Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 1. С. 70—79

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.7

О сложности надструктуры классов монотонных k-значных функций специального вида *

В. Б. Ларионов
ООО «Атес Медика Софт»

В. С. Федорова
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация. В статье доказано, что класс монотонных функций многозначной логики, сохраняющих частично упорядоченное множество с одним минимальным элементом и двумя максимальными или частично упорядоченное множество с одним максимальным элементом и двумя минимальными, либо является предпредполным, либо обладает бесконечной надструктурой, состоящей из не предикатно-описуемых классов.

Ключевые слова: многозначная логика; монотонная функция; надструктура; предикат; не предикатно-описуемый класс.

Хорошо известно [9], что решетка замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций k-значной логики для любого $k \geqslant 3$ содержит континуальное число классов. В силу невозможности ее исчерпывающего описания представляется интересным изучение различных подмножеств этой решетки.

Принципиальная возможность существования замкнутых классов монотонных функций многозначной логики с бесконечной *надструктурой* (то есть множеством содержащих их классов) была доказана В. Б. Ларионовым в статье [4]. Как было показано в работе того же автора [3], минимальной логикой с такими классами функций является четырехзначная логика P_4. В [2] был получен критерий наличия бесконечной надструктуры классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченные множества с одним минимальным и двумя максимальными, двумя минимальными и одним максимальным, двумя минимальными и двумя максимальными элементами. В данной рабо-

* Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

те продолжено изучение надструктуры некоторых из перечисленных классов монотонных функций и показано, что она может содержать бесконечное число классов, не являющихся предикатно-описуемыми.

Введем необходимые определения. Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \dots, k-1\}$.

Определение 1. *Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется функцией k-значной логики ($k \geqslant 2$), если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k.*

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Множество всех функций k-значной логики обозначим P_k. Для любого подмножества A из P_k через $[A]$ будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции (для функций далее везде будет идти речь именно об этом типе замыкания).

Пусть на E_k задано некоторое отношение частичного порядка r. Возьмем два произвольных набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_n)$ из E_k^n. Будем говорить, что $\tilde{a}$ не превосходит $\tilde{b}$ относительно частичного порядка r и записывать $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, если для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ справедливо неравенство $a_i \leqslant_r b_i$.

Определение 2. *Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной относительно частичного порядка r, если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ таких, что $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, выполнено $f(\tilde{a}) \leqslant_r f(\tilde{b})$. Множество всех функций из P_k, монотонных относительно r, называется классом монотонных функций M_r.*

Для наглядности везде далее будем задавать частичный порядок r частично упорядоченным множеством (ЧУМ) H из элементов E_k и соответствующий класс обозначать M_H.

Определение 3. *Пусть $p(x_1, \dots, x_m)$ – некоторый предикат, определенный на E_k^m, $f(y_1, \dots, y_n)$ – функция из P_k. Говорят, что функция $f(y_1, \dots, y_n)$ сохраняет предикат $p(x_1, \dots, x_m)$, если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих предикату p, набор $\Big(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm})\Big)$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.*

Будем обозначать через $\mathrm{Pol}(p)$ множество всех функций, сохраняющих предикат p. Класс M_H является замкнутым классом функций, сохраняющих предикат $R(x, y) = \mathrm{TRUE} \iff x \leqslant_r y$ [8]. Везде далее в выражении „монотонный класс задается предикатом R“ подразумевается именно описанный предикат $R(x, y)$.

Одним из семейств предполных классов функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ (везде далее рассматриваются только такие k) является некоторое подмножество всех классов монотонных функций [10]. Класс M_H

является предполным тогда и только тогда, когда ЧУМ H обладает в точности одним максимальным и одним минимальным элементом [5].

На множестве предикатов вводятся следующие операции: отождествление переменных, конъюнкция и добавление квантора существования по какой-либо переменной (проекция). Для произвольного множества предикатов P через $[P]$ будем обозначать его замыкание относительно указанных операций. Подробное определение этих операций можно найти в [1] и [6].

Лемма 1 (**[1]**). *Если* $p_1 \in [p_2]$, *то* $\mathrm{Pol}(p_2) \subseteq \mathrm{Pol}(p_1)$.

