Серия «Математика»
2015. Т. 14. С. 18—30

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.977.56

Оптимальное управление в моделях эпидемий трансмиссивных заболеваний с SEI-SEIR системами *

Р. М. Баталин
Иркутский государственный университет

В. А. Терлецкий
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются модели эпидемий трансмиссивных заболеваний с возрастной структурой, динамика которых описывается SEI-SEIR системами дифференциальных уравнений в частных производных для человеческой популяции и SEI системой обыкновенных дифференциальных уравнений для популяции переносчиков. На основе этих моделей формулируются задачи оптимального управления уровнем финансирования программ по ограничению передачи инфекции от переносчиков болезни к людям. В качестве цели оптимизации в таких задачах выбрана совокупная минимизация количества зараженных людей и затраченных на ограничение распространения болезни средств. Для разрешения противоречивости критериев оптимальности в целевом функционале используется подход весовых коэффициентов. Задача в исходной постановке является нелинейной, и поэтому возникают сложности в построении численных методов более эффективных, чем методы, основанные на принципе максимума Понтрягина, или градиентные методы. По этой причине в статье делается упрощающее предположение о том, что доля зараженных переносчиков в популяции, а также сама величина популяции переносчиков являются постоянными величинами. Конечно, такое изменение постановки задачи не позволяет достаточно полно исследовать исходную модель, в которой динамика популяции переносчиков описывается дифференциальными уравнениями, но дает возможность упростить исходные нелинейные модели и свести их к задачам оптимального управления с линейной по фазовым переменным динамической системой. Для этой задачи с распределенными параметрами построены точные формулы приращения функционала и численные методы улучшения управления, основанные на этих формулах. Данные методы обладают большей эффективностью по сравнению с известными стандартными методами, так как позволяют за одно решение задачи Коши построить улучшающее управление. Кроме того, эти методы обладают возможностью улучшения экстремальных и вырожденных допустимых управлений.

Ключевые слова: оптимальное управление, формулы приращения функционала, модели эпидемии с возрастной структурой, трансмиссивные заболевания.

1. Введение

Трансмиссивные болезни — одна из важнейших угроз общественному здоровью, особенно в странах с тропическим климатом. В современном мире значительное воздействие на распространение болезней оказывают глобализация поездок и торговли, бесплановая урбанизация и такие экологические проблемы, как изменение климата. Для предсказания динамики болезней, оценки угроз и выбора мер по контролю заболеваемости возникает необходимость в математическом моделировании процессов, происходящих во время эпидемий.

Один из пионеров в области математического моделирования эпидемий, Росс, в 1904 г. разработал математические модели, описывающие перемещение взрослых комаров [11] и модель распространения малярии [10; 12]. Макдональд, основываясь на идеях Росса, более подробно изучил энтомологические и демографические аспекты распространения малярии [8]. В 1974 г. Хоппэнстэд опубликовал одну из первых моделей эпидемии с возрастной структурой в [5] и предложил несколько различных видов дифференциальных систем, описывающих динамику передачи болезни [6]. В 1982 году Бейли расширил вторую модель Росса и представил общую модель распространения болезней в виде SIR и SI моделей. В 1992 Ньютон и Рейтер опубликовали $SEIR - SEI$ модели для лихорадки денге. В [4; 7] подробно исследованы $SEI - SEIR$ модели, доказаны существование и единственность неотрицательного решения, и существование стационарных точек. В [9] с помощью разделения человеческой популяции на конечное число возрастных групп автор нашел базовый репродуктивный номер болезни для задачи с $SEIR$ системой, зависящей от возраста.

$SEI - SEIR$ модели с возрастной структурой построены на основе популяционной модели Маккендрика-фон Ферстера. В зависимости от свойств болезни, в дифференциальных системах, которые описывают динамику распространения инфекции, используются различные наборы популяционных групп. В SEI моделях общее количество индивидов в популяции N делится на три класса: S – количество восприимчивых к болезни, E — количество зараженных, которые еще не являются заразными и I – количество зараженных и способных к передаче инфекции. В $SEIR$ моделях добавляется в рассмотрение класс иммунных к болезни индивидов R. Отличие $SI - SIR$ моделей от $SEI - SEIR$ заключается лишь в том, что в первых убирается из рассмотрения класс людей которые заразились, но еще не являются заразными. Это удобно в случае, когда инкубационным периодом патогена можно пренебречь.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 14-01-00564, 14-41-04146-р-сибирь_а.

