



Серия «Математика»

2016. Т. 17. С. 46–61

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.716

MSC 03B50, 08A99

Параметрически замкнутые классы гиперфункций ранга 2*

Л. В. Рябец

Иркутский государственный университет

Аннотация. Одним из направлений исследования дискретных функций является исследование функциональных систем: множеств функций и множеств операторов, заданных над этими функциями.

В частности, активно изучаются функциональные системы, в которых в отличие от классических над множеством k -значных функций, рассматриваются обобщения функций k -значной логики: частичные функции, мультифункции и гиперфункции. Гиперфункции представляют собой функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений все непустые подмножества множества A относительно оператора суперпозиции.

Кроме оператора суперпозиции интерес представляют более сильные операторы замыкания, дающие нетривиальную классификацию функций. Например, для гиперфункций ранее получен критерий полноты для оператора разветвления по предикату равенства. Еще одним известным сильным оператором является оператор параметрического замыкания. Для него известны все двадцать пять замкнутых классов на множестве булевых функций.

В настоящей работе дается уточнение понятия оператора параметрического замыкания для множества гиперфункций и рассматривается действие этого оператора на множестве гиперфункций на двухэлементном множестве (гиперфункций ранга 2). Для него определены все тринадцать замкнутых классов, из которых классы S^- и L^- являются параметрически предполными. Построена решетка параметрически замкнутых классов гиперфункций ранга 2 и для них указаны параметрические базисы.

Ключевые слова: замыкание, параметрическое замыкание, гиперфункция, критерий полноты, суперпозиция.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-31-00209 мол_a.

1. Введение

Одним из важнейших объектов исследования дискретных функций являются функциональные системы — пары (P, Q) , где P — множество функций, Q — множество операторов, заданных на P .

Наряду с классическими функциональными системами, в которых множеством P является множество функций k -значной логики, достаточно давно изучаются и функциональные системы, где рассматриваются обобщения функций k -значной логики: частичные функции, мультифункции и гиперфункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений все непустые подмножества множества A относительно оператора суперпозиции (см, например, [3; 4; 10; 11; 12; 13]).

Кроме оператора суперпозиции используются операторы замыкания, которые существенно сильнее. В работе [9] исследовалось действие оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства для множества гиперфункций на двухэлементном множестве.

В работах [1; 2] было дано понятие параметрической выразимости и определение оператора параметрического замыкания. Подробное описание параметрически замкнутых классов булевых функций представлено в работе [5].

В данной работе исследуется действие оператора параметрического замыкания на множестве гиперфункций ранга 2. В терминах параметрически замкнутых классов устанавливается критерий полноты в классе P_2^- . Найдены все 13 параметрически замкнутых классов, из них предполными являются два класса.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$ и $\alpha_i \in E_2$, $i \in \{1, \dots, n\}$, тогда выражение $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется двоичным набором или просто набором и обозначается $\tilde{\alpha}$, а число n называется длиной этого набора. Если длина набора $\tilde{\alpha}$ явно не указана, она определяется по контексту. Набор $\tilde{\beta}$ назовем противоположным набору $\tilde{\alpha}$, если длины этих наборов совпадают и $\beta_i = \bar{\alpha}_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Для набора, противоположного набору $\tilde{\alpha}$, будем использовать обозначение $\bar{\tilde{\alpha}}$. Набор $(0, \dots, 0)$ называется нулевым и будет обозначаться через $\tilde{0}$, а набор $(1, \dots, 1)$ — единичным и обозначаться через $\tilde{1}$.

Пусть A — конечное множество, тогда 2^A — множество всех подмножеств множества A и $|A|$ — его мощность. Определим P_2 — множество всех функций и P_2^- — множество всех гиперфункций ранга 2 следующим образом:

$$P_{2,n}^- = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2} \setminus \{\emptyset\}\}, \quad P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-$$

$$P_{2,n} = \left\{ f \mid f \in P_{2,n}^- \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n \right\}, \quad P_2 = \bigcup_n P_{2,n}.$$

Далее мы не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение « $-$ » (прочерк). Под прочерком будем понимать и гиперфункцию, которая на любом своем наборе принимает значение прочерк. Количество переменных такой функции зависит от контекста.

Одноместную гиперфункцию $f \in P_2^-$ будем записывать в виде вектора $(f(0) f(1))$. Например, вектором $(- 0)$ обозначим такую гиперфункцию $f(x)$, что $f(0) = -$ и $f(1) = 0$. Гиперфункции f , зависящие от n переменных, будем записывать в виде вектора $(\alpha_{\tilde{0}} \dots \alpha_{\tilde{1}})$ длины 2^n , где каждый элемент $\alpha_{\tilde{\sigma}} = f(\tilde{\sigma})$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n), f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)$ — гиперфункции. Суперпозиция $f(f_1, \dots, f_n)$ определяет гиперфункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (1.1)$$

Пусть $Q \subseteq P_2^-$. Замыканием $[Q]$ множества Q называется множество всех гиперфункций из P_2^- , которые можно получить из Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных и суперпозиции. Множество называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием. Замкнутые множества также будем называть замкнутыми классами.

