Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 1. С. 80—95

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.968

О разрешимости уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами в классе обобщенных функций *

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет

Аннотация. Получены достаточные условия существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывным ядром в классе обобщенных функций с точечным носителем. Построено асимптотическое приближение параметрического семейства обобщенных решений и предложен способ уточнения его регулярной части последовательными приближениями.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра I рода; разрывное ядро; обобщенное решение; асимптотика; последовательные приближения.

70-летию профессора А. С. Апарцина
посвящается

1. Введение

Введем в плоскости s, t треугольную область $D = \{s, t; 0 < s < t < T\}$ и зададим непрерывные функции $s = \alpha_i(t), i = \overline{1, n}$, имеющие непрерывные производные при $t \in (0, T)$. Предполагается, что $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \cdots < \alpha_{n-1}(t) < t$ при $t \in (0, T)$, $0 < \alpha_1'(0) < \cdots < \alpha_{n-1}'(0) < 1$, причем кривые $s = \alpha_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, где $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, разбивают область D на непересекающиеся секторы $D_1 = \{s, t : 0 \leq s < \alpha_1(t)\}$, $D_i = \{s, t : \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{2, n}\}$, $\overline{D} = \bigcup\limits_1^n D_i$. Введем непрерывные

* Работа частично поддержана РФФИ, проекты № 12-01-00722, 11-08-00109, при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» Минобрнауки П696 от 30.05.2010, а также при поддержке гранта Минобрнауки, номер госрегистрации НИР: 01200804682.

функции $K_i(t,s)$, определенные и дифференцируемые по t при $t,s \in D_i$, $i=\overline{1,n}$.

Введем интегральный оператор

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s)x(s)ds \tag{1}$$

с кусочно-непрерывным ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & t,s \in D_1, \\ \dots & \dots\dots \\ K_n(t,s), & t,s \in D_n. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t,s)u(s)\,ds = f(t),\ 0 < t < T \leq \infty, \tag{3}$$

где функция $f(t)$ имеет непрерывную производную при $t \in (0,T)$, $f(0) \neq 0$. Уравнение (3) назовем уравнением Вольтерра I рода с кусочно-непрерывным ядром. Требуется построить в классе обобщенных функций [3] решение уравнения (3). Отметим, что в силу условия $f(0) \neq 0$ уравнение (3) не имеет классических решений. Дифференцирование уравнения (3) приводит к интегро-функциональным уравнениям и его решение в общем случае не единственно [15]. Поэтому построение решений уравнения (3) в общем случае не может быть проведено только классическими методами теории вольтерровых уравнений [1,6,15,14]. В данной работе, продолжающей цикл работ [8,9,11,17,19] по уравнениям Вольтерра, уравнение (3) рассматривается с использованием элементарных результатов интегральных, разностных уравнений, функционального анализа, распределений Соболева-Шварца и теории уравнений с функционально возмущенным аргументом нейтрального типа [7]. Статья организована следующим оборазом. В п. 2 вычисляется сингулярная компонента решения и строится интегро-функциональное уравнение для определения регулярной компоненты. В п. 3 получены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения уравнения (3) вида $u(t) = a\delta(t) + x(t)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака, $x(t)$ — регулярная непрерывная функция. Такие решения, удовлетворяющие уравнению (3) в смысле теории распределений Соболева – Шварца [3], при исследовании уравнений (3) ранее не расматривались. В п. 3 искомая регулярная часть $x(t)$ единственного обобщенного уравнения (3) строится сочетанием известного в теории функциональных уравнений «метода шагов» [13] с методом последовательных приближений.

В п. 4 и 5 рассмотрен теоретически наиболее интересный случай, когда уравнение (3) имеет семейство обобщенных решений, зависящих от свободных параметров. Предложен метод построения асимтотических приближений параметрических решений и способ их уточнения последовательными приближениями. Важную роль при этом играет известный метод А. О. Гельфонда (см. [4, с. 338]) решения разностных уравнений.