В статье приводятся основные модели распространения трансмиссивных болезней. На их основе формулируются задачи оптимального управления, смысл которых заключается в выборе наилучшей стратегии финансирования программ по борьбе с распространением инфекции. Целью оптимизации в данных задачах является минимизация совокупности заразившихся людей и затраченных на ограничение распространения болезни средств. Вообще говоря, эти два критерия являются противоположными, т. е. уменьшение одного из них неизбежно влечет увеличение другого. Чтобы устранить данное противоречие используется стандартный прием весовых коэффициентов, который позволяет учитывать оба критерия оптимальности.

В этой статье из разнообразных моделей, связанных с указанной проблематикой, достаточно подробно рассматриваются две модели. Первая из них описывает процессы, происходящие при малярии, вторая — при лихорадке денге. Обе модели являются более адекватными и информативными, если они используются в совокупности с системой обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих структуру в популяции переносчиков болезни. К сожалению, задача в такой постановке является нелинейной и разработать для нее качественные методы, обладающие большей эффективностью, чем широко известные методы градиентного типа [1], а также методы, основанные на принципе максимума Понтрягина, представляется довольно затруднительным. В то же время, указанные модели обладают определенной спецификой, которая позволяет надеяться на эффективное использование методов, разработанных В. А. Срочко [2] для линейных по фазовым переменным задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти методы основаны на так называемых точных формулах приращения целевого функционала. Благодаря рекурсивным процедурам построения улучшающих управлений, данные формулы дают возможность строить эффективные численные методы. Такие методы позволяют улучшать и экстремальные управления, что является их большим достоинством. В этой статье, основываясь на упрощающих предположениях о том, что численность популяции, а также доля зараженных переносчиков являются постоянными, мы существенно упрощаем приводимые задачи оптимального управления с целью показать возможность использования методики точных формул приращения для задач с распределенными параметрами исследуемого типа.

2. Постановка задач оптимального управления, возникающих при исследовании проблемы распространения трансмиссивных заболеваний

Рассмотрим SEI и $SEIR$ дифференциальные системы, описывающие динамику распространения болезни, и запишем задачу оптимального управления уровнем финансирования программ по борьбе с эпидемией. Напомним, что S, E, I и R обозначают, соответственно, восприимчивых к болезни, заразившихся, но еще не являющихся заразными, заразившихся и способных к передаче инфекции и иммунных, устойчивых к болезни людей. Пусть t и s — независимые переменные, обозначающие, соответственно, время и возраст, $s \in [s_0, s_1], t \in [t_0, t_1], \Pi = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$. Тогда SEI систему дифференциальных уравнений, моделирующих процесс распространения малярии, можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_t + S_s &= -\lambda(I_v(t), u, s, t)S(s,t) - \mu(s)S(s,t) + \gamma(s)I(s,t), \\ E_t + E_s &= \lambda(I_v(t), u, s, t)S(s,t) - \mu(s)E(s,t) - \epsilon(s)E(s,t), \\ I_t + I_s &= \epsilon(s)E(s,t) - (\mu(s) + \omega(s) + \gamma(s))I(s,t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

