



Серия «Математика»  
2012. Т. 5, № 1. С. 42–47

Онлайн-доступ к журналу:  
<http://isu.ru/izvestia>

---

---

ИЗВЕСТИЯ  
Иркутского  
государственного  
университета

---

---

УДК 517.958:550.3

## Математическое моделирование нелинейной релаксации сейсмического процесса Прибайкалья

Ф. И. Иванов

*Иркутский государственный университет*

**Аннотация.** В статье представлена постановка и анализ статистической модели процессов релаксации в сейсмичности Прибайкалья (МК-модель).

**Ключевые слова:** сейсмический процесс; метод Монте-Карло.

Центральной проблемой исследования сейсмичности является прогноз сильных землетрясений. На настоящем этапе немногие задачи прогноза решаются с хорошей точностью. В основной их части мы можем дать только достаточно грубые статистические оценки на основе коротких рядов инструментальных наблюдений, исторических данных и идентификации сейсмоактивных зон методами сейсмогеологии и геофизики. Достаточно отметить, что в Прибайкалье сеть сейсмических станций начала развиваться с середины прошлого столетия, в то время как периоды подготовки сильных землетрясений измеряются десятками и сотнями лет.

В то же время, накопленные инструментальные данные составляют хорошую основу для построения математических моделей сейсмичности региона. Решающую роль в их обосновании и развитии сыграла концепция структурной неоднородности геофизической среды, разработанная в механике крупномасштабных взрывов [1; 2].

В статье рассматривается новый подход к построению модели сейсмичности Прибайкалья, базирующийся на алгоритме оценки энергии землетрясений, разработанном в работе [3].

Данная модель позволила сделать обоснованные предположения о направлении активизации Байкальской рифтовой зоны, достаточно уверенно выделить афтершоковую составляющую в сейсмическом процессе и уточнить связь между длительностью сейсмических колебаний и размером очага землетрясения.

## 1. Общая постановка задачи

МК-моделирование неравновесных систем, как правило, проводится в два этапа. На первом этапе в систему вводится некоторое возмущение, случайным образом нарушающее равновесное распределение системы. Второй этап обеспечивает поиск решения задачи, т. е. построение динамики возврата к равновесному состоянию. Формализованные элементы этого динамического процесса, а также регулирующие правила допустимых переходов с помощью техники Монте-Карло и определяют собственно МК-модель той или иной динамической системы.

Существенной особенностью геомеханической системы является блоковая структура, которая может быть описана диагональной матрицей:

$$p_{ij} = \delta_{ij} f(\alpha V_i).$$

Здесь  $V_i$  — размер блока,  $p_{ii}$  — вероятность обнаружения блока заданного размера, а  $f(x)$  — монотонно убывающая функция.

Под воздействием внешних сил, которые являются медленными по сравнению с временами релаксации в системе, каждый блок является генератором возбуждений, вероятности которых проявиться в виде землетрясений, описываются верхней треугольной матрицей  $W_{ij}(E)$ , где  $E$  — энергия землетрясения.

Отсюда формально строится эволюционный оператор, который при заданном векторе начального состояния системы определяет наблюдаемые величины: количество землетрясений за определенный интервал времени как функцию энергии землетрясений и их координат (график повторяемости).

При анализе сейсмического процесса метод Монте-Карло удобно ввести через матрицу плотности, имеющую в энергетическом представлении вид:

$$\rho_{ij} = \delta_{ij} \exp(-\beta E_i).$$

То есть матрица плотности диагональная и  $\rho_{ii}$  — есть вероятность обнаружить систему в состоянии с энергией  $E_i$ .

В свою очередь, матрица плотности  $\rho$  формально может быть определена как решение эволюционного уравнения в координатном представлении:

$$\frac{\partial \rho(x, x', \beta)}{\partial \beta} = -H \rho(x, x', \beta).$$

Здесь:  $H$  — гамильтониан системы, а решение удовлетворяет начальному условию  $\rho(x, x', \beta) = \delta(x - x')$ .

