Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 1. С. 48—56

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
*Иркутского государственного университета*

УДК 517.11

# Представление моделей конечными деревьями

Ю. Д. Корольков
*Иркутский государственный университет*

**Аннотация.** В статье разработан аппарат конечных формульных деревьев для алгебро-логических моделей, который представляет их элементарную эквивалентность и разрешимость.

**Ключевые слова:** теории первого порядка; модели; элементарная эквивалентность; разрешимость.

В математическом моделировании заметные успехи связаны в первую очередь с непрерывными моделями, но в последние десятилетия, особенно в связи с развитием вычислительной техники, все больше внимания уделяется дискретным моделям. Возникла потребность в развитии методов построения и исследования дискретных моделей и их преобразований с учетом возможной их автоматизации. Наибольшее внимание уделяется алгебро-логическим моделям и моделям управляющих систем.

Выделим два типа дискретных моделей.

Первый основан на понятии истинности и связан с алгеброй и математической логикой. Такой подход возможен, когда удается выразить интересующие нас свойства в виде предложений формального языка, например, узкого исчисления предикатов. Тогда моделью данного множества предложений является алгебраическая система, на которой истинны все эти предложения. Для этих моделей интересны вопросы изоморфизма, элементарной эквивалентности, разрешимости моделей, описания подсистем. Они возникают также в задачах выбора и распознавания образов.

Второй тип дискретных моделей основан на понятии правильности. В этом направлении развивается не только теория логического вывода и прикладная логика, но и заметная часть теоретического программирования. Здесь главную роль играют вопросы построения и исследования систем эквивалентных преобразований для характеризации основных понятий модели. На таких моделях решаются задачи построения и автоматизации систем символьных преобразований термов, различных классов формул, операторных термов. Ставятся также алгоритмические вопросы.

## 1. Методика определения истинности формул на конечных деревьях

Под алгебраической моделью как обычно мы будем понимать алгебраическую систему — множество элементов с заданными на нем операциями и отношениями, и обозначать как $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$, где $A$ — множество, а $\sigma$ — сигнатура. В нашем случае без ограничения общности можно считать, что сигнатура конечна и содержит лишь предикатные символы. Класс формул ограничивается формулами узкого исчисления предикатов над сигнатурой $\sigma$ (с равенством).

Теорией первого порядка $Th(\mathfrak{A})$ алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$ называется множество всех замкнутых формул узкого исчисления предикатов сигнатуры $\sigma$, истинных на $\mathfrak{A}$. Для таких теорий представляют интерес вопросы разрешимости и равенства.

Здесь предлагается переложение идей известного метода конечных частичных изоморфизмов Ю. Л. Ершова [1], использованного им для получения критерия элементарной эквивалентности моделей, на язык конечных деревьев для определения истинности формул (см. также [2–4]).

Частичным изоморфизмом из модели $\mathfrak{A}$ сигнатуры $\sigma$ в модель $\mathfrak{B}$ сигнатуры $\sigma$ назовем всякое изоморфное отображение $\varphi$ подмодели $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}$ — конечная модель, то $\varphi$ назовем конечным частичным изоморфизмом. Через $\delta\varphi$ (область определения $\varphi$) будем обозначать основное множество $C$ модели $\mathfrak{C}$, а через $\rho\varphi$ (область значения $\varphi$) — множество $\varphi(C)$.

**Предложение** ([1]). *Две модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры $\sigma$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1} \supseteq \ldots$ непустых множеств (конечных) частичных изоморфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, что для любого $n \in \omega$, любого $\varphi \in S_{n+1}$ и любых $a \in A$ и $b \in B$ существуют $\gamma, \lambda \in S_n$ такие, что $\varphi \subseteq \gamma, \lambda$ и $a \in \delta\gamma$, $b \in \rho\lambda$.*

Путем некоторой факторизации этих множеств частичных изоморфизмов с продолжениями из множеств $S_n$ получим конечные деревья для определения истинности формул. Наряду с подходом Ю. Л. Ершова [1] или А. Т. Нуртазина [5], точно так же получаются критерии элементарной эквивалентности и разрешимости, поскольку наши преобразования основываются в конечном итоге на разработанном А. Д. Таймановым [6] методе перекидки.