с начальными

$$S(s,t_0) = S^0(s), E(s,t_0) = E^0(s), I(s,t_0) = I^0(s) \tag{2.2}$$

и граничными

$$S(s_0,t) = B, E(s_0,t) = 0, I(s_0,t) = 0 \tag{2.3}$$

условиями. Жизненный цикл переносчиков болезни достаточно мал, поэтому мы можем пренебречь возрастом комаров. Тогда система, описывающая динамику распространения патогена в популяции переносчиков, будет формироваться следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}S_v &= \Lambda_v - \lambda_v(I(s,t),t)S_v - \mu_v S_v, \\ \tfrac{d}{dt}E_v &= \lambda_v(I(s,t),t)S_v - (\mu_v + \epsilon_v)E_v, \\ \tfrac{d}{dt}I_v &= \epsilon_v E_v - \mu_v I_v. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В этой модели $S_v(t)$, $E_v(t)$, $I_v(t)$ — соответственно плотность в популяции восприимчивых, зараженных и способных к передачи болезни комаров в момент времени t, $\lambda(I_v(t), u, s, t)$ — сила инфекции, т. е. доля новых заболевших за единицу времени от общего числа восприимчивых, $\mu(s)$ — естественный уровень смертности, $\omega(s)$ — уровень смертности от болезни, $\epsilon(s)$ — уровень перехода заразившихся в стадию заразных, $\gamma(s)$ — уровень выздоровления, B — уровень рождаемости, Λ_v

— фертильность в популяции переносчиков, $\lambda_v(I(s,t),t)$ — сила инфекции в популяции переносчиков, зависящая от количества способных к передаче болезни людей, μ_v — уровень смертности в популяции комаров, ϵ_v — уровень перехода переносчиков из состояния зараженных в стадию способных к распространению болезни и $u(s,t),(s,t) \in \Pi$ — доля вкладываемых средств от необходимых затрат, требуемых для максимального ограничения передачи инфекции.

В отличие от малярии, болеющие денге получают пожизненный иммунитет к болезни после выздоровления, поэтому расширим систему (2.1) введя класс людей получивших иммунитет R. Система уравнений, описывающих динамику распространения денге, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} S_t + S_s &= -\lambda(I_v(t),u,s,t)S(s,t) - \mu(s)S(s,t), \\ E_t + E_s &= \lambda(I_v(t),u,s,t)S(s,t) - \mu(s)E(s,t) - \epsilon(s)E(s,t), \\ I_t + I_s &= \epsilon(s)E(s,t) - (\mu(s)+\omega(s)+\gamma(s))I(s,t), \\ R_t + R_s &= \gamma(s)I(s,t) - \mu(s)R(s,t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

с начальными

$$S(s,t_0) = S^0(s), E(s,t_0) = E^0(s), I(s,t_0) = I^0(s), R(s,t_0) = R^0(s) \tag{2.6}$$

и граничными

$$S(s_0,t) = B, E(s_0,t) = 0, I(s_0,t) = 0, R(s_0,t) = 0 \tag{2.7}$$

условиями. Дифференциальная система, описывающая распространение болезни в популяции переносчиков, идентична системе (2.4).

Целью управления в системах (2.1) – (2.3) и (2.5) – (2.7) естественно считать минимизацию численности инфицированных людей на протяжении всего периода наблюдения и затрат на финансирование программ по ограничению распространения эпидемии, то есть

$$J(u) = \iint_{\Pi} [C_1 I(s,t) + C_2 u(s,t)] ds dt \to min. \tag{2.8}$$

Здесь C_1 и C_2 – весовые коэффициенты, $t \in [t_0,t_1], s \in [s_0,s_1]$.

В общем случае сила инфекции λ зависит от количества инфицированных переносчиков I_v. Поэтому учет динамики распространения патогена в популяции переносчиков с помощью системы (2.4) приводит к утрате линейности управляемых систем (2.1)–(2.3) и (2.5)–(2.7) по фазовым переменным. Для возможности применения численного метода решения задачи, основанного на точных формулах приращения функционала, предположим, что сила инфекции не зависит от количества зараженных комаров. Тогда, учитывая, что системы (2.1) и (2.5) с формальной точки зрения отличаются друг от друга лишь размерностью, в следующем пункте сформулируем задачу оптимального управления, в которой управляемая система формально включает в себя системы (2.1), (2.5). Очевидно, такой подход позволяет проводить математическое изучение единым образом для задач оптимального управления, основанных как на системе (2.1), так и на системе (2.5).