Лемма 2 (**[8]**). *Для произвольного предиката* p *из представления* $p = p_1 \& p_2 \& \cdots \& p_t$, *где предикаты* $p_1, \dots, p_t$ *не имеют общих переменных и не являются тождественно ложными, следует*

$$\mathrm{Pol}\, p = \mathrm{Pol}\, p_1 \cap \mathrm{Pol}\, p_2 \cap \ldots \cap \mathrm{Pol}\, p_t.$$

Пусть предикат p задается формулой F над системой $\{R\}$, где R — предикат, задающий класс монотонных функций. Везде далее рассматриваются только формулы с вынесенными вперед кванторами существования. Сопоставим F ориентированный граф G_F по следующему правилу: между множеством вершин G_F и множеством переменных F (учитываем и свободные, и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x, пометим символом "x", если переменная x свободная, и "$\exists x$", если связанная. Данную вершину обозначим v_x. В графе G_F есть ориентированное ребро (v_x, v_y) тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R(y, x)$.

Далее нам потребуются некоторые свойства предикатов, доказательства которых содержатся в [2]. Обозначим через $\overline{F}$ множество формул над $\{R\}$, графы которых не имеют ориентированных циклов.

Лемма 3 (**[2]**). *Пусть* R — *предикат, задающий класс монотонных функций,* $p_1, p_2 \in [R]$, $\mathrm{Pol}\, p_1 \subseteq \mathrm{Pol}\, p_2$, *предикат* p_2 *реализуется над* $\{R\}$ *формулой из* $\overline{F}$. *Тогда* $p_2 \in [p_1]$.

Лемма 4 (**[2]**). *Пусть* R — *предикат, задающий класс монотонных функций;* $P_1, P_2 \subseteq [R]$ — *некоторые множества предикатов, такие что* $\mathrm{Pol}\, P_1 = \mathrm{Pol}\, P_2$. *Тогда для любого предиката* $p \in P_1$, *задаваемого над системой* $\{R\}$ *формулой из множества* $\overline{F}$, *справедливо* $p \in [P_2]$.

Определение 4. *Предикат* $p(x_1, \dots, x_n)$, *где* $n \geqslant 2$, *назовем невырожденным, если существует набор* $\tilde{a} \in E_k^n$ *такой, что* $p(\tilde{a}) = \mathrm{FALSE}$, *но для любого номера* $i \in \{1, \dots, n\}$ *существует элемент* $b_i \in E_k$ *такой, что* $p(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = \mathrm{TRUE}$. *Одноместный предикат невырожден тогда и только тогда, когда он отличен от тождественно истинного и ложного предикатов. В противном случае назовем предикат вырожденным.*

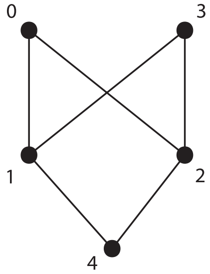

Рис. 1. Частично упорядоченное множество H_5.

Лемма 5 (**[2]**). *Любой класс $A = \mathrm{Pol}\, p$, где $p \in [R]$, $A \neq \mathrm{Pol}\, R$, $A \neq P_k$, представим конечным пересечением $A = \bigcap_i \mathrm{Pol}\, p_i$, где все p_i — невырожденные предикаты.*

Лемма 6 (**[2]**). *Пусть ЧУМ H имеет единственный минимальный элемент, R — предикат, задающий класс монотонных функций M_H. Пусть $p_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, p_l(x_1, \ldots, x_{n_l}) \in [R]$ — невырожденные предикаты местностей соответственно $n_1, \ldots, n_l$, задаваемые формулами из $\overline{F}$, $n = \max(n_1, \ldots, n_l)$, $\mathrm{Pol}\, p_i \neq \mathrm{Pol}\, R$. Тогда любой невырожденный предикат p' из множества $[p_1, \ldots, p_l]$ имеет местность $r \leqslant n$.*

Пусть H_5 — ЧУМ из пяти элементов, изображенное на рисунке 1.

Теорема 1 (**[4, 2]**). *В P_5 в решетке замкнутых классов над классом монотонных функций M_{H_5} находится бесконечная цепочка замкнутых классов.*

H_5 является минимальным ЧУМ, имеющим один минимальный и два максимальных элемента, таким, что надструктура класса M_{H_5} бесконечна. Далее мы покажем, что в этом самом простом случае надструктура M_{H_5} весьма сложна.