Символами языка Paf являются переменные x_1, x_2, \dots, x_i , символы f_i для обозначения гиперфункций, символ включения \subseteq , логическая связка конъюнкция $\&$, квантор существования \exists , левая и правая скобки, запятая.

Понятие термина вводится следующим образом:

- любая переменная есть терм;
- если x_{i_1}, \dots, x_{i_n} — переменные (не обязательно различные), а f_j — символ n -местной гиперфункции, то $f_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ есть терм;
- если t_1, \dots, t_m — термы, f_i — символ m -местной гиперфункции, то $f_i(t_1, \dots, t_m)$ есть терм.

Всякий терм t языка Paf определяет некоторую гиперфункцию h . Если f_1, \dots, f_m — символы функций, входящие в терм t , то будем говорить, что терм t выражает функцию h через функции f_1, \dots, f_m .

Если t_1, t_2 — термы языка Paf , то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой. Остальные формулы определяем следующим образом: если Φ_1, Φ_2 — формулы, а x_i — переменная, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\exists x_i)\Phi_1$ — формулы языка Paf (параметрические формулы).

Пусть $Q \subseteq P_2^-$, $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^-$, $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ — формула языка Paf со свободными переменными x_1, \dots, x_n, y , все функциональные символы которой являются обозначениями функций из $[Q]$. Будем говорить, что формула Φ параметрически выражает функцию f через

функции множества Q , если множества истинности формулы Φ и отношения $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$ совпадают. Множество всех функций, параметрически выражимых через функции множества Q , назовем параметрическим замыканием множества Q и обозначим $\text{Par}[Q]$. Множество Q , которое совпадает со своим параметрическим замыканием, называется параметрически замкнутым классом.

Утверждение 1. *Любой параметрически замкнутый класс гиперфункций замкнут относительно операции суперпозиции.*

Доказательство. Пусть Q — параметрически замкнутый класс гиперфункций, $f_0, f_1, \dots, f_n \in Q$ и

$$g(x_1, \dots, x_m) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Покажем, что $g \in Q$.

Обозначим через

$$\Phi_0(x_1, \dots, x_n, y), \quad \Phi_1(x_1, \dots, x_m, y), \quad \dots, \quad \Phi_n(x_1, \dots, x_m, y)$$

формулы языка Par , которые параметрически выражают отношения

$$y \subseteq f_0(x_1, \dots, x_n), \quad y \subseteq f_1(x_1, \dots, x_m), \quad \dots, \quad y \subseteq f_n(x_1, \dots, x_m)$$

через функции множества Q . Тогда формула

$$(\exists y_1) \dots (\exists y_n) (\Phi_1(x_1, \dots, x_m, y_1) \& \dots \\ \dots \& \Phi_n(x_1, \dots, x_m, y_n) \& \Phi_0(y_1, \dots, y_n, z))$$

параметрически выражает отношение $z \subseteq g(x_1, \dots, x_m)$ через функции множества Q . Таким образом, $g \in Q$. \square

Определим рассматриваемые множества гиперфункций.

- U_{01}^- — множество всех булевых функций, существенно зависящих от одной переменной и сохраняющих константы 0 и 1, в объединении с функцией прочерк.
- U_0^- — множество всех булевых функций, существенно зависящих от одной переменной и сохраняющих константу 0, в объединении с функцией прочерк.
- U_1^- — множество всех булевых функций, существенно зависящих от одной переменной и сохраняющих константу 1, в объединении с функцией прочерк.
- MU^- — множество всех монотонных булевых функций, существенно зависящих от одной переменной, в объединении с функцией прочерк.
- SU^- — множество всех самодвойственных булевых функций, существенно зависящих от одной переменной, в объединении с функцией прочерк.

- U^- — множество всех булевых функций, существенно зависящих от одной переменной, в объединении с функцией прочерк.
- L_{01}^- — множество всех линейных булевых функций, сохраняющих константы 0 и 1, в объединении с функцией прочерк.
- L_0^- — множество всех линейных булевых функций, сохраняющих константу 0, в объединении с функцией прочерк.
- L_1^- — множество всех линейных булевых функций, сохраняющих константу 1, в объединении с функцией прочерк.
- L^- — множество всех линейных булевых функций в объединении с функцией прочерк.
- SL^- — множество всех самодвойственных линейных булевых функций в объединении с функцией прочерк.
- S^- — множество гиперфункций, которые на любой паре противоположных наборов могут принимать либо противоположные значения $(0, 1)$ и $(1, 0)$, либо прочерки $(-, -)$.

2. Основной результат

Покажем параметрическую замкнутость определенных выше классов и определим параметрически полные множества гиперфункций.

Лемма 1. *Класс S^- является параметрически замкнутым.*

Доказательство. Пусть параметрическая формула $\Phi(\tilde{x}, y)$ получена с помощью гиперфункций g_1, \dots, g_k из класса S^- . Покажем, что такая формула будет представлять отношение $y \subseteq f(\tilde{x})$, где гиперфункция $f(\tilde{x})$ также принадлежит классу S^- .