3. Постановка линейной по фазовой переменной задачи оптимального управления

Пусть управляемый процесс $\{u, x\}$ в области Π подчинен системе дифференциальных уравнений

$$x_t + x_s = f(x, u, s, t), \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$x(s_0, t) = q(t), \quad x(s, t_0) = x^0(s). \tag{3.2}$$

Требуется среди измеримых функций u, удовлетворяющих почти всюду в Π ограничениям

$$u(s, t) \in U, \tag{3.3}$$

найти такую, которая доставляет минимум функционалу

$$J(u) = \int_S < \varphi_1(s, t_1), x(s, t_1) > ds + \iint_\Pi \Phi(x, u, s, t) ds dt \to min. \tag{3.4}$$

Здесь $x(s,t)$ – n-мерная вектор-функция, функция $\Phi(x, u, s, t)$ и вектор-функция $f(x, u, s, t)$ линейны по переменной x, то есть

$$\Phi(x, u, s, t) =< a(u, s, t), x(s, t) > +b_0(u, s, t),$$

$$f(x, u, s, t) = A(u, s, t)x(s, t) + b(u, s, t),$$

где $A(u, s, t)$ – матричная функция, $a(u, s, t)$ и $b(u, s, t)$ – n-мерные вектор-функции.

Понятно, что если в задаче (3.1) – (3.4) положить $x = (S, E, I)$, $q(t) = (B, 0, 0)$, $x^0 = (S^0(s), E^0(s), I^0(s))$, $\varphi_1(s, t_1) = 0$ и $\Phi(x, u, s, t) = C_1 I(s, t) + C_2 u(s, t)$, то получим задачу вида (2.1) – (2.3), (2.8). Также, если в задаче (3.1) – (3.4) выбрать $x = (S, E, I, R)$, $q(t) = (B, 0, 0, 0)$, $x^0 = (S^0(s), E^0(s), I^0(s), R^0(s))$, $\varphi_1(s, t_1) = 0$ и $\Phi(x, u, s, t) = C_1 I(s, t) + C_2 u(s, t)$, то получим задачу вида (2.5) – (2.7), (2.8).

Терминальная часть критерия (3.4), вообще говоря, вполне может содержать интеграл

$$\int_T < \varphi_2(s_1, t), x(s_1, t) > dt.$$

С математической точки зрения, наличие такого дополнительного слагаемого в терминальном критерии фактически ничего не меняет и не усложняет задачу, но при погружении задач (2.1)–(2.3),(2.8) и (2.5)–(2.7),(2.8) в приведенную формализованную постановку (3.1) – (3.4), это терминальное слагаемое в функционале не задействовано, так как в данных моделях $x(s_1, t) = 0$.

Обсудим некоторые соображения, связанные с формальной корректностью рассматриваемой задачи оптимального управления. Прежде всего следует пояснить смысл обобщенного решения системы (3.1) с начальными условиями (3.2) при разрывных допустимых управлениях (3.3). Как известно, классическое (гладкое) решение системы (3.1) в условиях разрывности управления, вообще говоря, не существует. По этой причине, с формальной точки зрения, мы не можем пользоваться записью частных производных x_t, x_s. С другой стороны, в работе [3] этот вопрос исследован для гораздо более общих гиперболических систем, нежели чем (3.1), поэтому здесь мы будем использовать результаты этой работы. В частности, в ней доказано существование и единственность обобщенного решения, которое является измеримой и существенно ограниченной функцией, обладающей производными вдоль характеристик. В данном случае характеристики являются семейством прямых вида $s = \xi + t$, где ξ — некоторая константа, позволяющая выделять конкретную характеристику в допустимой области П. Также в [3] доказано, что оператор Dx, который в случае существования частных производных x_t, x_s имеет вид $Dx = x_t + x_s$, существует и тогда, когда эти производные теряют смысл, и также является измеримой и существенно ограниченной функцией, то есть $Dx \in L_\infty(\Pi)$. В той же работе доказана справедливость формулы интегрирования по частям

$$\begin{gathered}\iint_\Pi < \psi, D\Delta x > dsdt = \int_T < \psi(s_1, t), \Delta x(s_1, t) > dt - \\ - \int_T < \psi(s_0, t), \Delta x(s_0, t) > dt + \int_S < \psi(s, t_1), \Delta x(s, t_1) > ds - \\ - \int_S < \psi(s, t_0), \Delta x(s, t_0) > ds - \iint_\Pi < D\psi, \Delta x > dsdt,\end{gathered} \tag{3.5}$$

которая в последующем нам будет необходима.