Определение 5. *Замкнутый класс A называется предикатно-описуемым, если существует предикат p такой, что справедливо представление $A = \mathrm{Pol}\, p$.*

Если класс A не является предикатно-описуемым, это свидетельствует о сложности его надструктуры [7]: либо существует бесконечная цепочка классов, содержащих A, с пределом, равным A, либо бесконечное число минимальных надклассов A.

Теорема 2. *В P_5 в решетке замкнутых классов над классом монотонных функций M_{H_5} находится бесконечное число классов, не являющихся предикатно-описуемыми.*

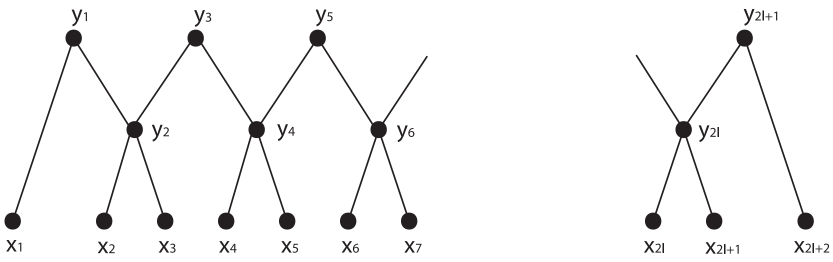

Рис. 2. Граф формулы F_l, задающей предикат p_l.

Доказательство. Пусть R_5 — предикат, задающий класс монотонных функций M_{H_5}. Определим $(2l+2)$-местный предикат p_l $(l \geqslant 1)$, задаваемый формулой над $\{R_5\}$, граф которой изображен на рисунке 2. Для упрощения каждый элемент графа помечен символом соответствующей переменной, опущены кванторы существования и стрелки (предполагается, что идут сверху вниз). Все переменные x_i (находящиеся на нижнем уровне) являются свободными, а y_i — связанными. Указанную формулу обозначим через F_l, а соответствующий граф — G_{F_l}. Отметим, что именно классы $\mathrm{Pol}\, p_l$ образуют бесконечную цепочку из теоремы 1.

Рассмотрим произвольный набор $\tilde{a} \in E_5^{2h+2}$, где $h \geqslant 1$. Разрежем его на $h+2$ куска: первая компонента $\{a_1\}$, h кусков $\{a_{2(s+1)}, a_{1+2(s+1)}\}$ размера 2, где $s \in \{0, \ldots, h-1\}$, последняя компонента $\{a_{2h+2}\}$. Составим множество T_h из таких наборов $\tilde{a}$, для которых выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) в одном куске набора $\tilde{a}$ содержатся оба элемента 0 и 3;
2) два соседних куска набора $\tilde{a}$ содержат оба элемента 0 и 3;
3) между двумя кусками набора $\tilde{a}$, один из которых содержит элемент 0, а другой — элемент 3, находятся только куски, в каждом из которых содержатся оба элемента 1 и 2, то есть все такие куски имеют вид $\{1, 2\}$ или $\{2, 1\}$.

Лемма 7 (**[2]**). *Для произвольного набора* $\tilde{b} \in E_5^{2h+2}$, $h \geqslant 1$, *выполнено* $p_h(\tilde{b}) = \mathrm{TRUE}$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{b} \notin T_h$.

Для предиката p_l обозначим через X_1 множество переменных x_2, $x_4, \ldots, x_{2l}$, а через X_2 — множество переменных $x_3, x_5, \ldots, x_{2l+1}$ (то есть из каждой пары переменных $\{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{2l}, x_{2l+1}\}$ мы поместили одну переменную в множество X_1, а другую — в множество X_2). Обозначим через P_{eq} множество предикатов, которые можно получить из p_l произвольными независимыми отождествлениями (возможно, пустыми) переменных внутри множеств X_1 и X_2. Для произвольного $p \in P_{eq}$

пусть $X_i(p)$, $i = 1, 2$, — множество переменных предиката p, которые получились в результате описанного отождествления из переменных множества X_i предиката p_l. Через $s_i(p)$ обозначим мощность множества $X_i(p)$.