Для этого покажем, что таблица истинности формулы Φ является симметричной, т.е. на противоположных наборах формула принимает одинаковые истинностные значения, а именно

$$\Phi(\tilde{x}, y) = \Phi(\bar{\tilde{x}}, \bar{y})$$

для любого набора $\tilde{x} \in E_2^n, y \in E_2$. Доказательство будем проводить индукцией по построению формулы Φ .

Базис индукции. Рассмотрим элементарную параметрическую формулу

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = g_1(z_1, \dots, z_p) \subseteq g_2(w_1, \dots, w_q), \quad (2.1)$$

где $\{z_1, \dots, z_p\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$, $\{w_1, \dots, w_q\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$ и $g_1, g_2 \in S^-$. Построим для этой формулы таблицу истинности и определим истинность формулы на произвольном наборе $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$ и его отрицании. Для этого на указанном наборе рассмотрим возможные значения гиперфункций g_1, g_2 . Для упрощения записи будем считать, что

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) \subseteq g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q),$$

где $\{\beta_1, \dots, \beta_p\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$ и $\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$.

1. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = a$, где $a \in E_2$. Рассмотрим возможные значения гиперфункции g_2 . Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ тоже принимает значение a , то в силу того, что $g_1, g_2 \in S^-$, получим $g_1(\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_p) = \bar{a}$ и $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = \bar{a}$. В этом случае $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = \bar{a}$, то $g_1(\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_p) = \bar{a}$ и $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = a$. Тогда $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0) = \text{Л}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = -$, то $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = -$. Тогда отношения $a \subseteq -$ и $\bar{a} \subseteq -$ истинны и

$$\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0) = \text{И}, \quad \Phi(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0) = \text{И}.$$

2. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = -$. Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in E_2$, то формула $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0)$ ложна и $\Phi(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0)$ также ложна.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = -$, то $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0)$ истинна и $\Phi(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0)$ истинна.

Следовательно, формула вида (2.1) на противоположных наборах принимает одинаковые истинностные значения.

Шаг индукции. Рассмотрим параметрическую формулу вида $\Phi_1 \& \Phi_2$. В силу индуктивного предположения формулы Φ_1, Φ_2 на противоположных наборах принимают одинаковые истинностные значения. Следовательно, рассматриваемая формула на противоположных наборах также принимает одинаковые значения.

При рассмотрении формулы вида $\exists x_1 \Phi_1$ воспользуемся очевидным фактом, что истинность формул

$$\exists x_1 \Phi_1(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}), \quad \exists x_1 \Phi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y})$$

совпадает.

Таким образом, если параметрическая формула $\Phi(\tilde{x}, y)$ получена с помощью гиперфункций $g_1, \dots, g_k \in S^-$ и представляет отношение $y \subseteq f(\tilde{x})$, то функция $f(\tilde{x})$ также принадлежит классу S^- . \square

Лемма 2. Пусть $Q \subseteq L^-$ — замкнутый относительно операции суперпозиции класс гиперфункций и $(-) \in Q$. Тогда Q — параметрически замкнутый класс.

Доказательство. Пусть некоторая гиперфункция $f(x_1, \dots, x_n)$ представлена параметрической формулой $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$.

Для доказательства параметрической замкнутости класса $Q \subseteq L^-$ сначала рассмотрим случай, когда терм в формуле Φ может принимать значение прочерк. Покажем, что тогда формула либо определяет отношение $y \subseteq -$, либо не может определять никакого отношения вообще. Доказательство проведем индукцией по длине формулы.

Рассмотрим элементарную параметрическую формулу

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = g_1(z_1, \dots, z_p) \subseteq g_2(w_1, \dots, w_q), \quad (2.2)$$

где $\{z_1, \dots, z_p\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$, $\{w_1, \dots, w_q\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$ и $g_1, g_2 \in Q$. Поскольку Q содержит гиперфункцию, которая на всех наборах принимает значение $-$, и больше в Q не содержится гиперфункций, на каком-либо наборе принимающих значение прочерк, то получим следующие варианты для формулы Φ :

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, \dots, x_n, y) &= - \subseteq g_2(w_1, \dots, w_q), \\ \Phi(x_1, \dots, x_n, y) &= g_1(z_1, \dots, z_p) \subseteq -, \\ \Phi(x_1, \dots, x_n, y) &= - \subseteq -.\end{aligned}$$

В первом случае формула тождественно ложна и не может представлять какое-либо отношение. Во втором и третьем случаях формула тождественно истинна и может представлять только отношение $y \subseteq -$.

Рассмотрим параметрическую формулу вида $\Phi_1 \& \Phi_2$. Пусть по крайней мере в одной из подформул терм возвращает значение прочерк. В силу свойств конъюнкции возможны следующие варианты:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, \dots, x_n, y) &= И \& \Phi_2(x_1, \dots, x_n, y), \\ \Phi(x_1, \dots, x_n, y) &= Л \& \Phi_2(x_1, \dots, x_n, y), \\ \Phi(x_1, \dots, x_n, y) &= И \& И.\end{aligned}$$

В первом случае формула, содержащая прочерк, никак не влияет на формулу без прочерков. Во втором случае Φ тождественно ложна и не представляет никакого отношения. В третьем случае Φ тождественно истинна и может представлять только отношение $y \subseteq -$.