Пусть для каждого $n \in \omega$ последовательность $\varphi_0, \dots, \varphi_{s(n)}$ состоит из всех атомных формул (то есть бескванторных и содержащих не более одного предикатного символа) сигнатуры $\sigma$ от переменных $x_1, \dots, x_n$. Ясно, что функция $s(n) = s(n, \sigma)$ рекурсивна. Введем формулы

$$A^n_m(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \&_{i=0}^{s(n)} \varphi_i^{m(i)},$$

где $\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^0 = \neg\varphi$, $m \in 2^{s(n)}$.

Если $a_1, \dots, a_n$ — элементы $A$, то истинна в точности одна из формул $A^n_m(a_1, \dots, a_n)$, $0 \leq m \leq 2^{s(n)}$.

Построим индуктивно систему вложенных помеченных деревьев $T_n = T_n(\mathfrak{A})$. Элементами деревьев являются элементы $A$, ребра помечены формулами $A^l_m$, $1 \leq l \leq n$. Общий фиктивный корень, лежащий на уровне 0, обозначим $\varnothing$, $T_0 \Leftrightarrow \{\varnothing\}$.

Пусть построено $T_{n-1}$. С каждой вершиной $a_{n-1,j}$ уровня $(n-1)$ — последнего в $T_{n-1}$ — свяжем ребрами свой комплект вершин $\{a_{ni}\}$, представляющий все элементы $A$ по одному. Будем называть такой комплект подуровнем. Если $b_n$ — элемент этого нового подуровня $n$ и $\varnothing, b_1, \dots, b_n$ — корневая ветвь, то ребро, входящее в $b_n$, помечаем той единственной формулой $A^n_m$, что $\mathfrak{A} \models A^n_m(b_1, \dots, b_n)$.

Если ввести для деревьев функцию $f(x) =$ "отец $x$", $f(\varnothing) = \varnothing$, то подуровень элемента $b$ есть $f^{-1}(b)$.

Под изоморфизмом помеченных деревьев будем понимать изоморфизм деревьев при одинаковых метках на соответствующих ребрах. Для изоморфизма главных поддеревьев $T_n$ потребуем дополнительно следующие условия: их корни должны принадлежать одному подуровню $(f(x) = f(y))$, а ребра, ведущие в эти корни, — одинаково помечены.

Пусть дерево $P_n$ получено из $T_n$ следующей процедурой. Сначала из каждого класса изоморфных главных поддеревьев с корнями на последнем уровне (эти деревья — элементы подуровня последнего уровня, но с учетом входящих в них ребер) оставляем по одному. Полученное дерево обозначим $T^n_n$. Затем из каждого класса изоморфных главных поддеревьев с корнями на уровне $(n-1)$ оставляем по одному и получаем $T^{n-1}_n$ и т.д. Дерево $P_n = T^1_n$.

Ясно, что из-за произвола выбора представителей деревьев $P_n$ может быть бесконечно много, но все они изоморфны как помеченные деревья. Кроме того, все $P_n$ конечны и их размеры мажорируются подходящей рекурсивной функцией $p(n) = p(n, \sigma)$. Но вовсе не всякое помеченное дерево, изоморфное $P_n$, будет таковым, даже если все формулы-метки $A^j_i$ на ребрах будут истинными на элементах дерева. Будем также называть деревья $P_n$ деревьями типа $P_n$.

Через $K_n$ обозначим дерево, полученное из $P_n$ заменой конкретных элементов $A$ в вершинах и формулах $A^l_m$ символами различных переменных. Деревья $K_n$ используются вместо $P_n$ в случаях, когда нежелательно расширение сигнатуры $\sigma$ именами элементов $A$.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы одной сигнатуры.