Лемма 8. *Любой предикат $p \in P_{eq}$ является невырожденным.*

Доказательство. Предикат p получен из некоторого p_l отождествлением переменных внутри множеств X_1 и X_2. Отметим, что сам предикат p_l является невырожденным, поскольку с учетом леммы 7 достаточно в определении 4 рассмотреть набор $\tilde{a} = (0, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, 3)$. Получим из $\tilde{a}$ новый набор $\tilde{b}$, отождествив компоненты с номерами, соответствующими номерам отождествляемых переменных при получении предиката p. Это всегда можно сделать, поскольку на $\tilde{a}$ все переменные из множества X_i, $i = 1, 2$, приняли равные значения. Применением определения 4 к предикату p и набору $\tilde{b}$ получаем, что p — невырожденный предикат. □

Рассмотрим множества предикатов

$$P_m = \{p \in P_{eq} :\ \min(s_1(p), s_2(p)) \leqslant m\},$$

где $m \geqslant 1$. Обозначим через C_m классы функций $\operatorname{Pol} P_m$.

Лемма 9. *Все замкнутые классы функций C_m, $m \geqslant 1$, не являются предикатно-описуемыми.*

Доказательство. Предположим, что некоторый класс C_m предикатно-описуем, и $C_m = \operatorname{Pol} p$ для некоторого предиката p. По лемме 5 класс C_m представим конечным пересечением классов $\operatorname{Pol} t_i$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, где предикаты t_i являются невырожденными. Обозначим через t предикат, равный $t_1 \& \ldots \& t_s$, где конъюнкции осуществляются без отождествления переменных. По лемме 2 получаем $C_m = \operatorname{Pol} t$.

С другой стороны, $C_m = \operatorname{Pol} P_m$. Возьмем произвольный предикат $p' \in P_m$. Справедливо $C_m \subseteq \operatorname{Pol} p'$, то есть $\operatorname{Pol} t \subseteq \operatorname{Pol} p'$. Заметим, что $F_l \in \overline{F}$. По лемме 3 выполняется $p' \in [t]$. Поскольку предикат t выражается конъюнкцией над системой $\{t_1, \ldots, t_s\}$, то $p' \in [\{t_1, \ldots, t_s\}]$. Обозначим через N максимальную местность невырожденных предикатов $t_1, \ldots, t_s$. Согласно лемме 6 мы не можем реализовать невырожденный предикат p' местности больше, чем N, формулой над $\{t\}$. Но поскольку местность невырожденных предикатов $p' \in P_m$ (см. лемму 8) не ограничена сверху, получаем противоречие. □

Лемма 10. *Все классы C_m различны.*

Доказательство. Предположим, что $C_{m_1} = C_{m_2}$ для некоторых $m_1 > m_2 \geqslant 1$. Напомним, что $C_{m_1} = \operatorname{Pol} P_{m_1}$, $C_{m_2} = \operatorname{Pol} P_{m_2}$. По определению множества предикатов P_m справедливо $P_{m_1}, P_{m_2} \subseteq [R_5]$. Поскольку для произвольного $p_{m_1} \in P_{m_1}$ выполняется $F_{p_{m_1}} \in \overline{F}$, то по лемме 4 получаем, что $p_{m_1} \in [P_{m_2}]$. Поскольку формула, реализующая предикат p_{m_1} над P_{m_2}, не может быть бесконечной, то существуют предикаты $t_1, \ldots, t_m \in P_{m_2}$ такие, что $p_{m_1} \in [\{t_1, \ldots, t_m\}] = Q$.

Рассмотрим формулу, реализующую p_{m_1} над Q:

$$p_{m_1}(\tilde{x}) = \exists y_1, \ldots, y_s \ P_1 \& \ldots \& P_r, \tag{0.1}$$

где P_i, $i = 1, \ldots, r$, — некоторый предикат из множества Q. Каждый P_i зависит от переменных $x_1, \ldots, x_{2m_1+2}, y_1, \ldots, y_s$. В работе [2] было показано, что в случае, когда H имеет единственный минимальный элемент, формулу вида (0.1) можно преобразовать так, чтобы каждая связанная переменная y_i встречалась только в одном сомножителе P_j. То есть

$$p_{m_1}(\tilde{x}) = P_1' \& \ldots \& P_r',$$

где P_j' получен из P_j, $j = 1, \ldots, r$, некоторой проекцией. В этой формуле для каждого j в P_j' были внесены связанные переменные из множества $\{y_1, \ldots, y_s\}$, от которых зависит P_j.