2. Определение регулярной компоненты решения

Продолжив $f(t)$ на отрицательную полуось нулем и продифференцировав уравнение (3), получим эквивалентное функционально-интегральное уравнение

$$F(u) \stackrel{\text{def}}{=} K_n(t,t)u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)\Big\{K_i(t,\alpha_i(t)) - \tag{4}$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\Big\}u(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)u(s)\,ds = f^{(1)}(t) + f(0)\delta(t),$$

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n(t) = t$. Далее везде будем предполагать, что $K_1(0,0) \neq 0$, $K_n(t,t) \neq 0$, при $t \in [0,T]$. Введем функциональный оператор

$$Au \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} K_n^{-1}(t,t)\alpha_i'(t)\{K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}u(\alpha_i(t))$$

и интегральный оператор $Ku \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,t)K_i^{(1)}(t,s)u(s)ds.$

С учетом этих обозначений уравнение (4) приводится к виду

$$u(t) + Au + Ku = K_n^{-1}(t,t)f^{(1)}(t) + K_n^{-1}(0,0)f(0)\delta(t). \tag{5}$$

Будем искать решение вида $u(t) = a\delta(t) + x(t)$, где $a-\text{const}$, $x(t) \in \mathrm{C}_{(0,T)}$. Легко проверить справедливость тождеств:

$$\int\limits_0^{\alpha_1(t)} \frac{\partial K_1(t,s)}{\partial t}\delta(s)ds = \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t},$$

$$\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \frac{\partial K_i(t,s)}{\partial t}\delta(s)ds = 0$$

при $i = \overline{2,n}$. Действительно, первое тождество выполняется, т.к. $\alpha_1(t) > 0$, $\frac{\partial K_1(t,s)}{\partial t}\delta(s) = \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\delta(s)$, $\int\limits_0^{\alpha_1(t)} \delta(s)ds = \theta(\alpha_i(t)) = 1$ при $t > 0$, где θ — функция Хевисайда. Второе тождество тоже становится очевидным, если учесть, что при $i = \overline{2,n}$, $supp\,\delta(s) \cap D_i = 0$, $\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \delta(s)ds = \theta(\alpha_i(t)) - \theta(\alpha_{i-1}(t)) = 0$, т.к. $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \cdots < \alpha_n(t) = t$. Напомним еще тождество $\delta(\alpha_i(t)) = \frac{\delta(t)}{|\alpha_i'(0)|}$ (см., например, [3], стр. 34). В силу отмеченных тождеств замена $u = a\delta(t) + x(t)$ приводит уравнение (5) к виду $K_n^{-1}(0,0)K_1(0,0)a\delta(t) + K_n^{-1}(t,t)\frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}a + x(t) + Ax + Kx = K_n^{-1}(t,t)f^{(1)}(t) + K_n^{-1}(0,0)f(0)\delta(t)$. Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при $\delta(t)$, получим $a = \frac{f(0)}{K_1(0,0)}$. Регулярную часть остается определить из уравнения

$$x(t) + Ax + Kx = \overline{f}(x), \tag{6}$$

где $\overline{f}(t) = K_n^{-1}(t,t)\Big\{f^{(1)}(t) - \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\frac{f(0)}{K_1(0,0)}\Big\}$. Отметим, что в силу операторного тождества

$$K_n(t,t)(I + A + K)x = F(x)$$

уравнение (6) можно переписать в виде

$$F(x) = f'(t) - \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\frac{f(0)}{K_1(0,0)}. \tag{7}$$

3. Достаточные условия существования единственного обобщенного решения уравнения (3)

Так как $K_1(0,0) \neq 0$, то однородное уравнение (4) имеет только тривиальное решение среди сингулярных функций

$$u_{sing} \overset{\text{def}}{=} \sum_0^m c_i\delta^{(i)}(t)$$

с точечным носителем в нуле. Поэтому существование и единственность обобщенного решения уравнения (4) вида

$$u(t) = u_{sing} + x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T)}$ эквивалентно доказательству существование единственного решения в классе $\mathbb{C}_{(0,T)}$ уравнения (6). Введем функцию

$$A(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(1)}(t)K_n^{-1}(t,t)\Big\{K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\Big\}. \tag{$*$}$$