**Предложение 1.** $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$ *(или $\mathfrak{A}$ элементарно эквивалентна $\mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ помеченные деревъя $K_n(\mathfrak{A})$ и $K_n(\mathfrak{B})$ изоморфны.*

**Предложение 2.** $Th(\mathfrak{A})$ *разрешима тогда и только тогда, когда существует эффективная процедура построения по $n \in \omega$ дерева $K_n(\mathfrak{A})$.*

Перейдем к доказательству предложений 1 и 2.

По каждой формуле можно эффективно построить эквивалентную ей формулу в пренексной приведенной нормальной форме

$$\psi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

где бескванторная $\varphi$ есть дизъюнкция некоторых $A^n_m(x_1, \dots, x_n)$. Поэтому будем считать, что формулы из $Th(\mathfrak{A})$ имеют такой вид.

Введем понятие истинности замкнутой формулы $\psi$ на помеченном дереве. Область действия квантора $Q_1$ — первый уровень дерева (подуровень корня $f^{-1}(\varnothing)$). Если зафиксирован элемент $b_1$ первого подуровня, то область действия второго квантора $Q_2$ — $f^{-1}(b_1)$, подуровень второго уровня, чьи элементы соединены ребрами с $b_1$ и т.д. Например, $\exists$-формула истинна на дереве, если среди концевых формул дерева найдется такая $A^n_m$, что содержится в $\varphi$ в качестве дизъюнкта. Или формула $\forall x \exists y (A^2_1 \vee A^2_2)$ истинна на дереве $K_2$, если из каждого элемента первого уровня выходит ребро с меткой $A^2_1$ или $A^2_2$.

Очевидно, что истинность формулы $\psi$ на $\mathfrak{A}$ равносильна истинности $\psi$ на $T_n$. Перекидкой тривиально доказывается равносильность истинности $\psi$ на $T_n$ и $P_n$, поскольку при построении $P_n$ отбрасывались поддеревья, изоморфные одному из оставшихся. Так что доказана достаточность предложений 1 и 2.

Доказательство необходимости этих предложений следует из формульности деревьев $K_n$. Более точно, каждому помеченному дереву, имеющему $n$ уровней, формулы на ребрах вида $A^i_m$ и не содержащему изоморфных поддеревьев (таких деревьев конечное число и их можно перебрать эффективно), однозначно сопоставляется замкнутая форма сигнатуры $\sigma$ такая, что она истинна на $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда соответствующее дерево есть $K_n(\mathfrak{A})$.

Опишем построение формулы $\Phi$, утверждающей, что данное дерево есть $K_n$. Пусть элементы дерева обозначены $x_1, \dots, x_l$. Внешняя кванторная приставка имеет вид $\exists x_1 \dots x_l$. Первым конъюнктивным членом является конъюнкция всех формул $A^j_i$, стоящих на всех ребрах дерева. Эта часть формулы утверждает правильность главных поддеревьев с вершинами на уровне $n$, то есть элементов последнего уровня. Поддерево с вершиной на уровне $s$ назовем правильным, если все его поддеревья правильны и оно содержит все возможные для него правильные поддеревья (с точностью до изоморфизма, конечно). Это определение повторяет построение дерева $P_n$, поэтому правильные деревья и есть $P_n$.

Следующие конъюнктивные члены формулы $\Phi$ будут утверждать правильность деревьев с вершинами на уровне $(n-1)$. Пусть $x, \ldots$ — есть все элементы уровня $(n-1)$. Для каждого из них напишем свою формулу, утверждающую его правильность. Пусть из $x$ выходят ребра со следующими формулами на ребрах: $A_1^n(\ldots, x, z_1), \ldots, A_v^n(\ldots, x, z_v)$, где $z_1, \ldots z_v$ — все элементы $f^{-1}(x)$, а за многоточием скрываются справа налево $f(x)$, $f(f(x))$ и т.д. Тогда утверждение о правильности $x$ будет иметь вид:

$$\forall y \left( A_1^n(\ldots, x, y) \vee \ldots \vee A_v^n(\ldots, x, y) \right).$$

Более точно, утверждение о правильности состоит из двух частей: правильность поддеревьев и полнота относительно правильных поддеревьев. Последняя формула утверждает полноту поддерева с вершиной $x$ на уровне $(n-1)$, а правильность его поддеревьев (элементов уровня $n$) была записана ранее.