4. Точные формулы приращений целевого функционала и численные методы, построенные на их основе

Пусть $\{u, x\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u,\ \tilde{x} = x + \Delta x\}$ – некоторые допустимые процессы в задаче (3.1) – (3.4). Обозначим

$$\Delta f(x,u,s,t) = f(\tilde{x},\tilde{u},s,t) - f(x,u,s,t)$$

и

$$\Delta\Phi(x,u,s,t) = \Phi(\tilde{x},\tilde{u},s,t) - \Phi(x,u,s,t).$$

Рассмотрим систему (3.1) в приращениях

$$D\Delta x = \Delta f(x,u,s,t)$$

с начальными условиями

$$\Delta x(s_0,t) = 0, \quad \Delta x(s,t_0) = 0.$$

Определим приращение $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$. Понятно, что

$$\Delta J(u) = \int_S < \varphi_1(s,t_1), \Delta x(s,t_1) > ds + \iint_\Pi \Delta\Phi(x,u,s,t) dsdt.$$

Очевидно, для произвольной векторной функции ψ справедливо равенство

$$\Delta J(u) = \int_S < \varphi_1(s,t_1), \Delta x(s,t_1) > ds +$$

$$+ \iint_\Pi < \psi, D\Delta x - \Delta f(x,u,s,t) > dsdt + \iint_\Pi \Delta\Phi(x,u,s,t) dsdt.$$

Воспользуемся формулой (3.5) и, принимая во внимание, что $\Delta x(s,t_0) = \Delta x(s_0,t) = \Delta x(s_1,t) = 0$, получим

$$\iint_\Pi < \psi, D\Delta x > dsdt = \int_S < \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1) > ds -$$

$$- \iint_\Pi < D\psi, \Delta x > dsdt.$$

Тогда приращение целевого функционала $\Delta J(u)$ можно записать следующим образом

$$\Delta J(u) = \int_S < \psi(s,t_1) + \varphi_1(s,t_1), \Delta x(s,t_1) > ds -$$

$$- \iint_\Pi [< D\psi, \Delta x > + < \psi, \Delta f(x,u,s,t) > - \Delta\Phi(x,u,s,t)] dsdt.$$

Введем в рассмотрение функцию Понтрягина

$$H(\psi,x,u,s,t) = < \psi, f(x,u,s,t) > - \Phi(x,u,s,t)$$

и ее приращение

$$\Delta H(\psi,x,u,s,t) = < \psi, \Delta f(x,u,s,t) > - \Delta\Phi(x,u,s,t).$$

Тогда

$$\Delta J(u) = \int_S < \psi(s,t_1) + \varphi_1(s,t_1), \Delta x(s,t_1) > ds -$$

$$-\int_{\Pi}[< D\psi, \Delta x > +\Delta H(\psi, x, u, s, t)]dsdt.$$

Запишем приращение функции Понтрягина двумя различными способами:

$$\Delta H(\psi, x, u, s, t) = H(\psi, \tilde{x}, \tilde{u}, s, t) - H(\psi, \tilde{x}, u, s, t)+$$

$$+H(\psi, \tilde{x}, u, s, t) - H(\psi, x, u, s, t) = \Delta_{\tilde{u}} H(\psi, \tilde{x}, u, s, t) + \Delta_{\tilde{x}} H(\psi, x, u, s, t)$$