Пусть выполнены условия

(A) $|A(0)| < 1, \sup\limits_{0<s<t<T} |K_n^{-1}(t,t)K(t,s)| \leq c < \infty.$

Условие (A) выполняется, если производные $\alpha_i^{(1)}(0)$ достаточно малы. Здесь и далее ядро $K(t,s)$ в области $\bigcup\limits_1^n D_i$ определено формулой (2). Его производная по t в обычном смысле при $t,s \in \bigcup\limits_1^n D_i$ определяется формулой

$$K^{(1)}(t,s) = \begin{cases} K_1^{(1)}(t,s), & t,s \in D_1, \\ \dots & \dots\dots \\ K_n^{(1)}(t,s), & t,s \in D_n. \end{cases}$$

Теорема 1. *(Достаточные условия существования и единственности обобщенного решения). Пусть выполнены условия (A), все ядра $K_i(t,s)$ в представлении (2) непрерывны, а по t имеют и непрерывные производные, функция $f(t)$ имеет непрерывную производную, $f(0) \neq 0$. Пусть $K_1(0,0) \neq 0$. Тогда уравнение (3) имеет единственное обобщенное решение*

$$u(t) = \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\delta(t) + x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T)}$ При этом $x(t)$ можно найти методом шагов, сочетая его с методом последовательных приближений.

Доказательство.

Так как сингулярная часть решения уже определена, то рассмотрим уравнение (6), которому удовлетворяет регулярная составляющая $x(t)$.

Зафиксировав $q < 1$ выберем $h_1 > 0$ так, чтобы $\sup\limits_{0 \leq t \leq h_1} |A(t)| = q < 1$. В силу условия (A) такое $h_1 > 0$ найдется. Положим $0 < h < \min\{h_1, \frac{1-q}{c}\}$, где постоянная c определена в условии (A). Разобьем интервал $[0,T]$ на промежутки

$$[0,h],\ [h, h+\varepsilon h],\ [h+\varepsilon h, h+2\varepsilon h], \dots. \tag{8}$$

Обозначим через $x_0(t)$ сужение искомого решения $x(t)$ на интервал $[0,h]$, а через $x_m(t)$ — его сужения на интервалы

$$I_m = [(1+(m-1)\varepsilon)h, (1+m\varepsilon)h],\ m = 1,2,\dots.$$

Выберем ε из промежутка $(0,1]$ так, чтобы при $t \in I_m$ «возмущенные» аргументы $\alpha_i(t) \in \bigcup\limits_{k=1}^{m-1} I_k$, $i = \overline{1, n-1}$. Если $0 < \alpha_i^{(1)}(t) < \frac{1}{1+\varepsilon}$

при $t \in [0,T)$, $i = \overline{1, n-1}$, то указанное выше включение выполняется на промежутке $[0,T)$. Это включение дает возможность при построении решения $x(t)$ применить известный в теории функционально-дифференциальных уравнений метод шагов (см., например, [13], стр. 199).

Для вычисления элемента $x_0(t) \in \mathbb{C}_{[0,h]}$ построим последовательность $\{x_0^n(t)\}$:

$$x_0^n(t) = -Ax_0^{n-1} - Kx_0^{n-1} + \overline{f}(t),$$

$$x_0^0(t) = \overline{f}(t),\, t \in [0,h].$$

В силу выбора h имеем оценку $||A+K||_{\mathcal{L}(\mathbb{C}_{(0,h)} \to \mathbb{C}_{(0,h)})} < 1$.

Поэтому при $t \in [0,h]$ существует единственное решение $x_0(t)$ уравнения (6). Последовательность $x_0^n(t)$ равномерно сходится к нему. Продолжим процесс построения искомого решения при $t \geq h$, т.е. на промежутках I_n, $n = 1, 2, \ldots$. Для определенности пусть далее в (8) $\varepsilon = 1$.

Вычислив элемент $x_0(t) \in \mathbb{C}_{[0,h]}$ будем искать элемент $x_1(t)$ в пространстве $\mathbb{C}_{(h,2h)}$ непрерывных вектор-функций. Найдем $x_1(t)$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int_h^t K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x(s)\,ds = \overline{f}(t) - Ax_0 - \int_0^h K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x_0(s)\,ds$$

последовательными приближениями. При этом $x_0(h) = x_1(h)$.