Теперь в готовой части формулы $\Phi$ утверждается правильность поддеревьев с вершинами на уровне $(n-1)$, так что следующим шагом будет записать полноту относительно этих поддеревьев. Она будет уже $\forall\exists$-формулой: надо написать, что любое другое поддерево, кроме уже имеющихся, неправильно. А мы уже записали правильность для этого уровня $\exists\forall$-формулой. Поэтому можно сказать про дальнейшее построение формулы $\Phi$ "и так далее".

В заключение доказательства предложений 1 и 2 отметим, что формула для $P_n$ отличается от $\Phi$ для $K_n$ лишь отсутствием внешних кванторов существования. Еще нужно вместо символов переменных из $K_n$ подставить имена элементов системы $\mathfrak{A}$, составляющих дерево $P_n$ с учетом изоморфизма этих деревьев.

**Определение 1.** *Подсистема $\mathfrak{A}$ системы $\mathfrak{B}$ называется элементарной подсистемой, если для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры $\sigma$ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ и для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{A}$ формула $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ истинна на $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она истинна на $\mathfrak{B}$.*

**Предложение 3.** *Если $\mathfrak{A}$ — подсистема $\mathfrak{B}$, то система $\mathfrak{A}$ является элементарной подсистемой системы $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда каждое дерево $P_n(\mathfrak{A})$ является деревом $P_n(\mathfrak{B})$.*

*Доказательство.* Из определения и из формульности деревьев $P_n$ сразу следует необходимость предложения 3. Докажем достаточность. Пусть в $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ имеется $k$ связанных переменных. Построим дерево $P_{n+k}(\mathfrak{A})$ так, чтобы одна из корневых ветвей имела вид $\varnothing, a_1, \ldots, a_n$. Тогда это дерево будет и деревом $P_{n+k}(\mathfrak{B})$ по условию предложения 3. Так как истинность формулы на системе равносильна истинности на деревьях $P$, то предложение 3 доказано. □

**Предложение 4.** *Любой изоморфизм $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ переводит дерево типа $P_n(\mathfrak{A})$ в дерево типа $P_n(\mathfrak{B})$.*

*Доказательство.* Изоморфизм $\alpha$ индуцирует изоморфизм деревьев $T_n$ и $\alpha T_n$, где дерево $\alpha T_n$ получено из $T_n$ заменой каждого вхождения элементов $a \in A$ на $\alpha A$. Более того, дерево $\alpha T_n$ есть дерево типа $T_n(\mathfrak{B})$. Поэтому можно проводить построение деревьев $P_n(\mathfrak{A})$ и $P_n(\mathfrak{B})$ параллельно для $T_n$ и $\alpha T_n$. В итоге мы получим деревья $P_n$ и $\alpha P_n$, изоморфные по построению. □

**Определение 2.** *Дерево $D$, полученное из $T_n(\mathfrak{A})$ процедурой удаления изоморфных поддеревьев, но оставляя при этом, быть может, из каждого класса изоморфных поддеревьев более одного, называется полным для $\mathfrak{A}$. Полное дерево может быть получено из $P_n$-дерева добавлением правильных поддеревьев.*

Эквивалентность истинности формул на $\mathfrak{A}$ и на полном дереве доказывается аналогично $P_n$-деревьям. Очевидно, что $P_n$-дерево является полным и что из конечного полного дерева эффективно извлекается $P_n$-дерево.