Рассмотрим формулу вида $\exists x_1 \Phi_1$. Поскольку в рассматриваемой подформуле используется тождественный прочерк, то добавление квантора не влияет на истинность полученной формулы.

В итоге, использование в формулах, построенных на основе гиперфункций из множества Q , функции прочерк не дает никаких новых функций. Следовательно, параметрическую замкнутость класса Q можно рассматривать без функции прочерк. Таким образом, в формуле Φ встречаются только булевы функции множества Q .

В [5] показано, что если некоторый класс Q замкнут относительно операции суперпозиции и $Q \subseteq L$, то Q является параметрически замкнутым классом. Таким образом, если $Q \subseteq L^-$ и $- \in Q$, то Q — параметрически замкнутый класс гиперфункций. \square

Лемма 3. Пусть $f(\tilde{x}) \notin L^-, f(\tilde{x}) \in P_2$. Тогда отождествлением переменных и подстановкой константы 1 можно получить нелинейную гиперфункцию, зависящую от двух переменных.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ и не является линейной функцией. Построим для нее обобщенный полином Жегалкина с вектором

поляризации $(0, \dots, 0)$ (каждая переменная входит в полином с отрицанием). Поскольку $f \notin L^-$, то построенный полином содержит как минимум одно нелинейное слагаемое.

Выберем нелинейное слагаемое наименьшей длины. Для простоты изложения будем считать, что оно имеет вид $\bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k$, $k \leq n$. В функции f заменим переменную x_1 на u , а переменные x_2, \dots, x_k — на v . Остальные переменные положим равными 1. В таком случае, все слагаемые, которые содержат переменные $x_i, i > k$, обратятся в ноль. Поскольку слагаемое $\bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k$ имеет наименьшую длину, то в результате подстановки константы 1 и отождествления переменных получим $g(u, v) = u \cdot v \oplus a \cdot u \oplus b \cdot v \oplus c$, где $a, b, c \in E_2$. \square

Лемма 4. Пусть $f(\tilde{x}) \notin L^-$, $f(\tilde{x}) \in P_2$. Тогда отождествлением переменных и подстановкой 0 можно получить нелинейную гиперфункцию, зависящую от двух переменных.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 с представлением функции в виде полинома Жегалкина.

Следующая лемма позволяет распространить предыдущие утверждения на случай с произвольной гиперфункцией, вектор значений которой содержит прочерк.

Лемма 5. Пусть $f(\tilde{x}) \notin L^-$ и $f(\tilde{x}) \notin P_2$. Тогда отождествлением переменных и подстановкой одной из констант можно получить нелинейную гиперфункцию, зависящую от двух переменных.

Доказательство. Доказательство утверждения проведем для константы 0. Подстановка константы 1 рассматривается аналогичным образом.

Поскольку $f \notin P_2$, то вектор функции содержит как минимум один прочерк, а именно, существует набор $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$. Пусть i_1, \dots, i_k — числа из множества $\{1, 2, \dots, n\}$, для которых $\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_k} = 0$. Если таких чисел нет, то $k = 0$. Для простоты изложения будем считать, что $i_1 = 1, \dots, i_k = k$.

Отождествление переменных и подстановка констант в функцию f будет осуществляться по следующим правилам:

- 1) если $k = 0$, то переменные x_1, \dots, x_{n-1} заменим на u , а x_n — на v .
- 2) если $1 \leq k \leq n-2$, то положим $x_j = 0$, при $1 \leq j \leq k$, а переменные x_{k+1}, \dots, x_{n-1} заменим на u и x_n — на v .
- 3) если $k = n-1$ или $k = n$, то положим $x_j = 0$, при $1 \leq j \leq n-2$, переменные x_{n-1} заменим на u , а x_n — на v .

Таким образом, получили гиперфункцию $g(u, v)$, которая на некотором наборе принимает значение прочерк. Если в результате преобразований получилась функция g , которая на всех наборах принимает значение прочерк, то процесс нужно повторить для другого набора $\tilde{\alpha}$. Поскольку исходная f не является тождественным прочерком, то

найдется g , которая также не является тождественным прочерком. Следовательно, $g(u, v) \notin L^-$. \square

В [5] показано, что система булевых функций $\{0, 1, \vee, \&\}$ параметрически полна в классе P_2 .

Лемма 6. Система гиперфункций $\{0, 1, \vee, \&\}$ параметрически полна в классе P_2^- .

Доказательство. Поскольку система $\{0, 1, \vee, \&\}$ параметрически полна в классе P_2 , то для дальнейших рассуждений воспользуемся функциями из этого класса.

Пусть $f(\tilde{x})$ — произвольная гиперфункция из P_2^- . Выберем $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ из P_2 такие, что для любого набора $\tilde{\alpha}$ выполняется условие $f_1(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha})$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde{\alpha}) \neq -$.