Введем непрерывную функцию

$$\overline{x}_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 \leq t \leq h, \\ x_1(t), & h \leq t \leq 2h, \end{cases} \tag{9}$$

являющуюся сужением искомого непрерывного решения $x(t)$ на интервал $[0,2h]$. Тогда элемент $x_2(t) \in \mathbb{C}_{(2h,3h)}$ можно будет вычислить последовательными приближениями из интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$x(t) + \int_{2h}^t K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x(s)\,ds =$$

$$= \overline{f}(t) - A\overline{x}_1 - \int_0^{2h} K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)\overline{x}_1(s)\,ds.$$

Продолжая этот процесс, за N шагов ($N \geq \frac{T}{h}$) построим искомое решение $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T)}$ уравнения (3).

4. Построение асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ регулярной части параметрических семейств обобщенного решения уравнения (3)

Рассмотрим уравнение (7), которому удовлетворяет регулярная часть обобщенного решения. Пусть выполнено условие

(B) Существуют полиномы $\mathcal{P}_i = \sum\limits_{\nu+\mu=1}^{N} K_{i\nu\mu} t^\nu s^\mu$, $i = \overline{1,n}$, $f^N(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} f_\nu t^\nu$, $\alpha_i^N(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \alpha_{i\nu} t^\nu, i = \overline{1, n-1}$, где $0 < \alpha_{11} < \alpha_{21} < \dots < \alpha_{n-1,1} < 1$, такие, что при $t \to +0$, $s \to +0$ справедливы оценки $|K_i(t,s) - \mathcal{P}_i(t,s)| = \mathcal{O}((t+s)^{N+1})$, $i = \overline{1,n}$, $|f(t) - f^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1})$, $|\alpha_i(t) - \alpha_i^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1}), i = \overline{1, n-1}$.

Разложения по степеням t, s, представленные в условии (B), далее будем называть «полиномами Тейлора» соответствующих функций. Введем функцию

$$B(j) = K_n(0,0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

зависящую от целочисленного аргумента j, $j \in \mathbb{N} \cup 0$. Функцию $B(j)$, отвечающую главной «функциональной» части уравнения (7), назовем *характеристической функцией* уравнения (7). Рассмотрим построение асимптотического решения уравнения (7), то есть асимптотики регулярной части искомого решения.

В отличии от п. 3, в п. 4 и в п. 5 мы не предполагаем, что однородное уравнение, отвечающее (3), имеет только тривиальное решение. Поэтому теперь решение интегро-функционального уравнения (7) может быть не единственным. Следуя работе [16] будем искать асимптотическое приближение частного решения неоднородного уравнения (7) в виде полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=0}^{N} x_j (\ln t) t^j. \tag{10}$$

Покажем, что коэффициенты x_j в общем нерегулярном случае зависят от $\ln t$ и свободных параметров. Это согласуется с возможностью существования нетривиальных решений у однородного уравнения.

При вычислении коэффициентов x_j возможны регулярный и нерегулярный случаи.

Определение 1. *Число j^* — регулярная точка характеристической функции $B(j)$, если $B(j^*) \neq 0$ и нерегулярная точка в противном случае.*

4.1. Регулярый случай: характеристическая функция $B(j) \neq 0$ при $j \in (0, 1, \ldots, N)$, где N достаточно велико

В этом случае коэффициенты x_j будут постоянными, то есть не зависят от $\ln t$. Действительно, подставляя разложение (10) в уравнение (7), методом неопределенных коэффициентов с учетом условия (B), приходим к рекуррентной последовательности линейных алгебраических уравнений относительно x_j :

$$B(0)x_0 = f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\bigg|_{t=0}, \tag{11}$$

$$B(j)x_j = M_j(x_0, \ldots, x_{j-1}),\ j = 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Правая часть M_j выражается определенным образом через решения $x_0, \ldots, x_{j-1}$ предыдущих уравнений и коэффициенты «полиномов Тейлора» из условия (B).