и

$$\Delta H(\psi, x, u, s, t) = H(\psi, \tilde{x}, \tilde{u}, s, t) - H(\psi, x, \tilde{u}, s, t)+$$

$$+H(\psi, x, \tilde{u}, s, t) - H(\psi, x, u, s, t) = \Delta_{\tilde{x}} H(\psi, x, \tilde{u}, s, t) + \Delta_{\tilde{u}} H(\psi, x, u, s, t).$$

Ввиду линейности функции Понтрягина по переменной x, справедливо соотношение

$$H_x(\psi, x, u, s, t) = A^T(u, s, t)\psi - a(u, s, t),$$

где ^{T} – знак транспонирования. Тогда в первом случае

$$\Delta_{\tilde{x}} H(\psi, x, u, s, t) =< H_x(\psi, \tilde{x}, u, s, t), \Delta x >$$

и, аналогично, во втором

$$\Delta_{\tilde{x}} H(\psi, x, \tilde{u}, s, t) =< H_x(\psi, x, \tilde{u}, s, t), \Delta x > .$$

Приращение целевого функционала для первого случая можно записать в виде

$$\Delta J(u) = \int_S < \psi(s, t_1) + \varphi_1(s, t_1), \Delta x(s, t_1) > ds-$$

$$-\iint_{\Pi}[< D\psi + H_x(\psi, x, u, s, t), \Delta x > +\Delta_{\tilde{u}} H(\psi, \tilde{x}, u, s, t)]dsdt$$

и, соответственно, для второго

$$\Delta J(u) = \int_S < \psi(s, t_1) + \varphi_1(s, t_1), \Delta x(s, t_1) > ds-$$

$$-\iint_{\Pi}[< D\psi + H_x(\psi, x, \tilde{u}, s, t), \Delta x > +\Delta_{\tilde{u}} H(\psi, x, u, s, t)]dsdt.$$

Подчиним векторную функцию ψ сопряженной задаче

$$D\psi = -H_x(\psi, x, u, s, t), \quad \psi(s, t_1) = -\varphi_1(s, t_1), \quad \psi(s_1, t) = 0.$$

Тогда первая формула приращения целевого функционала примет вид

$$\Delta J(u) = -\iint_{\Pi} \Delta_{\tilde{u}} H(\psi, \tilde{x}, u, s, t)dt. \tag{4.1}$$

Во втором случае определим функцию $\tilde{\psi}$ как решение задачи

$$D\tilde{\psi} = -H_x(\tilde{\psi}, x, \tilde{u}, s, t), \quad \tilde{\psi}(s, t_1) = -\varphi_1(s, t_1), \quad \tilde{\psi}(s_1, t) = 0$$

и получим вторую точную формулу приращения целевого функционала

$$\Delta J(u) = -\iint_{\Pi} \Delta_{\tilde{u}} H(\tilde{\psi}, x, u, s, t) dt. \qquad (4.2)$$

Будем считать далее, что задача на максимум функции Понтрягина

$$H(\psi, x, u, s, t) \longrightarrow max,\ u \in U$$

допускает аналитическое решение

$$u^*(\psi, x, s, t) = arg \max\nolimits_{u \in U} H(\psi, x, u, s, t).$$

В этом предположении опишем возможные алгоритмы улучшения произвольного допустимого управления, основанные на точных формулах приращения целевого функционала (4.1),(4.2).

Опишем алгоритм улучшения допустимых управлений, построенный на основе первой формулы приращения.

Алгоритм 1. Пусть на k-ой итерации имеется некоторое допустимое управление u^k.
Шаг 1. Найдем решение $\psi(u^k, s, t)$ сопряженной задачи

$$D\psi = -A^T(u^k, s, t)\psi + a(u^k, s, t),$$

$$\psi(s, t_1) = -\varphi_1(s, t_1), \quad \psi(s_1, t) = 0.$$

Шаг 2. Найдем решение $x(s, t)$ фазовой системы

$$Dx = f(x, u^*(\psi(u^k, s, t), x, s, t), s, t)$$

$$x(s_0, t) = q(t), \quad x(s, t_0) = x^0(s).$$

Шаг 3. Сформируем новое управление

$$u^{k+1} = u^*(\psi(u^k, s, t), x(s, t), s, t).$$

Далее опишем алгоритм улучшения допустимых управлений, построенный на основе второй формулы приращения функционала.