Тогда отношение $y \subseteq f(\tilde{x})$ определяется параметрической формулой:

$$\Phi(\tilde{x}, y) = \overline{y \oplus f_1(\tilde{x})} \vee \overline{y \oplus f_2(\tilde{x})} \subseteq 1.$$

\square

Лемма 7. Гиперфункция $(--)$ содержится в каждом параметрически замкнутом классе гиперфункций.

Доказательство. Действительно, любая тождественно истинная параметрическая формула, например

$$x \subseteq x \& y \subseteq y,$$

определяет отношение $y \subseteq (--)$. Таким образом, каждый параметрически замкнутый класс гиперфункций содержит гиперфункцию $(--)$. \square

Будем говорить, что гиперфункция $f(\tilde{x})$ параметрически полна в классе Q , если множество, состоящее из этой функции является параметрически полным в указанном классе.

Лемма 8. Каждая гиперфункция из множества $\{(0-), (-1), (-0), (1-)\}$ параметрически полна в классе P_2^- .

Доказательство. Рассмотрим действие гиперфункции $(0-)$. С использованием гиперфункций $\{(01), (--), (0-)\}$ построим набор формул для параметрически полной системы гиперфункций $\{0, 1, \vee, \&\}$.

Параметрические формулы

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= (--)(x) \subseteq (0-)(y), \\ \Phi_2(x_1, x_2, y) &= x_1 \subseteq (0-)(y) \& x_2 \subseteq (0-)(y), \\ \Phi_3(x_1, x_2, y) &= y \subseteq (0-)(x_1) \& y \subseteq (0-)(x_2) \end{aligned}$$

определяют отношения $y \subseteq (11)$, $y \subseteq (-11)$ и $y \subseteq (000-)$.

С помощью гиперфункции $(000-)$ построим формулы

$$\begin{aligned} \Phi_4(x, y) &= (000-)(x, y) \subseteq (y), \\ \Phi_5(x_1, x_2, y) &= (000-)(x_1, x_2) \subseteq (000-)(x_1, y) \ \& \ y \subseteq (000-)(x_1, x_2), \end{aligned}$$

определяющие отношения $y \subseteq (00)$, $y \subseteq (0001)$.

В свою очередь, параметрическая формула

$$\Phi_6(x_1, x_2, y) = (-111)(x_1, x_2) \subseteq (-111)(x_1, y) \ \& \ y \subseteq (-111)(x_1, x_2)$$

определяет отношение $y \subseteq (0111)$. Таким образом построена система гиперфункций $\{0, 1, \vee, \&\}$.

Для проверки справедливости утверждения для оставшихся гиперфункций (-1) , (-0) , $(1-)$ достаточно построить таблицу истинности соответствующих параметрических формул

$$\begin{aligned} \Phi_7(x, y) &= x \subseteq (-1)(y), \\ \Phi_8(x, y) &= (-0)(x) \subseteq (-0)(y), \\ \Phi_9(x, y) &= (1-)(y) \subseteq (1-)(x), \end{aligned}$$

представляющих отношение $y \subseteq (0-)$. □

Лемма 9. *Любая гиперфункция из множества $P_2 \setminus L^-$, существенно зависящая от двух переменных, параметрически полна в классе P_2^- .*

Доказательство. Для доказательства леммы для каждой $f(x_1, x_2) \in P_2 \setminus L^-$ приведем формулу $\Phi(x, y)$, представляющую отношение $y \subseteq g(x)$.

$f(x_1, x_2)$	$\Phi(x, y)$	$g(x)$
(0001)	$y \subseteq f(x, y)$	(0-)
(0010)	$f(x, x) \subseteq f(y, x)$	(0-)
(0100)	$f(x, x) \subseteq f(x, y)$	(0-)
(1000)	$f(x, x) \subseteq f(x, y)$	(0-)
(1110)	$f(x, x) \subseteq f(x, y)$	(-1)
(1101)	$f(x, x) \subseteq f(x, y)$	(-1)
(1011)	$f(x, x) \subseteq f(y, x)$	(-1)
(0111)	$y \subseteq f(x, y)$	(-1)

(2.3)

Согласно лемме 8 указанные гиперфункции $g(x)$ будут параметрически полными в P_2^- . □

Следствие 1. *Параметрическое замыкание множества всех конъюнкций, сохраняющих константы 0 и 1 (K_{01}) и множества всех дизъюнкций, сохраняющих константы 0 и 1 (D_{01}), совпадает с классом всех гиперфункций P_2^- .*

Лемма 10. Любая существенно зависящая от двух переменных гиперфункция $f(x_1, x_2)$ такая, что $f \notin P_2, f \notin S^-, f \notin L^-$ параметрически полна в классе P_2^- .

Доказательство. Рассмотрим различные варианты для гиперфункции $f(x_1, x_2)$ в зависимости от количества прочерков в векторе ее значений.

1. Вектор гиперфункции $f(x_1, x_2)$ содержит один прочерк.

