Серия «Математика»
2016. Т. 17. С. 77—85

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.5, 517.968.7
MSC 34G10, 45K05, 45N05

Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах

М. В. Фалалеев

Аннотация. В работе исследуется интегро-дифференциальное уравнение в свертках специального вида в банаховых пространствах с фредгольмовым операторм в главной части. Изучен вопрос об однозначной разрешимости задачи Коши для такого уравнения в классе распределений с ограниченным слева носителем. Исследования проводятся с помощью теории фундаментальных оператор-функций интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах. Фредгольмов оператор из дифференциальной части уравнения имеет полный жорданов набор. Ядро интегральной части уравнения имеет в начальной точке нуль, кратность которого определяется максимальной длиной жордановых цепочек базисных элементов ядра фредгольмова оператора и порядком дифференциального оператора уравнения. В этих предположениях доказана теорема о виде фундаментальной оператор-функции (фундаментального решения) для рассматриваемого уравнения. С помощью фундаментальной оператор-функции построено обобщенное решение, иссследована связь между обобщенным и классическим (гладким) решениями. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примере начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Представленные исследования продолжают цикл работ автора по данной тематике и допускают обобщения на другие случаи сингулярности оператора при старшей производной (нетеровость, спектральная, секториальная или радиальная ограниченность). Рассмотренные в работе интегро-дифференциальные уравнения позволяют в наиболее общей постановке исследовать математические модели теории колебаний в вязкоупругих средах или теории электрических цепей.

Ключевые слова: фредгольмов оператор, фундаментальное решение, свертка, распределение.

1. Введение

При исследовании колебательных процессов в средах с памятью принято использовать аппарат интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку он дает возможность усредненно учитывать при моделировании этих процессов всю предысторию наблюдений. Одним из методов решения таких задач является их редукция к уравнениям в банаховых пространствах. Данная заметка посвящена исследованию задачи Коши

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t) \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \;\; \dot{u}(0) = u_1, \;\; \dots, \; u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2}$$

где $B, A, k(t)$ — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из одного банахова пространства в другое банахово пространство. Ранее в цикле работ (см. работу [5] и библиографию к ней) был исследован случай, когда ядро интегрального оператора $k(t)$ является линейной комбинацией операторов A и B. Общий случай ядра $k(t)$ когда порядок дифференциального оператора $N \geq 2$ пока остается не исследованным. В данной работе представлены некоторые результаты, полученные в этом направлении.

2. Постановка задачи, основные условия и обозначения

Пусть далее в уравнении (1) A, B, $k(t)$ — замкнутые линейные операторы действующие из E_1 в E_2, E_1, E_2 — банаховы пространства, $D(B) \subset D(A), D(k(t)) \equiv D(k)$ не зависит от $t, \overline{D(k)} = \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор-функция $k(t)$ и функция $f(t)$ достаточно гладкие.

Предположим, что оператор B фредгольмов [1], т. е. $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$, $\{\varphi_i\} \in N(B) \subset E_1$ — базис ядра оператора B, $\{\psi_i\} \in N(B^*) \subset E_2^*$ — базис ядра сопряженного оператора, $\{z_i\} \in E_2$, и $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ – соответствующие им биортогональные системы элементов и функционалов [1], здесь $i = 1, \dots, n$. В этих предположениях непрерывно обратим оператор $\tilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ [1] и обратный к нему, называемый оператором Треногина – Шмидта, принято обозначать $\Gamma = \tilde{B}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$. Справедливы равенства [1] $\Gamma B = I - P$ и $B\Gamma = I - Q$, где

$$P = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad Q = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i,$$

проекторы в E_1 и E_2 соответственно.

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 17. Серия «Математика». С. 77–85

Так же далее будем предполагать, что существует полный A-жорданов набор оператора B [1; 3], т. е. существует система элементов $\{\varphi_i^{(j)}\} \in E_1$, $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, удовлетворяющих уравнениям $B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}$, причем выстроить эту систему можно таким образом, что $\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$, т. е. $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}$. В этом случае оператор B^* будет иметь полный A^*-жорданов набор, т. е. существует система функционалов $\{\psi_i^{(j)}\} \in E_2^*$, $\psi_i^{(1)} = \psi_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, удовлетворяющих уравнениям $B^*\psi_i^{(j)} = A^*\psi_i^{(j-1)}$, и условиям $\langle \varphi_i, A^*\psi_j^{(p_j)}\rangle = \delta_{ij}$, т. е. $\gamma_i = A^*\psi_i^{(p_i)}$. Присоединенные элементы $\varphi_i^{(j)}$ и функционалы $\psi_i^{(j)}$ можно восстанавливать по (циклическим) формулам $\varphi_i^{(j)} = (\Gamma A)^{j-1}\varphi_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(1)} = (\Gamma A)^{p_i}\varphi_i^{(1)}$ и $\psi_i^{(j)} = (\Gamma^* A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)}$, $\psi_i^{(1)} = (\Gamma^* A^*)^{p_i}\psi_i^{(1)}$. В дальнейшем потребуется проектор

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle \cdot, \psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$$

и оператор-функция

$$\mathcal{U}_N(A\Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty}(A\Gamma)^{i-1}\frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!},$$

очевидно $\mathcal{U}_2(A\Gamma t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}}$, здесь $\sqrt{A\Gamma}$ — формальный символ.