Алгоритм 2. Пусть на k-ой итерации имеется некоторое допустимое управление u^k.
Шаг 1. Найдем решение $x(u^k, s, t)$ фазовой системы

$$Dx = f(x, u^k, s, t)$$

$$x(s_0, t) = q(t), \quad x(s, t_0) = x^0(s).$$

Шаг 2. Найдем решение $\psi(s,t)$ сопряженной задачи

$$D\psi = -A^T(u^*(\psi, x(u^k, s, t), s, t), s, t)\psi + a(u^*(\psi, x(u^k, s, t), s, t), s, t),$$

$$\psi(s, t_1) = -\varphi_1(s, t_1), \quad \psi(s_1, t) = 0.$$

Шаг 3. Сформируем новое управление

$$u^{k+1} = u^*(\psi(s,t), x(u^k, s, t), s, t).$$

Цена каждого улучшения в приведенных алгоритмах — решение двух задач Коши. Ниже приведем комбинированный алгоритм, в котором, вообще говоря, происходит двойное улучшение функционала в результате интегрирования двух задач Коши.

Алгоритм 3. Пусть имеется некоторое допустимое управление u^0.
Шаг 0. Присвоим значение счетчику итераций $k := 0$, найдем решение $x^k(s,t)$ фазовой системы

$$Dx = f(x, u^k, s, t)$$

$$x(s_0, t) = q(t), \quad x(s, t_0) = x^0(s).$$

и подсчитаем значение функционала $J(x^0, u^0)$.
Шаг 1. Найдем решение $\psi^k(s,t)$ сопряженной задачи

$$D\psi = -A^T(u^*(\psi, x^k(s,t), s, t), s, t)\psi + a(u^*(\psi, x^k(s,t), s, t), s, t),$$

$$\psi(s, t_1) = -\varphi_1(s, t_1), \quad \psi(s_1, t) = 0.$$

Шаг 2. Сформируем промежуточное управление

$$v(s,t) = u^*(\psi^k(s,t), x^k(s,t), s, t).$$

Шаг 3. Найдем решение $x^{k+1}(s,t)$ фазовой системы

$$Dx = f(x, u^*(\psi^k(s,t), x, s, t), s, t)$$

$$x(s_0, t) = q(t), \quad x(s, t_0) = x^0(s).$$

Шаг 4. Сформируем новое управление

$$u^{k+1} = u^*(\psi^k(s,t), x^{k+1}(s,t), s, t).$$

и вычислим значение функционала $J(x^{k+1}, u^{k+1})$.
Шаг 5. Если $J(x^k, u^k) - J(x^{k+1}, u^{k+1}) > \varepsilon$, где ε — некоторая заданная точность вычислений, переопределяем $k := k + 1$ и возвращаемся к первому шагу. В противном же случае u^{k+1} — искомое управление.

Список литературы

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М. : Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
2. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. – М. : ФИЗМАЛИТ, 2000. – 160 с.
3. Терлецкий В. А. Обобщенное решение одномерных полулинейных гиперболических систем со смешанными условиями / В. А. Терлецкий // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 12. – С. 82–90.
4. Gupur G. Threshold and Stability Results for an Age-Structured Epidemic Model / G. Gupur, Xue-Zhi Li, Guang-Tian Zhu // Computers and Mathematics with Applications. – 2001. – Vol. 42, N 6. – P. 883-907.
5. Hoppensteadt F. An age dependent epidemic model / F. Hoppensteadt // Journal of the Franklin Institute. – 1974. – Vol. 297, N 5. – P. 325-333.
6. Hoppensteadt F. Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics, and Epidemics / F. Hoppensteadt. – Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1975.
7. Inaba H., Threshold and stability results for an age-structured epidemic model / H. Inaba // J. Math. Biol. – 1990. – Vol. 28, N 4. – P. 411–434.
8. Macdonald G. The measurement of malaria transmission / G. Macdonald // Proc R Soc Med. – 1955. – Vol. 48, N 4. – P. 295–302.
9. Park T. Age-dependence in epidemic models of vector-borne infections / T. Park. – The University of Alabama, Huntsville, 2004.
10. Ross R. Report on the prevention of malaria in Mauritius / R. Ross – N. Y. : E. P. Dutton & Company, 1908.
11. Ross R. The logical basis of the sanitary policy of mosquito reduction / R. Ross // Science – 1905. – Vol. 22, N 570. – P. 689–699.
12. Ross R. The prevention of malaria / R. Ross. – London : John Murray, 1910.

