\binom{m}{k}$, $q$-биномиальные коэффициенты $\begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_q$, числа Лаха и др. допускают (и не единственную) комбинаторную интепретацию (см. [6], [1]). Например, $q$-биномиальный коэффициент $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q$, как указано выше, есть число всех $k$-мерных подпространств $m$-мерного векторного пространства $V_m$ над конечным полем $GF(q)$. Поэтому естественно, возникает следующая

**Задача 1.** Дать алгебраически-комбинаторное истолкование (прямое доказательство) формул (2.7) и (2.8) (см. [8]; [3]; [4]; [5]).

Автор выражает признательность своим коллегам Я. Н. Нужину, Ю.Д. Королькову, В. П. Кривоколеско, В. М. Левчуку, Н. Д. Ходюне за полезные замечания при написании этой заметки.

## Список литературы

1. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев. – Новосибирск : Наука, 1977. – (на англ.: Transl. of Math. Monographs 59, AMS, 1984, 2-nd ed. in 1989).
2. Егорычев Г. П. О числе $\widetilde{V}_{m,t}$ всех собственных $t$-мерных подпространств пространства $V_{\mathbf{m}}$ над полем $GF(q)$ / Г. П. Егорычев // Тр. Междунар. конф. «Алгебра и логика», посвящ. 70-летию В. М. Левчука и «XI школа-конференция по теории групп», посвящ. 70-летию А. Ю. Ольшанского. – Красноярск, 2016. – С. 27.
3. Кривоколеско В. П. Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр / В. П. Кривоколеско, В. М. Левчук // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 166–171.
4. Левчук В. М. Подгруппы унитреугольной группы / В. М. Левчук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – Т. 38, № 6. – С. 1202–1220.
5. Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их обобщения / В. М. Левчук, А. В. Литаврин, Н. Д. Ходюня, В. В. Цыганков // Владикавказ. мат. журн. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 37–46.
6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Т. 1 / Р. Стенли. – М. : Мир, 1990.
7. Egorychev G. P. Method of coefficients: an algebraic characterization and recent applications / G. P. Egorychev // Advances in Combinatorics, Springer, Math. Proc. of the Waterloo Workshop in Computer Algebra 2008, devoted to the 70th birthday G. Egorychev, – 2009. – P. 1–30.

8. Egorychev G. P. Enumeration in the Chevalley algebras / G. P. Egorychev, V. M. Levchuk // ACM SIGSAM Bulletin. – 2001. – Vol. 35, N 2. – P. 20–34.

**Егорычев Георгий Петрович**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт фундаментальной подготовки, Сибирский федеральный университет, 660074, Краснооярск, ул. Киренского 26, каф. "МОДУС“ тел.: (391)2461609 (e-mail: gegorych@mail.ru)

---

**G. P. Egorychev**

**The Enumeration of own $t$-Dimensional Subspaces of a Space $V_m$ over the Field $GF(q)$**

**Abstract**. In the Chevalley algebra over a field $K$ associated with any system of roots, it is allocated the niltriangular subalgebra $N\Phi(K)$ with the basis $\{e_r(r \in \Phi^+)\}$. In 2001 G.P. Egorychev and V.M. Levchuk had been put two problems of a enumeration of ideals: special ideals in the algebras of classical types (the problem 1) and all ideals (the problem 2). At their decision there is the problem of a finding of the number $V_{m,t}$, $1 \leq t \leq m$, all own $t$-dimensional subspaces of space $V_m$ over the field $GF(q)$. Recently V.P. Krivokolesko and V.M. Levchuk have found an obvious expression for the number $V_{m,t}$ through a multiple sum from $q$-combinatorial numbers. Here by means of the method of coefficients of the calculation of combinatorial sums developed by the author in the late eighties, the integral representation for numbers $V_{m,t}$ is found. As consequence two simple computing formulas for these numbers were received.

**Keywords:** a number of subspaces of space, the method of coefficients, combinatorial sums.

## References

1. Egorychev G.P. Integral Representation and Computation of Combinatorial Sums. Novosibirsk, Nauka, 1977. English: Transl. of Math. Monographs 59, AMS, 1984, 2-nd ed. in 1989.
2. Egorychev G.P. About of the number $\widetilde{V}_{m,t}$ of all own $t$-dimensional subspaces of a space $V_m$ over the field $GF(q)$ / G.P. Egorychev. *Trudy Intern. Conf. "Algebra and Logika"devoted to the 70th birthday V. M. Levchuk and "XI Worshop-seminar of theory groups"devoted to the 70th birthday A.Y. Olshanky*, Krasnoyarsk, 2016, p. 27.
3. Krivokolesko V.P., Levchuk V.M. The enumeration of exceptional nilpotent ideals of matrix algebras. *Trudy UrO RAN*, Ekaterinburg, 2015, vol. 21, no 1, pp. 166-171.
4. Levchuk V.M. Subgroups of a unitriagular group. *Izvestia. Akad. Nauk SSSR, Seria Mathem.*, 1974, vol. 38, no 6, pp. 1202-1220.
5. Levchuk V.M., Litavrin A.V., Hodyunyu N.D., Tsygankov V.V. Subgroups of a unitriagular group niltriangular subalgebras of Chevalley algebras and its generalizations. *Vladikavkazsky Mathematical Journal*, 2015, vol. 17, no 2, pp. 37–46.
6. Stanley R. Enumerative Combinatorics, Vol. 1. Moscow, Mir, 1990.
7. Egorychev G.P. Method of coefficients: an algebraic characterization and recent applications. *Advances in Combinatorics, Springer, Math. Proc. of the Waterloo*

*Workshop in Computer Algebra 2008, devoted to the 70th birthday G. Egorychev*, 2009, pp. 1–30.
8. Egorychev G.P., Levchuk V.M. Enumeration in the Chevalley algebras. *ACM SIGSAM Bulletin*, 2001, vol. 35, no 2, pp. 20–34.

**Egorychev Georgy Petrovich**, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Siberian Federal University, 26, Kirenskogo st., Krasnoyarsk, 660074; tel.: (391)2461609 (e-mail: gegorych@mail.ru)