Для свободной частицы данное уравнение принимает вид уравнения диффузии:

$$\frac{\partial \rho(x, x', \beta)}{\partial \beta} = -\chi \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \rho(x, x', \beta).$$

Аналитическое решение уравнения в изотропной и однородной среде с указанными начальными условиями хорошо известно.

Но данное решение может быть получено путем статистического усреднения по ансамблю траекторий случайного блуждания, которые легко генерируются в компьютерном эксперименте.

Отсюда естественным образом формулируется вариант МК-моделирования задач релаксации структурно неоднородных макроскопических систем, как построение и анализ броуновского движения в многомерном конфигурационном пространстве с заданной или вычисляемой дискретной структурой. Отметим, что данный подход асимптотически точен, как и автомодельное решение диффузионного уравнения.

## 2. МК-модель сейсмичности Прибайкалья

Представленная модель построена на основе системы уравнений нестационарной теории возмущений:

$$\frac{\partial P_m}{\partial t} = \sum_n (W_{nm} P_n - W_{mn} P_m).$$

Здесь:  $P_m$  — вероятность нахождения системы в одном из допустимых состояний,  $W_{nm}$  — отнесенная к единице времени вероятность перехода системы из состояния  $n$  в состояние  $m$ .

В качестве основного постулата модели принят график повторяемости землетрясений равновесного сейсмического процесса в виде [3]:

$$P_m = S/E_m.$$

Соответственно, правило разрешенного перехода в МК-модели неравновесного сейсмического процесса принято в виде:

$$W_{nm} = \frac{\alpha}{\tau (\alpha + \delta E_{nm}(n))}.$$

Здесь  $\tau$ ,  $\alpha$  — параметры настройки модели,  $n$  — плотность элементарных возбуждений в системе,  $\delta E_{nm}$  — изменение энергии системы при вариации одной из координат конфигурационного пространства.

Вторая особенность МК-модели сейсмического процесса — изменение направления времени. То есть изначально генерируется случайное равномерное распределение точек, а в модельном гамильтониане системы эффективное отталкивание соседних частиц изменяется на притяжение. Конечным состоянием системы является неравновесная система как конфигурация кластеров, моделирующих очаги землетрясений.

График повторяемости включает в себя как основные события (стационарный сейсмический процесс), так и индуцированные — афтершоки сильных землетрясений. Соответственно, задача оценки неравновесного распределения сводится к подсчету количества и размеров кластеров с последующим усреднением по совокупности реализаций.

Вторая задача составляет точную идентификацию структуры максимального кластера и решение задачи броуновского движения внутри этого кластера.

Дополнительно, в МК-модель был включен блок оценки энтропии сейсмического процесса:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \sum_n W_{nm} (P_n - P_m) \ln(P_n - P_m).$$

### 3. Анализ МК-модели

В Байкальской сейсмической зоне район южного Байкала и дельты Селенги относится к наиболее активным очаговым областям. В 1862 г. здесь произошло сильнейшее в Прибайкалье Цаганское землетрясение с магнитудой  $M = 7,5$ , в результате которого, по мнению ряда исследователей, образовался залив Провал. В 1903 г. произошло землетрясение с  $M = 6,7$ , а в 1959 г. — землетрясение с магнитудой 6,8. Особенность этого региона состояла в том, что с начала 1952 г, когда началась регистрация слабых землетрясений и до момента последнего землетрясения 1959 г., здесь регистрировались лишь единичные случаи. Уже за первые 3 месяца после этого землетрясения сформировался устойчивый сейсмический процесс.

Это событие дало уникальную возможность оценить релаксационные процессы в достаточно чистом виде. Детальный анализ афтершоковой активности этого региона вплоть до последнего землетрясения 2001 г. дан в [3]. Здесь мы представим только основные параметры, на основе которых настраивалась МК-модель.