Рассмотрим набор $\tilde{a} = (0, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, 3) \in E_5^{2m_1+2}$. По лемме 7 справедливо $p_{m_1}(\tilde{a}) = \text{FALSE}$, поэтому среди предикатов $P_1', \ldots, P_r'$ найдется предикат, ложный на $\tilde{a}$. Пусть это P_i' (переобозначим его для удобства через p). Предикат p получен некоторыми проекциями и отождествлениями переменных из предиката $t_q \in P_{m_2}$, который, в свою очередь, получен из некоторого p_l отождествлением переменных внутри множеств X_1 и X_2, при этом $\min(s_1(t_q), s_2(t_q)) \leqslant m_2$. Таким образом, p получен из p_l некоторыми отождествлениями и проекциями. Для произвольной переменной x_i предиката p_{m_1} обозначим через $U(x_i)$ множество переменных предиката p_l, которые при получении p были отождествлены в x_i (оба предиката p_{m_1} и p зависят от набора переменных $\tilde{x}$). Обозначим $U = \bigcup\limits_{i=1}^{2m_1+2} U(x_i)$. По переменным предиката p_l, которые не попали в U, была взята проекция.

Поскольку при рассмотрении набора $\tilde{a}$ получаем, что предикат p_{m_1} невырожден, то любая проекция p_{m_1} по одной переменной истинна на соответствующем наборе $\tilde{a}'$ (набор $\tilde{a}$ без той компоненты, по которой берется проекция). Те же самые рассуждения справедливы и для p, откуда следует, что предикат p также невырожден. Следовательно, все переменные p существенны, и все множества $U(x_i)$ непустые.

Для произвольного набора $\tilde{c} \in E_5^{2m_1+2}$ обозначим через $\Phi(\tilde{c})$ множество тех наборов из E_5^{2l+2}, у которых все компоненты из $U(x_i)$ равны c_i, а остальные принимают произвольные значения.

Рассмотрим множество $\Phi(\tilde{a})$. По построению для любого $\tilde{d} \in \Phi(\tilde{a})$ справедливо $p_l(\tilde{d}) = \text{FALSE}$. Все такие наборы $\tilde{d}$ имеют общую компоненту из номеров, соответствующих множеству U, и предикат p ложен на таких наборах независимо от того, какие значения приняли переменные, не принадлежащие множеству U. По лемме 7 получаем, что указанная общая компонента имеет вид $C = [0, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, 3]$. Итак, в указанном куске C все переменные принадлежат множеству U. Пусть найдется переменная x_i такая, что ни один элемент множества $U(x_i)$ не входит в кусок U. Но тогда проекция предиката p по переменной x_i, а значит и p_{m_1}, ложна на наборе $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{2m_1+2})$. Получаем противоречие. Итак, в куске C содержится по крайней мере по одному элементу из каждого $U(x_i)$. Отметим также, что первая (последняя) переменная куска C принадлежит множеству $U(x_1)$ (соответственно $U(x_{2m_1+2})$), поскольку в наборе $\tilde{a}$ только x_1 (x_{2m_1+2}) принимает значение 0 (соответственно 3).

Рассмотрим $(2m_1 + 2)$-компонентный набор $\tilde{b}^i = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 1, 3, 3, \ldots, 3)$, где $(1, 1)$ стоит в i-м куске (то есть $2i$ и $(2i + 1)$-я компоненты набора $\tilde{b}^i$ равны 1). По лемме 7 справедливо $p_{m_1}(\tilde{b}^i) = \text{TRUE}$, откуда $p(\tilde{b}^i) = \text{TRUE}$. Следовательно, должен существовать набор $\tilde{c}^i \in \Phi(\tilde{b}^i)$ такой, что $p_l(\tilde{c}^i) = \text{TRUE}$. Рассмотрим кусок C на наборе $\tilde{c}^i$. Первая и последняя его компоненты опять будут равны 0 и 3 соответственно. По лемме 7 между ними должна встретиться пара $(1, 1)$, то есть $C = [0, \ldots, 1, 1, \ldots, 3]$. Это означает, что переменные из указанной пары входят в множество $U(x_{2i}) \bigcup U(x_{2i+1})$. Но в одно множество эти переменные входить не могут, поскольку на наборах $\Phi(\tilde{a})$ они принимали разные значения.