Предположим, что $f(\tilde{0}) = -, f(\tilde{1}) = a$ или $f(\tilde{0}) = a, f(\tilde{1}) = -$, где $a \in E_2$. Тогда путем отождествления переменных получим $g(x) = f(x, x)$, что дает гиперфункции вида $\{(-0), (-1), (0-), (1-)\}$, которые в силу леммы 8 являются параметрически полными в классе P_2^- .

Пусть гиперфункция $f(x_1, x_2) = (\tau_{00}\tau_{01} - \tau_{11})$, $\tau_{\bar{\alpha}} \in E_2$. Тогда, если $\tau_{00} = \tau_{01}$, то параметрическая формула

$$\Phi(x, y) = f(x, y) \subseteq f(x, x)$$

определяет отношение $y \subseteq (-1)$.

Если $\tau_{01} = \tau_{11}$, то параметрическая формула

$$\Phi(x, y) = f(x, x) \subseteq f(x, y)$$

определяет отношение $y \subseteq (0-)$.

Если $\tau_{00} = \tau_{11} \neq \tau_{01}$, то параметрическая формула

$$\Phi(x, y) = f(x, x) \subseteq f(y, x)$$

определяет отношение $y \subseteq (-1)$.

Аналогичным образом можно построить параметрические формулы для гиперфункции $f(x_1, x_2) = (\tau_{00} - \tau_{10}\tau_{11})$.

2. Вектор гиперфункции $f(x_1, x_2)$ содержит два прочерка.

Предположим, что $f(\tilde{0}) = -, f(\tilde{1}) = -$. В силу того, что $f \notin S^-, f(0, 1) = f(1, 0) = a, a \in E_2$. Тогда формула

$$\Phi(x, y) = y \subseteq f(x, y)$$

определяет отношение $y \subseteq (0-)$, если $a = 0$, и $y \subseteq (-1)$ при $a = 1$.

Пусть $f(0, 1) = -, f(1, 0) = -$ и $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = a, a \in E_2$. Тогда параметрическая формула

$$\Phi(x, y) = x \subseteq f(x, y)$$

определяет отношение $y \subseteq (-0)$ при $a = 0$ и $y \subseteq (1-)$, если $a = 1$.

Другие варианты размещения двух прочерков в векторе значений функции f рассматриваются путем отождествления переменных аналогично случаю 1.

3. Вектор гиперфункции $f(x_1, x_2)$ содержит три прочерка.

В этом случае отдельного рассмотрения заслуживают следующие варианты $f(x_1, x_2) = (-\tau_{01} - -)$ и $f(x_1, x_2) = (- - \tau_{10} -)$. Для этих функций построим таблицу, аналогичную (2.3):

$f(x_1, x_2)$	$\Phi(x, y)$	$g(x)$
$(-0 - -)$	$y \subseteq f(x, y)$	$(0-)$
$(-1 - -)$	$x \subseteq f(x, y)$	$(0-)$
$(- - 0-)$	$y \subseteq f(y, x)$	$(0-)$
$(- - 1-)$	$x \subseteq f(y, x)$	$(0-)$

(2.4)

Таким образом, если гиперфункция содержит прочерк в векторе значений и не является тождественным прочерком, то она параметрически полна в P_2^- . \square

Определим гиперфункцию $d_3(x_1, x_2, x_3) = (00010111)$. Для нее справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. *Любую гиперфункцию из класса S^- можно параметрически выразить с помощью функции d_3 , т.е. $\text{Par}[d_3] = S^-$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in S^-$. С использованием функции d_3 построим параметрическую формулу $\Phi(\tilde{x}, y)$ для представления функции f .

Заметим, что $d_3(0, x_2, x_3) = (0001)$. Таким образом, согласно лемме 9 функция $d_3(0, x_2, x_3)$ позволяет получить любую гиперфункцию из класса P_2^- . Построим с ее помощью формулу $\Psi(x_2, \dots, x_n, y)$ представляющую отношение $y \subseteq f(0, x_2, \dots, x_n)$.

Теперь положим, что $\Phi(0, x_2, \dots, x_n, y) = \Psi(x_2, \dots, x_n, y)$ и заменим все вхождения 0 на переменную x_1 . В силу того, что $f \in S^-$, получили параметрическую формулу $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$, представляющую отношение $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$. \square

Теорема 1. *Система гиперфункций из P_2^- параметрически полна в классе P_2^- тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов S^- , L^- .*

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из того, что классы S^- , L^- параметрически замкнуты и отличны от класса P_2^- .

Покажем достаточность условий теоремы. Пусть f_1, f_2 — гиперфункции, которые не входят соответственно в классы S^- , L^- . Покажем, что эта система функций параметрически полна в классе P_2^- .

Отождествлением переменных гиперфункции f_1 можно получить гиперфункцию $g_1(x_1, x_2)$ такую, что на наборах $(0, 1)$ и $(1, 0)$ она принимает значения $(0-)$, (-0) , $(1-)$, (-1) , (00) , (11) .