- 1) Область очаговой зоны может быть описана эллипсом с полуосями 11,8 км и 13,3 км. Эффективный сферический радиус излучателя упругой энергии составляет  $R = 12,4$  км.
- 2) Радиационная энергия излучения в логарифмическом масштабе составляет 16,68. Суммарная энергия афтершоков в области очага за первые 4 месяца соизмерима и составляет 16,62.
- 3) За 2 года сформировался афтершоковый процесс в области, вмещающей очаг с радиусом  $R_{\text{реф}} = 8R$ .

- 4) На длительном интервале времени (40 лет) достаточно уверенно выделяются землетрясения с высокой энергией, составляющие основной стационарный процесс, график повторяемости которых описывается формулой

$$P = \frac{S}{E^{(1-0.5)}}.$$

- 5) График повторяемости землетрясений афтершокового процесса описывается формулой

$$P = \frac{S(t)}{E^{(1-\delta(t))}}.$$

Здесь максимальные вариации  $S(t)$  достигают 1,5 логарифмических единиц, а  $\delta(t)$  изменяется в диапазоне 0,2–0,5.

На основе этих данных определен размер сетки МК-модели, оценена энергия нерегистрируемых возбуждений  $\alpha(M)$ , а вдоль большой оси эллипса очаговой зоны в МК-модель включен слабый логарифмический потенциал. При этих параметрах МК-модель достаточно уверенно определяет  $\delta(t)$  афтершокового процесса, однако гармонические вариации  $S(t)$  существенно превышают оценки стандартного отклонения.

Для исследования данного вопроса был выполнен совместный анализ параметров сейсмичности представленного района и зоны, включающей юг Байкала и озеро Хубсугул. В целом кривые, описывающие вариации  $S(t)$  для этих районов, удовлетворительно согласуются между собой. Это свидетельствует о том, что изучаемые процессы являются пространственно-временным фрагментом сейсмического процесса Прибайкалья в целом. То есть мы должны существенно огрубить модель, включив более длительные интервалы времен и увеличить масштаб исследуемого процесса.

В связи с этим Байкальская рифтовая зона была разбита на 5 крупных зон, а время усреднения в МК-модели включало 20-летний период наблюдений. На этих объектах хороший результат показал модуль оценки энтропии глобального в рамках региона сейсмического процесса. На его основе установлено закономерное снижение энтропии при движении от юго-восточного к северо-западному флангу, что дает основания сделать важные заключения о соответствующем направлении активизации Байкальского рифта.

Хорошие результаты МК-модель дает и на уровне анализа отдельного кластера. Эта задача интересна тем, что размер кластера в модели связывается с энергией отдельного землетрясения. Соответственно, выделяются два этапа:

– точная идентификация конфигурации крупных кластеров в модели;

– решение задачи броуновского движения частицы внутри отдельного кластера.

Эти этапы легко реализуются в компьютерном эксперименте. Одним из проверяемых результатов МК-модели служит длительность колебаний, генерируемых очагом сильного землетрясения. Результаты расчетов позволили установить связь длительности колебаний с размером очага землетрясения в виде формулы:

$$t = 0,054R^{0,49},$$

что в целом соответствует экспериментальным данным.

### Список литературы

1. Адушкин В. В. Геомеханика крупномасштабных взрывов / В. В. Адушкин, А. А. Спивак. – М. : Недра, 1993. – 319 с.
2. Садовский М. А. От сейсмологии к геомеханике / М. А. Садовский, В. Ф. Писаренко, В. Н. Родионов // Вестн. АН СССР. – 1983. – № 1. – С. 32–38.
3. Потапов В. А. Дискретные и непрерывные модели в сейсмологии / В. А. Потапов, Ф. И. Иванов. – Иркутск : Ин-т земной коры СО РАН, 2005. – 196 с.

---

**F. I. Ivanov**

**Mathematical modeling of nonlinear relaxation in seismic process**

**Abstract.** The article present formulation of the statistical model of relaxation processes in seismicity of Baikal region (МК-model).

**Keywords:** seismic process, Monte-Carlo method

Иванов Федор Илларионович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 ([fivanov@math.isu.ru](mailto:fivanov@math.isu.ru))

Ivanov Fedor, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)242210 ([fivanov@math.isu.ru](mailto:fivanov@math.isu.ru))