Пусть $p = \max p_i$, тогда если $p > 1$, относительно оператор функции $k(t)$ будем предполагать выполненным условие

A) $k^{(\nu)}(0) = 0, \ \ \nu = 0, 1, \ldots, N(p-1) - 1$.

Известно, что задача Коши (1)–(2) с необратимым (в нашем случае фредгольмовым) оператором при старшей производной разрешима в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$ не при любом соотношении начальных условий (2) и правой части уравнения (1). Поэтому будем строить решение задачи (1)–(2) в классе [4] $K'_+(E_1)$ — распределений с ограниченным слева носителем. В пространстве $K'_+(E_1)$ задачу (1)–(2) можно переписать в сверточном виде

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \tilde{u}(t) = g_N(t) \tag{3}$$

где

$$g_N(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \\ + \ldots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t),$$

здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда [2]. Эффективным методом решения сверточного уравнения (3) является использование конструкции фундаментальной оператор-функции (фундаментального решения) [4; 6]. Фундаментальной оператор-функцией интегро-дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t))$ называется обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ удовлетворяющая следующим двум сверточным уравнениям

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * \tilde{v}(t) = \tilde{v}(t) \quad \forall \tilde{v}(t) \in K'_+(E_2) \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t) \quad \forall \tilde{u}(t) \in K'_+(E_1) \quad (5)$$

Замечание 1. Пространство обобщенных функций с ограниченным слева носителем $K'_+(E_1)$ является естественным для построения обобщенных решений задачи Коши (1)–(2), так как до момента $t = 0$ процесс, описываемый уравнением (1), находится в состоянии покоя, а кроме этого в $K'_+(E_1)$ операция свертки существует и ассоциативна, что далее будет существенно использоваться.

Равенство (4) означает, что свертка $\mathcal{E}_N(t) * g_N(t) \in K'_+(E_1)$ является решением уравнения (3), а равенство (5) означает что оно единственное.

3. Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора

Ранее в работах [4; 6] была доказана следующая

Теорема 1. *Если фредгольмов оператор B имеет полный A-жорданов набор, то дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma t)\left[I - \tilde{Q}\right]\theta(t) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(N\cdot k)}(t)\right].$$

Если в условиях теоремы 1 выполнено дополнительно условие **A)**, то существует (регулярная) оператор-функция

$$\mathcal{H}(t)\theta(t) = k(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \left(\int_0^t k(t-s)\Gamma\mathcal{U}_N(A\Gamma s)\left[I - \tilde{Q}\right] -\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle k^{(N\cdot k)}(t)\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\right]\right)\theta(t),$$

для которой справедливо (очевидное) сверточное равенство

$$\mathcal{H}(t)\theta(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)) = k(t)\theta(t).$$

Обозначим через $\mathcal{R}(t)$ резольвенту ядра $\mathcal{H}(t)$, тогда справедлива

Теорема 2. *Если фредгольмов оператор B имеет полный A-жорданов набор и выполнено условие* **A)**, *то интегро-дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида $\mathcal{E}_N(t) = \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t))$*

Доказательство. Покажем справедливость каждого из равенств (4) и (5). Действительно

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) =$$

$$= (I\delta(t) - \mathcal{H}(t)\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) = I\delta(t),$$

т. е. сверточное равенства (4) выполняется. Проверим справедливость (5)

$$\mathcal{E}_N(t) * \Big(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)\Big) =$$

$$= I\delta(t) + \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \Big[\mathcal{R}(t)\theta(t) * \Big(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)\Big) - k(t)\theta(t)\Big] =$$

$$= I\delta(t) + \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \Big[(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * \mathcal{H}(t)\theta(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)) -$$

$$-(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * k(t)\theta(t)] =$$

$$= I\delta(t) + \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * [(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * k(t)\theta(t) -$$

$$-(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * k(t)\theta(t)] = I\delta(t).$$

□

Замечание 2. Условие **A)** в теореме 2 можно заменить следующим: для любого $i = 1, \ldots, n$, для которого длина A-жордановой цепочки $p_i > 1$, выполняется равенство $k^{(\nu)}(0)\varphi_i^{(p_i-k+1-j)} = 0,\ \nu = 0, 1, \ldots, N \cdot k - 1,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,\ j = 1, \ldots, p_i - k$.