Баталин Роман Михайлович, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 (e-mail: brm.irk@gmail.com)

Терлецкий Виктор Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521282 (e-mail: vaterletskiy@gmail.com)

R. M. Batalin, V. A. Terletskiy

Optimal Control in Epidemic Models of Transmissive Diseases with SEI-SEIR Systems

Abstract. This paper discusses the age-dependent epidemic models of transmissive diseases. The models consists of coupled partial differential equations for human population and ordinary differential equations for vector population. Based on these models, the problems of optimal control of funding level of programs to prevent spread of infections were built. The combined minimization both count of infected human population and founding level of disease transition prevention programs was selected as a target of optimization. These two criterias conflict and to resolve this contradiction in this paper using the approach of weight coefficients. Unfortunately, the problem is nonlinear in this statement and development of methods, more effective than widely known gradient methods or methods based on Pontryagin maximum principle, turned out to be rather nontrivial. For this reason this paper assumes that number of infected vectors is a constant. This simplification allow us to generalized original nonlinear models in the optimal control problem with linear dynamic system. For this problem accurate formulas of increment of cost functional and numerical method based on these formulas are built. These methods are more effective than commonly known standard methods because allows to improve control by solving one Cauchy problem. Furthermore, these methods are capable of improving extreme and degenerate controls.

Keywords: optimal control, accurate formulas of increment of cost functional, age-dependent epidemic models, transmissive diseases.

References

1. Vasilev F.P. Methods of optimization. Moscow, Faktorial Press, 2002.
2. Srochko V.A. Iterative methods for solving optimal control problems. Moscow, FIZMALIT, 2000.
3. Terletskiy V.A. Generalized solution for one-dimensional semi-linear hyperbolic systems with mixing conditions. *Izvestiya vuzov. Matematika.*, 2004, vol. 12, pp. 82-90.
4. Gupur G., Li Xue-Zhi, Zhu Guang-Tian. Threshold and Stability Results for an Age-Structured Epidemic Model. *Computers and Mathematics with Applications*, 2001, vol. 42, no 6, pp. 883-907.
5. Hoppensteadt F. An age dependent epidemic model. *Journal of the Franklin Institute*, 1974, vol. 297, no 5, pp. 325-333.
6. Hoppensteadt F. Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics, and Epidemics. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1975.
7. Inaba H., Threshold and stability results for an age-structured epidemic model. *J. Math. Biol.*, 1990, vol. 28, no 4, pp. 411-434.
8. Macdonald G. The measurement of malaria transmission. *Proc. R. Soc. Med.*, 1955, vol. 48, no 4, pp. 295–302.
9. Park T. Age-dependence in epidemic models of vector-borne infections. The University of Alabama, Huntsville, 2004.
10. Ross R. Report on the prevention of malaria in Mauritius. New York: E. P. Dutton & Company, 1908.
11. Ross R. The logical basis of the sanitary policy of mosquito reduction. *Science*, 1905, vol. 22, no 577, pp. 689–699.
12. Ross R. The prevention of malaria. London, John Murray, 1910.

Batalin Roman Mikhaylovich, Postgraduate, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003 (e-mail: brm.irk@gmail.com)

Terletskiy Viktor Anatolievich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Docent, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003 professor, tel.: (3952)521282 (e-mail: vaterletskiy@gmail.com)