Так как в регулярном случае $B(j) \neq 0$, то коэффициенты $x_0, \ldots, x_N$ определяются единственным образом и асимптотика (10) будет построена.

4.2. Нерегулярый случай: характеристическая функция $B(j)$ в массиве $(0, 1, \ldots, N)$ имеет нули

Покажем, что в нерегулярном случае коэффициенты x_j будут полиномами по степеням $\ln t$ и зависят от произвольных постоянных. Порядок полиномов и число произвольных постоянных связаны с кратностями целочисленных решений уравнения $B(j) = 0$.

Действительно, т.к. коэффициент x_0 в нерегулярном случае может зависеть от $\ln t$, то на основании метода неопределенных коэффициентов x_0 следует искать как решение разностного уравнения

$$K_n(0,0)x_0(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(0)(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_0(z + a_i) = \tag{13}$$

$$= f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \frac{K_1(t,0)}{\partial t}\bigg|_{t=0},$$

где $a_i = \ln \alpha'(0), z = \ln t$. Здесь возможны три случая:
Случай 1 ($B(0) \neq 0$).
В этом случае коэффициент x_0 от z не зависит и определится единственным образом из уравнения (11).
Случай 2 ($B(0) = 0$).
Пусть $j = 0$ — простой нуль функции $B(j)$, то есть $B(0) = 0$, $B'(0) \neq 0$.

Тогда коэффициент $x_0(z)$ будем искать из разностного уравнения (13) в виде линейной функции

$$x_0(z) = x_{01}z + x_{02}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получим для определения коэффициентов x_{01}, x_{02} два уравнения:

$$B(0)x_{01} = 0, \tag{15}$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)x_{01} = f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\bigg|_{t=0}, \tag{16}$$

где $B(0) = 0, B^{(1)}(0) \neq 0$. Поэтому коэффициент $x_0(z)$ линеен относительно z и зависит от произвольной постоянной. Итак, в случае 2

$$x_0(z) = \left(f^{(1)}(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \frac{\partial K_1(0,0)}{\partial t} \right) \frac{1}{B^{(1)}(0)} z + c,$$

где c — const.

Случай 3. Пусть $j = 0$ — корень уравнения $B(j) = 0$ кратности $k+1$, то есть $B(0) = B'(0) = \dots B^{(k)}(0) = 0$, $B^{(k+1)}(0) \neq 0$, $k \geq 1$. Решение $x_0(z)$ разностного уравнения (12) будем искать в виде полинома

$$x_0(z) = x_{01}z^{k+1} + x_{02}z^k + \dots + x_{0k+1}z + x_{0k+2}. \tag{17}$$

Подставляя полином (17) в уравнение (13), учитывая тождество

$$\frac{d^k}{dj^k} B(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

где $a_i = \ln \alpha_i'(0)$ и приравнивая коэффициенты при степенях

$$z^{k+1}, z^k, \dots, z, z^0$$

нулю, получим рекуррентную последовательность линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k+2}$:

$$\begin{cases} B(0)x_{01} = 0, \\ B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)\begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} x_{01} = 0, \\ B(0)x_{0l+1} + B^{(l)}(0)\begin{pmatrix} k+1 \\ k+1-l \end{pmatrix} x_{01} + B^{(l-1)}(0)\begin{pmatrix} k \\ k+1-l \end{pmatrix} x_{02} + \dots \\ \dots + B^{(1)}(0)\begin{pmatrix} k+1-l+1 \\ k+1-l \end{pmatrix} x_{ol} = 0,\ l = 1, \dots, k, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} B(0)x_{0k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} + B^{(k)}(0)x_{02} + \dots B^{(1)}(0)x_{0k+1} = \\ = f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\bigg|_{t=0}. \end{aligned} \tag{19}$$

В рассматриваемом случае $B(0) = B'(0) = \cdots = B^{(k)}(0) = 0$, $B^{(k+1)}(0) \neq 0$. Поэтому в полиноме (17) следует положить

$$x_{01} = \frac{1}{B^{(k+1)}(0)}\left(f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\frac{\partial K_1(0,0)}{\partial t}\right).$$

Уравнения системы (18) превращаются в тождества $B(0)x_{0j} = 0$, $j = \overline{1, k+1}$, т.к. $B(0) = 0$. Поэтому коэффициенты $x_{02}, \ldots, x_{0k+2}$ полинома (17) остаются произвольными постоянными.