Первые четыре пары значений гиперфункции содержат прочерк и, таким образом, на нее распространяется действие леммы 10. Остаются

такие g_1 , что

$$g_1(0, 1) = g_1(1, 0) \neq -.$$

Среди возможных 18 гиперфункций такого вида 10 гиперфункций в векторе значений содержат прочерк и подпадают под действие леммы 10. Еще 4 гиперфункции принадлежат классу P_2 и не являются линейными (лемма 9). Каждая из 14 перечисленных гиперфункций является параметрически полной и позволяет получить класс P_2^- . Таким образом, осталось рассмотреть следующие функции g_1 :

$$g_1(x_1, x_2) = \{(0000), (1111), (0110), (1001)\}.$$

С другой стороны, формула $\Phi(x, y) = x \subseteq g_1(x, y)$ при подстановке в нее функций $(0110), (1001)$ параметрически выражает функции $(0000), (1111)$ соответственно. Следовательно, в качестве несамодвойственной функции g_1 можно рассматривать только функции (0000) и (1111) .

В соответствии с леммами 3, 4, 5 отождествлением переменных гиперфункции f_2 и подстановкой имеющейся константы g_1 можно получить $g_2(x_1, x_2)$ такую, что

- 1) $g_2(x_1, x_2) \in P_2$;
- 2) $g_2(x_1, x_2) \notin P_2$ и в векторе значений гиперфункции g_2 существует такой набор (α_1, α_1) , что $g_2(\tilde{\alpha}) = -$.

В первом случае, в силу леммы 9, гиперфункция g_2 позволяет получить весь класс P_2^- . Во втором, если $g_2 \notin S^-$, то действует лемма 10 и g_2 также позволяет получить класс P_2^- . Остается рассмотреть $g_2 \in S^-$. Такие гиперфункции имеют вид:

$$g_2(x_1, x_2) = \{(-01-), (-10-), (0 - -1), (1 - -0)\}.$$

Рассмотрим гиперфункции g_1, g_2 из указанных множеств. Если вектор g_2 имеет вид $(-\tau_{01}\tau_{10}-)$, где $\tau_{\bar{\sigma}} \in E_2$ и $\tau_{01} = \bar{\tau}_{10}$, то параметрическая формула

$$g_1(x, y) \subseteq g_2(x, y) \tag{2.5}$$

представляет либо отношение $y \subseteq (0-)$, либо $y \subseteq (-1)$.

Если вектор g_2 имеет вид $(\tau_{00} - -\tau_{11})$, где $\tau_{00} = \bar{\tau}_{11}$, то параметрическая формула (2.5) представляет либо отношение $y \subseteq (-0)$, либо $y \subseteq (1-)$.

Таким образом, формула (2.5) позволяет получить гиперфункцию, которая является параметрически полной в классе P_2^- . \square

Теорема 2. *Существует ровно 13 параметрически замкнутых классов гиперфункций:*

$$P_2^-, S^-, L^-, L_0^-, L_1^-, SL^-, L_{01}^-, U^-, SU^-, MU^-, U_0^-, U_1^-, U_{01}^-.$$

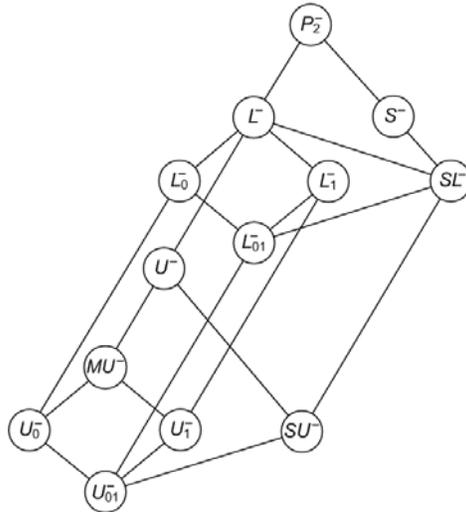


Рис. 1. Решетка параметрически замкнутых классов гиперфункций ранга 2

Доказательство теоремы следует из лемм 1, 2, 11 и теоремы 1. Структура классов представлена на рисунке 1.

Приведем базисы некоторых параметрически замкнутых классов гиперфункций, отличающихся от соответствующих базисов для булевых функций.

$$\begin{aligned}
 P_2^- &= \text{Par}[x \vee y] = \text{Par}[x \& y], \\
 S^- &= \text{Par}[d_3], \\
 U_{01}^- &= \text{Par}[x] = \text{Par}[\emptyset].
 \end{aligned}$$

В заключении следует отметить, что одним из расширений оператора параметрического замыкания является оператор позитивного замыкания. Исследования, посвященные этому оператору над различными множествами функций, представлены в работах [6; 7; 8].

Список литературы

1. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики / А. Ф. Данильченко // Алгебра и логика/ – 1977. – Т. 16, вып. 4. – С.397–416.
2. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости / А. В. Кузнецов // Логический вывод. – М. : Наука, 1979. – С. 5–33.
3. Ло Джукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Новая серия. – М. : Мир, 1988. – Вып. 25. – С. 131–141.