**Предложение 5.** *Если $\mathfrak{A}$ — подсистема $\mathfrak{B}$, то всякое $P_n$-дерево из $\mathfrak{A}$ можно пополнить до $P_n$-дерева в $\mathfrak{B}$.*

*Доказательство.* Пусть $L$ — $P_n$-дерево из $\mathfrak{A}$. Погружая его в $\mathfrak{B}$, заметим, что все формулы на его ветвях остались истинными. Поэтому в нем не появились изоморфные поддеревья. Так что его можно пополнить новыми элементами $\mathfrak{B}$. □

**Предложение 6.** *Для любого эпиморфизма $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и любого $n$ существуют такие конечные полные деревья $L_n(\mathfrak{A})$ и $M_n(\mathfrak{B})$, что $\alpha L_n(\mathfrak{A}) = M_n(\mathfrak{B})$.*

*Доказательство.* Возьмем $\alpha T_n(\mathfrak{A})$ в качестве $T_n(\mathfrak{B})$ для построения $P_n$-дерева. На первом шаге удаления изоморфных поддеревьев в $\alpha T_n(\mathfrak{A})$ будем следить, чтобы в прообразе $T_n(\mathfrak{A})$ оставляемых элементов было достаточно для получения полного дерева. Выберем, например, в $T_n(\mathfrak{A})$ и $\alpha T_n(\mathfrak{A})$ необходимые элементы на последнем уровне и добавим в $\alpha T_n^n(\mathfrak{U})$ образы выделенных элементов из $T_n^n(\mathfrak{U})$, а в $T_n^n(\mathfrak{U})$ добавим по одному из прообразов выделенных элементов из $\alpha T_n^n(\mathfrak{U})$. Число выделенных элементов на первом шаге по сравнению с процедурой построения $P_n$-деревьев не более чем удвоится. Далее идем по индукции, не забывая о том, что тип изоморфизма поддерева очередного уровня определяется не всеми поддеревьями, а только неизоморфными поддеревьями. Поэтому количество типов изоморфизма будет оставаться всегда конечным и мы получим в итоге конечные полные деревья $\alpha L_n(\mathfrak{U}) = M_n(\mathfrak{B})$. □

**Определение 3.** *Произведением двух конечных деревьев равных уровней назовем дерево той же глубины, состоящее из пар элементов исходных деревьев, полученных по следующему правилу. Корень есть пара корней. Если элемент $(a, b)$ уже построен, то его сыновья получаются объединением попарно сыновей $a$ из первого дерева с сыновьями $b$ из второго.*

**Предложение 7.** *Произведение $P_n$-деревьев систем $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ дает полное дерево прямого произведения $\mathfrak{U} \times \mathfrak{B}$.*

*Доказательство.* Расставим нужные формулы на ветвях $D$ произведения деревьев $L(\mathfrak{U})$ и $M(\mathfrak{B})$. Они определяются только элементами $D$ в $\mathfrak{U} \times \mathfrak{B}$. Предположим, на одном из нижних подуровней $D$ не хватает для полноты элемента $(a, b)$. Но если мы возьмем в соответствующих подуровнях $L(\mathfrak{U})$ и $M(\mathfrak{B})$ элементы $c$ и $d$, изоморфные $a$ и $b$ в $L(\mathfrak{U})$ и $M(\mathfrak{B})$ соответственно, то пара $(c, d)$ изоморфна паре $(a, b)$ в $\mathfrak{U} \times \mathfrak{B}$, противоречие. Таким образом, нижние подуровни в $D$ полны. Далее идем по индукции с учетом замечаний о конечности из предыдущего доказательства. □

**Следствие 1.** *([2]). Прямое произведение разрешимых моделей разрешимо.*

## 2. Частичные изоморфизмы на линейных порядках

Рассмотрим отдельно случай, когда изучается не вся теория $Th(\mathfrak{U})$, а ее ограничение замкнутыми формулами без кванторов всеобщности ($\exists$-теория модели $\mathfrak{U}$). Как и выше, можно считать, что $\exists$-формула имеет вид $\exists xy \ldots (A_m^n \vee A_k^n \ldots)$, то есть ее бескванторная часть есть дизъюнкция конъюнкций атомных формул. Но формула такого вида эквивалентна дизъюнкции

$$(\exists xy \ldots A_m^n) \vee (\exists xy \ldots A_k^n) \vee \ldots.$$

Поэтому проверка истинности произвольной $\exists$-формулы сводится к проверке истинности формул вида $\exists xy \dots A_m^n$.