Далее применяя метод неопределенных коэффициентов с учетом тождества

$$\int t^j \ln^k t\, dt = t^{j+1}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \frac{k(k-1)\ldots(k-(s-1))}{(j+1)^{s+1}} \ln^{k-s} t,$$

построим разностные уравнения для определения коэффициента $x_1(z)$ ($z = \ln t$) и последующих коэффициентов асимптотического приближения (10). Действительно,

$$L(x)\bigg|_{x=x_0(z)+x_1(z)t} \stackrel{\text{def}}{=} \bigg[K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i'(0))^2(K_i(0,0)- \qquad (20)$$

$$-K_{i+1}(0,0))x_1(z+a_i) + P_1(x_0(z))\bigg]t + r(t), \quad r(t) = o(t).$$

Здесь $P_1(x_0(z))$ — определенный полином от z, степень которого по доказанному равна кратности решения $j = 0$ уравнения $B(j) = 0$. Из соотношения (20) в силу оценки $r(t) = o(t)$ при $t \to 0$ следует, что коэффициент $x_1(z)$ должен удовлетворять разностному уравнению

$$K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha'(0))^2\big(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)\big)x_1(z+a_i)+ \qquad (21)$$

$$+P_1(x_0(z)) = 0.$$

Если $B(1) \neq 0$, то уравнение (21) имеет решение $x_1(z)$ в виде полинома того же порядка, что и кратность решения $j = 0$ уравнения $B(j) = 0$. Если $j = 1$ — тоже является решением уравнения $B(j) = 0$, то решение $x_1(z)$ строится в виде полинома степени $k_0 + k_1$, где k_0 и k_1 — кратности решений $j = 0$ и $j = 1$ уравнения $B(j) = 0$ соответственно. Коэффициент $x_1(z)$ будет зависеть от k_0+k_1 произвольных постоянных.

Введем условие

(C) Пусть уравнение $B(j) = 0$ в массиве $(0, 1, \ldots, N)$ имеет решения $j_1, \ldots, j_\nu$ кратностей k_i, $i = \overline{1, \nu}$.

Тогда аналогичным образом можно вычислить остальные коэффициенты $x_2(z), \dots, x_N(z)$ асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ решения уравнения (7) из последовательности разностных уравнений вида

$$K_n(0,0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'(0))^{1+j}\big(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)\big)x_j(z+a_i) +$$

$$+\mathcal{P}_j(x_0(z), \dots, x_{j-1}(z))) = 0,\ j = \overline{2,N}.$$

Из изложенного вытекает

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (B), (C). Тогда существует функция* $\hat{x}(t) = \sum\limits_{i=0}^{N} x_i(\ln t)t^i$, *такая, что при* $t \to +0$ *невязка решения уравнения (7) удовлетворяет оценке*

$$\left| F(\hat{x}(t)) - f^{(1)}(t) + K^{(1)}(t,0)\frac{f(0)}{K_1(0,0)} \right| = o(t^N).$$

При этом коэффициенты $x_i(\ln t)$ *являются полиномами от* $\ln t$ *возрастающих степеней, не превосходящих суммы кратностей* $\sum\limits_j k_j$ *решений уравнения* $B(j) = 0$ *из массива* $(0, 1, \dots, i)$. *Коэффициенты* $x_i(\ln t)$ *зависят от* $\sum_{j=0}^{i} k_j$ *произвольных постоянных.*

Замечание 1. Если $B(j) \neq 0$, то в сумме $\sum\limits_{j=0}^{i} k_j$ соответствующие k_j полагаем равными нулю.