4. Ло Джукай. Теория полноты для частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Новая серия. – М. : Мир, 1988. – Вып. 25. – С. 142–157.
5. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций / С. С. Марченков. – М. : Физматлит, 2000. – 126 с.
6. Марченков С. С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках / С. С. Марченков // Дискрет. математика. – 1999. – Т. 11, вып. 4. – С. 110–126.
7. Марченков С. С. Позитивно замкнутые классы трехзначной логики / С. С. Марченков // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2014. – Т. 21, вып. 1. – С. 67–83.
8. Марченков С. С. Позитивно замкнутые классы частичных булевых функций / С. С. Марченков, А. А. Попова // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. – 2008. – № 3. – С. 30–34.
9. Пантелеев В. И. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 / В. И. Пантелеев, Л. В. Рябец // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 10. – С. 93–105.
10. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики / В. В. Тарасов // Проблемы кибернетики. – М. : Наука, 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.
11. Machida H. Hyperclones on a two-element set / H. Machida // Multiple-Valued Logic. An International Journal. – 2002. – N 8(4). – P. 495–501.
12. Machida H. On maximal hyperclones on $\{0, 1\}$ – a new approach / H. Machida, J. Pantovic // Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008). – 2008. – P. 32–37.
13. Romov B. A. Hyperclones on a finite set / B. A. Romov // Multiple-Valued Logic. An International Journal. – 1998. – Vol.3(2). P. 285–300.

Рябец Леонид Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.:(3952)521298 (e-mail: l.riabets@gmail.com)

L. V. Ryabets

Parametric Closed Classes of Hyperfunctions on Two-Element Set

Abstract. One of the direction in discrete function's investigations is research of functional systems: the sets of functions and the sets of operators defined on this functions.

The modern line of inquiry of functional systems deals with generalization of many-valued functions such as partial functions, multifunctions or hyperfunctions. Hyperfunctions are discrete functions from a finite set A to all nonempty subsets of A which closed with respect to the superposition operator.

In addition of the superposition operator its interesting to exam more stronger operators which given nontrivial function's classifications. For example, the criterion of completeness for the closure operator with the equality predicate branching on the set of hyperfunctions on two-element set was found. Another well-known strong operator is the parametric closure operator. Twenty five closed classes of Boolean functions is known for this operator.

In this work we precise the definition of the parametric closure operator for the set of hyperfunctions and consider this operator on set of hyperfunctions on two-element set. With respect to this operator thirteen closed classes of hyperfunctions are founded. Two of them S^- and L^- are parametric precomplete. The lattice of parametric closed classes of hyperfunctions on two-element set are obtained and parametric bases of this classes are defined.

Keywords: closure, parametric closure, hyperfunction, completeness criterion, superposition.

References

1. Danilchenko A.F. About Parametric Expressibility of Ternary Logic Functions (in Russian). *Algebra and Logic*, 1977, vol 16, no 4, pp.397 -416.
2. Kuznetsov A.V. Tools for Detecting Non-Derivability or Nonexpressibility (in Russian). *Logical Inference*, Moscow, Nauka, 1979, pp. 5-33.
3. Lo Czu Kai. Maximal Closed Classes on the Set of Partial Many-valued Logic Functions (in Russian). *Kiberneticheskiy Sbornik*, Moscow, Mir, 1988, vol. 25, pp. 131-141.
4. Lo Czu Kai. Completeness Theory on Partial Many-valued Logic Functions (in Russian). *Kiberneticheskiy Sbornik*, Moscow, Mir, 1988, vol. 25, pp. 142-157.
5. Marchenkov S.S. Closed Classes of Boolean Functions (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2000. 126 p.
6. Marchenkov S.S. On the Expressibility of Functions of Many-Valued Logic in Some Logical-Functional Classes (in Russian) *Discrete Mathematics*, 1999, vol. 11, no 4, pp. 110-126.
7. Marchenkov S.S. Positive Closed Classes in the Three-Valued Logic (in Russian) *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2014, vol. 21, no 1, pp. 67-83.
8. Marchenkov S.S., Popova A.A. Positively Closed Classes of Partial Boolean Functions (in Russian). *Vestnik MGU, Ser. 15: Computational Mathematics and Cybernetics*, 2008. vol. 3, pp. 30-34.
9. Panteleyev V.I., Ryabets L.V. The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Hyperfunctions on Two-Element Set (in Russian). *IIGU Ser. Matematika*, 2014, vol. 10, pp.93 -105.
10. Tarasov V.V. Completeness Criterion for Partial Logic Functions (in Russian). *Problemy Kibernetiki*, Moscow, Nauka, 1975, vol. 30, pp. 319-325.
11. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set. *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002, no 8(4), pp. 495-501.
12. Machida H., Pantovic J. On Maximal Hyperclones on $\{0,1\}$ — a new approach. *Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008)*, 2008, pp. 32-37.
13. Romov B.A. Hyperclones on a Finite Set. *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 1998, vol.3(2), pp. 285-300.

Ryabets Leonid Vladimirovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003 tel.: (3952)521298 (e-mail: l.riabets@gmail.com)