Замечание 3. В условиях теоремы 2 представление для фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$ можно переписать в виде $\mathcal{E}_N(t) = (I\delta(t) + \tilde{\mathcal{R}}(t)\theta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t)$, здесь $\tilde{\mathcal{R}}(t)$ — резольвента ядра $\tilde{\mathcal{H}}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * k(t)\theta(t)$.

Очевидно наиболее компактный вид фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ будет иметь если $N = 2$ и $p = 1$. В этом случае условие **A)** в формулировке теоремы 2 отсутствует, а формула для фундаментальной оператор-функции выглядит следующим образом

$$\mathcal{E}_2(t) = \left(I\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t)\Big)^k\right) * \tilde{\mathcal{E}}_2(t),$$

здесь под степенью $\left(\tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t)\right)^k$ понимается повторное ядро,

$$\tilde{\mathcal{E}}_2(t) = \Gamma \frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}} \left[I - \tilde{Q}\right] \theta(t) - T\delta(t),$$

и $T = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ — конечномерный оператор. Обобщенным решением задачи Коши (1)–(2) при $N = 2$ является регулярная обобщенная функция

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_2(t) * g_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k(t), \tag{6}$$

здесь

$$\tilde{u}_0(t) = \tilde{\mathcal{E}}_2(t) * g_2(t), \ \ g_2(t) = f(t)\theta(t) + Bu_1\delta(t) + Bu_0\delta'(t),$$

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t) * \tilde{u}_0(t), \ \ \tilde{u}_k(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t) * \tilde{u}_{k-1}(t),$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_2(t) * k(t)\theta(t) = \Gamma \frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}} \left[I - \tilde{Q}\right] \theta(t) * k(t)\theta(t) - Tk(t)\theta(t).$$

Непосредственными вычислениями находим:

$$\tilde{u}_0(t) = \Gamma \frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}} \left[I - \tilde{Q}\right] \theta(t) * f(t)\theta(t) - Tf(t)\theta(t) +$$

$$+\Gamma \frac{\operatorname{sh}\sqrt{A\Gamma}t}{\sqrt{A\Gamma}} Bu_1\theta(t) + \Gamma \operatorname{ch}\sqrt{A\Gamma}t Bu_0\theta(t),$$

$$\tilde{u}_0(0) = \Gamma Bu_0 - Tf(0) = u_0 - \sum_{i=1}^{n} \langle Au_0 + f(0), \psi_i \rangle \varphi_i,$$

$$\dot{\tilde{u}}_0(0) = \Gamma Bu_1 - Tf'(0) = u_1 - \sum_{i=1}^{n} \langle Au_1 + f'(0), \psi_i \rangle \varphi_i,$$

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{\mathcal{H}}(t)\theta(t) * \tilde{u}_0(t), \ \ \tilde{u}_1(0) = 0,$$

$$\dot{\tilde{u}}_1(0) = \tilde{\mathcal{H}}(0)\tilde{u}_0(0) = -Tk(0)\tilde{u}_0(0) = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle k(0)\tilde{u}_0(0), \psi_i \right\rangle \varphi_i,$$

$$\tilde{u}_k(0) = \dot{\tilde{u}}_k(0) = 0, \ \ k \geq 2.$$

Таким образом

$$\tilde{u}\Big|_{t=0} = u_0 - \sum_{i=1}^{n} \langle Au_0 + f(0), \psi_i \rangle \varphi_i,$$

$$\dot{\tilde{u}}\Big|_{t=0} = u_1 - \sum_{i=1}^{n} \langle Au_1 + f'(0) + k(0)\tilde{u}_0(0), \psi_i\rangle \varphi_i.$$

Но функция (6) удовлетворяет уравнению (1) (при $N = 2$), поэтому из линейной независимости элементов базиса $\{\varphi_i\}$ вытекает

Теорема 3. *Если $N = 2$ и длины всех A-жордановых цепочек равны 1, то задача Коши (1)–(2) разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\langle Au_0 + f(0), \psi_i\rangle = 0, \quad \langle Au_1 + f'(0) + k(0)u_0, \psi_i\rangle = 0, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 4. Общий случай $N > 2$ и $p = 1$ исследуется точно по такой же схеме без каких-либо идейных новшеств, но с более длинными выкладками.