5. Теорема существования непрерывных параметрических семейств обобщенных решений

Так как $0 < \alpha_i'(0) < 1$, $\alpha_i(0) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, то для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $T' \in (0, T]$ такое, что

$$\max_{i=\overline{1,n-1}, t\in[0,T']} |\alpha_i'(t)| \leq \varepsilon$$

и

$$\sup_{i=\overline{1,n-1}, t\in(0,T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon.$$

Введем условие

(D) Пусть функция $K_n(t,t) \neq 0$ при $t \in [0,T']$ и N^* выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{t\in(0,T')} \varepsilon^{N^*}|A(t)| \leq q < 1,$$

где функция $A(t)$ определена в п.3 формулой $(*)$.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (D). Пусть в классе $\mathbb{C}_{(0,T')}$ функций, непрерывных при $t \in (0,T']$ и имеющих предел (возможно бесконечный) при $t \to +0$ существует элемент $\hat{x}(t)$ такой, что при $t \to +0$ невязка решения уравнения (7) удовлетворяет оценке*

$$\left|F(\hat{x}(t)) - f'(t) + K_1'(t,0)\frac{f(0)}{K_1(0,0)}\right| = o(t^N),$$

причем $N \geq N^*$. Тогда уравнение (7) в классе $\mathbb{C}_{(0,T')}$ имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^N v(t), \tag{22}$$

где $v(t)$ определяется единственным образом последовательными приближениями.

Доказательство.
Подставляя (22) в уравнение (7) получим для определения функции $v(t)$ интегро-функциональное уравнение

$$v(t) + K_n(t,t)\Biggl\{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i'(t)\left(\frac{\alpha_i(t)}{t}\right)^{N^*}\Bigl(K_i(t,\alpha_i(t)) - \tag{23}$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\Bigr)v(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)\left(\frac{s}{t}\right)^{N^*} v(s)\,ds\Biggr\} =$$

$$= \left\{f'(t) - \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\frac{f(0)}{K_1(0,0)} - F(\hat{x}(t))\right\}(t^{N^*}K_n(t,t))^{-1}.$$

Введем линейные операторы

$$Mu \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i'(t)\left(\frac{\alpha_i(t)}{t}\right)^{N^*}\Bigl\{K_i(t,\alpha_i(t)) -$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\Bigr\}v(\alpha_i(t)),$$

$$Kv \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,t)K_i^{(1)}(t,s)(s/t)^{N^*}v(s)\,ds.$$

Тогда уравнение (23) перепишется в компактной форме

$$u + (M + K)u = \gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ — правая часть уравнения (23), являющаяся непрерывной функцией в силу условия леммы 2. Введем банахово пространство X непрерывных по t функций $v(t)$ с нормой

$$||v||_l = \max_{0 \le t \le T'} e^{-lt} |v(t)|, \; l > 0.$$

Тогда в силу неравенств $\sup\limits_{t \in (0, T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \le \varepsilon < 1$ и условия (D) при $\forall l \ge 0$ норма линейного функционального оператора M удовлетворяет оценке

$$||M||_{\mathcal{L}(X \to X)} \le q < 1.$$

Кроме того, для интегрального оператора K при достаточно большом l справедлива оценка

$$||K||_{\mathcal{L}(X \to X)} \le q_1 < 1 - q.$$

Следовательно, при достаточно большом $l > 0$

$$||M + K||_{\mathcal{L}(X \to X)} < 1,$$

т.е. линейный оператор $M + K$ является сжимающим в пространстве X. Поэтому последовательность $\{v_n\}$, где $v_n = -(M + K)v_{n-1} + \gamma(t)$, $v_0 = \gamma(t)$, сходится.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (B), (C) и (D),* $f(0) \neq 0$, $K_1(0,0) \neq 0$. *Тогда уравнение (3) при* $0 < t \le T' \le T$ *имеет решение*

$$x(t) = \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \delta(t) + \hat{x}(t) + t^{N^*} v(t),$$

зависящее от $\sum\limits_{i=1}^{\nu} k_i$ *произвольных постоянных, где числа* k_i *определяются в условии (C). Более того, функция* $\hat{x}$ *строится в виде логарифмо-степенной суммы (10), затем* $v(t)$ *вычисляется единственным образом последовательными приближениями и имеет место асимптотическая оценка* $\left| x(t) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \delta(t) - \hat{x}(t) \right| = \mathcal{O}(t^{N^*})$ *при* $t \to +0$.