Итак, получаем, что для любой пары компонент (x_{2i}, x_{2i+1}) из $\tilde{x} \in E_5^{2m_1+2}$ для p_{m_1} должны найтись такие элементы в множествах $U(x_{2i})$, $U(x_{2i+1})$, которые попадут в одну пару в наборе $\tilde{y} \in E_5^{2l+2}$ для p_l. Таким образом, каждая пара из $\tilde{x} \in E_5^{2m_1+2}$ для p_{m_1} требует одной переменной из $X_1(t_q)$ и одной из $X_2(t_q)$, то есть число пар не может быть больше, чем $\min(s_1(t_q), s_2(t_q)) \leqslant m_2$. Но нам требуется $m_1 > m_2$ пар. Полученное противоречие показывает, что классы C_{m_1} и C_{m_2} различны. $\square$

Итак, мы построили требуемое множество классов C_m, где $m \geqslant 1$. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, доказанная теорема говорит о том, что надструктура класса M_{H_5} является весьма сложной. Это делает очень трудной задачу ее полного описания и невозможным ее изображение в виде ЧУМ.

В работе [2] доказан критерий наличия бесконечной надструктуры у классов монотонных функций, сохраняющих ЧУМ T с единственным минимальным и двумя максимальными элементами: по сути, это наличие в T подмножества H_5. Теорема 2 остается справедливой для всех таких классов M_T с бесконечной надструктурой, при этом ее доказательство не меняется. С учетом изученных в [2] конечных надструктур классов M_T, получаем следующий основной результат:

Теорема 3. *Если ЧУМ T имеет один минимальный элемент и два максимальных, то либо класс M_T является предпредполным, либо существует бесконечное число различных классов, не являющихся предикатно-описуемыми и содержащих M_T.*

Поскольку класс монотонных функций не меняется при инвертировании порождающего его ЧУМ [5], то все доказанные результаты справедливы и для случая, когда ЧУМ имеет два минимальных элемента и единственный максимальный.

Отметим, что открытым остается вопрос о мощности бесконечной надструктуры классов M_T для описанных видов ЧУМ T.

Список литературы

1. Теория Галуа для алгебр Поста / В. Г. Боднарчук, В. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов // Кибернетика. – 1969. – № 3. – С. 1–10; № 5. – С. 1–9.
2. Ларионов В. Б. Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Б. Ларионов. – М., 2009. – 157 с.
3. Ларионов В. Б. О монотонных замкнутых классах функций многозначной логики с бесконечной надструктурой / В. Б. Ларионов // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям, 18–23 мая 2009 г. – М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2009. – С. 7–12.
4. Ларионов В. Б. О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов / В. Б. Ларионов // Дискрет. математика. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 111–116.
5. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках / В. В. Мартынюк // Проблемы кибернетики, вып. 3. – М. : Наука, 1960. – С. 49–61.
6. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций / С. С. Марченков. – М. : Физматлит, 2000. – 128 с.
7. Яблонский С. В. О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k / С. В. Яблонский // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 218, № 2. – С. 304–307.
8. Яблонский С. В. Предполные классы в многозначных логиках / С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, А. А. Набебин. – М. : Изд. дом МЭИ, 1997. – 144 с.
9. Янов Ю. И. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса / Ю. И. Янов, А. А. Мучник // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
10. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini / I. G. Rosenberg // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. – 1965. – Vol. 260. – P. 3817–3819.

V. B. Larionov, V. S. Fedorova

On the structure complexity of closed classes containing some specific classes of monotone k-valued functions

Abstract. We consider closed classes of monotone functions in multivalued logic with respect to partially ordered sets that have a unique minimal element and two maximal elements or a unique maximal element and two minimal elements. We prove that any such class is either pre-precomplete or contained in an infinite number of closed classes, which have no predicate description.

Keywords: multivalued logic; monotone function; structure; predicate.

Ларионов Виталий Борисович, кандидат физико-математических наук, ООО «Атес Медика Софт» (vitalyblarionov@yandex.ru)

Федорова Валентина Сегеевна, кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, тел.: (495) 939-53-92 (fedorovavs@cs.msu.ru)

Larionov Vitaly, Ates Medica Soft (vitalyblarionov@yandex.ru)

Fedorova Valentina, Moscow State University, faculty of computational mathematics and cybernetics, 119899, Moscow, Vorobyevy Gory, Moscow state university, faculty of computational mathematics and cybernetics, Phone: (495) 939-53-92 (fedorovavs@cs.msu.ru)