**Определение 4.** *Назовем $n$-универсальным словом модели $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$ такой кортеж $a_1, a_2, \dots, a_k$ элементов из $A$, что в него изоморфно вкладывается любая последовательность из $n$ элементов множества $A$.*

Очевидно, что универсальные слова всегда существуют и что разрешимость $\exists$-теории модели $\mathfrak{A}$ эквивалентна существованию алгоритма, дающего по каждому $n \in \omega$ некоторое $n$-универсальное слово. В то же время наименьшая длина $n$-универсальных слов как функция от $n$ может служить определением сложности разрешимой $\exists$-теории.

Теперь предлагается следующая постановка задачи. Имеется два конечных линейно упорядоченных множества $a_1 < \dots < a_k$ и $b_1 < \dots < b_m$, элементы которых помечены буквами (по одной) некоторого алфавита $S$. Требуется найти максимальный частичный изоморфизм $\varphi$ этих помеченных линейных порядков ($a$ и $\varphi a$ помечены одной буквой из $S$). Эта задача естественно связана с предыдущими построениями. Кроме того, она напоминает задачу о домах и колодцах из области плоских графов и задачу восстановления стертой информации. Ее можно отнести к задачам распознавания образов.

Непонятно сразу, как можно обобщить эту задачу на случай произвольного числа линейных порядков. Но и обобщение, и решение получаются довольно легко, если воспользоваться понятием универсального слова. Переформулируем задачу так.

Даны помеченные линейные порядки. Требуется найти минимальное универсальное слово, то есть такой помеченный линейный порядок $P$ минимальной мощности, в который данные помеченные порядки изоморфно вкладываются.

Если отождествлять помеченные линейные порядки со словами в алфавите $S$, составленными из меток на элементах, то можно получить уравнения в свободной полугруппе со свободными образующими из $S$ для поиска $P$:

$$P = x_0 a_1 x_1 \dots a_k x_k = y_0 b_1 y_1 \dots b_m y_m = \dots,$$

причем оказывается, что решения этой системы всегда существуют и минимальным решениям соответствуют минимальные универсальные слова.

## Список литературы

1. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели / Ю. Л. Ершов. – М. : Наука, 1980. – 416 с.

2. Ершов Ю. Л. Язык $\Sigma$-выражений / Ю. Л. Ершов // Вычисл. системы. – Новосибирск, 1986. – Вып. 114 – С. 3–10.
3. Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость / Ю. Л. Ершов. – Новосибирск : Науч. кн., 1996. – 286 с.
4. Корольков Ю. Д. Теории первого порядка отдельных алгебраических систем / Ю. Д. Корольков // Третья сибирская школа по алгебре и анализу : сб.тр. – Иркутск, 1990. – С. 21–25.
5. Нуртазин А. Т. Об элиминации кванторов / А. Т. Нуртазин // Девятая всерос. конф. по мат. логике. – Л., 1988. – С. 119.
6. Тайманов А. Д. Характеристики аксиоматизируемых классов моделей / А. Д. Тайманов // Алгебра и логика. – 1962. – Т. 1, № 4. – С. 5–32.

---

**Yu. D. Korolkov**
**Representing the models by the finite trees**

**Abstract**. In the article the apparatus of the finite formula trees for algebra-logical models is designed. The apparatus represents the elementary equivalency and decidability of the models.

**Keywords:** first order theories; models; elementary equivalency; decidability

Корольков Юрий Дмитриевич, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)521298
(korol@math.isu.ru)

Yuri Korolkov, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)521298 (korol@math.isu.ru)