4. Пример

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - (\mu - \Delta)u - \int\limits_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau, x)d\tau = f(t, x) \qquad (7)$$

с начально-краевыми условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = u_1(x), \ \ x \in \Omega; \quad u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ \ t \geq 0, \qquad (8)$$

где $g(t)$, $f(t, x)$ — заданные функции, $u(t, x)$ — искомая функция, $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с бесконечногладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, решение ищется в цилиндре $R_+ \times \Omega$. Задача Коши-Дирихле (7)–(8) редуцируется к задаче Коши (1)–(2) с $N = 2$, если выбрать банаховы пространства и операторы следующим образом

$$E_1 \equiv \left\{ v(x) \in W_2^{k+2}(\Omega); v\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad E_2 \equiv W_2^k(\Omega), \qquad (9)$$

$B = \lambda - \Delta$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $A = \mu - \Delta$, $k(t) = g(t)\Delta^2$, $W_2^k(\Omega)$ — соболевские пространства.

В этом случае оператор B фредгольмов, ядро которого совпадает с пространством решений однородной задачи для оператора Лапласа $\lambda\varphi = \Delta\varphi$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Обозначим $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ — базис этого пространства, $A\varphi_i = (\mu - \lambda)\varphi_i$, т. е. $\langle A\varphi_i, \varphi_j\rangle = (\mu - \lambda)\delta_{ij}$ длины всех A-жордановых цепочек равны 1. Отсюда на основании теоремы 3 получаем

Теорема 4. *Если для задачи Коши – Дирихле (7)–(8) пространства* E_1 *и* E_2*, операторы* A, B, $k(t)$ *выбрать как в (9), то задача (7)–(8) однозначно разрешима в классе* $C^2(t \geq 0, E_1)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\langle(\mu-\lambda)u_0(x)+f(0,x),\varphi_i\rangle = 0,\ \langle(\mu-\lambda)u_1(x)+f'(0,x)+g(0)\lambda^2 u_0(x),\varphi_i\rangle = 0,$$

$$i = 1,\ldots,n.$$

Замечание 5. Представленные в этой заметке результаты допускают обобщение на другие случаи сингулярности операторного пучка $(B-\lambda A)$ (нетеровость, спектральная ограниченность и др.), а также в наиболее общей постановке исследовать, например, нестационарные математические модели теории колебаний в вязко-упругих средах.

Список литературы

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
3. Сидоров Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н. А. Сидоров, О. А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516–1526.
4. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.
5. Фалалеев М. В. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 128–137.
6. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 2002. – 548 p.

Фалалеев Михаил Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел.: (3952)521279 (e-mail: mihail@ic.isu.ru)

M. V. Falaleev

Degenerate Integro-Differential Equations of Convolution Type in Banach Spaces

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 17. Серия «Математика». С. 77–85

Abstract. We consider an integro-differential equation in convolutions of a special kind in Banach spaces with the Fredholm operator in the main part. The article concerns with the problem of unique solvability of the Cauchy-problem for this equation in the class of distributions with left-bounded support. The research is based on the theory of fundamental operator-functions of integro-differential operators in Banach spaces. The Fredholm operator from the differential part of the equation has the complete Jordan set. The kernel of the integral part of the equation is equal to zero at the starting point, which multiplicity is determined by a maximum length of Jordan chains elements of the Fredholm operator kernel and by the order of the equation's differential operator. Under these assumptions, we prove the theorem on the structure of the fundamental operator-function (the fundamental solution) of the equation. Based on the fundamental operator-function the generalized solution is constructed. The dependence between the generalized solution and the classical (smooth) solution is considered. The abstract results are illustrated by an example of the initial-boundary value problem for the partial integro-differential equation. The presented research continues the papers in the field, and can be generalized to other cases of a singular operator of the leading derivative (Noetherity, spectral, sectorial or radial boundedness). The results of these investigations make it possible to explore the mathematical models of the theory of oscillations in viscoelastic media and of the theory of electric chains.

Keywords: Fredholm operator, fundamental solution, convolution, distribution.

References

1. Vainberg M.M., Trenogin V.A. Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations. Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russian)
2. Vladimirov V.S. Generalized Functions in Mathematical Physics. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)
3. Sidorov N.A., Romanova O.A. About Application some Results of Theory of Branching by Solving of Differential Equations with Degenerating. *Different. Equations*, 1983, vol. 19, no 9, pp. 1516-1526.
4. Falaleev M.V. Fundamental Operator-function of Singular Differential Operators in Banach Spaces. *Sib. Math. Journal*, 2000, vol. 41, no 5, pp. 1167-1182.
5. Falaleev M.V. Singular integro-differential equations of the special type in Banach spaces and it's application. *Izv. Irkut. gos. un-ta. Ser. Mathematics*, 2013, vol. 6, no 4, pp. 128-137.
6. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2002. 548 p.

Falaleev Mikhail Valentinovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)521279; (e-mail: `mihail@ic.isu.ru`)