Доказательство. На основании леммы 1 в силу условий теоремы возможно построение асимптотического приближения регулярной части $\hat{x}(t)$ искомого решения в виде логарифмо-степенного полинома

$$\sum_{i=0}^{N} x_i (\ln t) t^i.$$

При этом по построению коэффициенты $x_i(\ln t)$ будут зависеть от указанного числа произвольных постоянных. В силу леммы 2, применяя подстановку $x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*}u(t)$, непрерывную функцию $u(t)$ можно построить методом последовательных приближений. Теорема доказана.

Как и в теореме 1 построенное на интервале $[0, T']$ параметрическое семейство решений можно продолжить на весь интервал $[0, T]$, используя метод шагов [13, с.199].

В простых случаях, решая эквивалентное уравнение (4), решение интегрального уравнения (3) можно построить в замкнутом виде.

Пример 1.

$$\int\limits_0^{t/2} x(s)ds + 2\int\limits_{t/2}^{t} x(s)ds = 2 + t,\ t > 0.$$

Здесь эквивалентное уравнение (4) имеет вид $\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}) + 2x(t) = 2\delta(t) + 1$. Искомое решение имеет вид $x(t) = 2\delta(t) + 2/3$.

Пример 2.

$$\int\limits_0^{t/2} x(s)ds - \int\limits_{t/2}^{t} x(s)ds = 1 + t,\ t > 0.$$

Здесь эквивалентное уравнение (4) имеет вид $x(\frac{1}{2}) - x(t) = \delta(t) + 1$. Оно имеет c–параметрическое семейство обобщенных решений $x(t) = \delta(t) + c - \frac{\ln t}{\ln 2}$, c — const.

6. Заключение

Если в условиях теорем 1, 2 $f(0) = 0$, то уравнение (3) будет иметь непрерывное решение и придем к результатам работы [16].

Автор благодарит участников семинара (рук. А. С. Апарцин, ИСЭМ СО РАН) лаборатории неустойчивых задач вычислительной математики института систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН за обсуждение и поддержку тематики данной статьи.

Список литературы

1. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А. С. Апарцин. – Новосибирск : Наука, 1999.

2. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М : Наука, 1969.
3. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М : Наука, Физматлит, 1976.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : Физматлит, 1959.
5. Магницкий Н. А. Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерры первого рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. – 1983. – Т. 269, № 1. — С. 29–32.
6. Маркова Е. В. О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике / Е. В. Маркова, И. В. Сидлер, В. В. Труфанов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 20–28.
7. Сидоров Н. А. Нелинейные операторные уравнения с функционально возмущенным аргументом нейтрального типа / Н. А. Сидоров, А. В. Труфанов // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 12. – С. 1804–1808.
8. Сидоров Н. А. О малых решениях нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности точек ветвления / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 5. – С. 53–61.
9. Сидоров Н. А. Существование и построение обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерры первого рода / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Дифференц. Уравнения. – 2006. Т. 42, № 9. – С. 1243–1242.
10. Сидоров Н. А. О решении операторно-интегральных уравнений Вольтерры в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, А. В. Красник // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 40, № 6. – С. 874–882.
11. Сидоров Д. Н. Обобщенные решения в задаче моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра / Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 127–132.
12. Треногин В.А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М : Наука, 1993. – 439 с.
13. Эльсгольц Л. А. Качественные методы в математическом анализе / Л. А. Эльсгольц. – М : ГИТТЛ, 1955.
14. Яценко Ю. П. Интегральные модели систем с управляемой памятью / Ю. П. Яценко. – Киев : Наукова думка, 1991.
15. Denisov A. M. On a special Volterra integral equation of the first kind / A. M. Denisov, A. Lorenzi // Boll. Un. Mat. Ital. B. Vol. – 1995. – Vol. 7, N 9. – P. 443–457.
16. Sidorov D. Volterra Equations of the First kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control / D. Sidorov // Studia Informatica Universalis. – 2011. – Vol. 9, N 3. – P. 135–146.
17. Sidorov D. N. Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations / D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Banach J. Math. Anal. – 2012. – Vol. 6, N 1. – P. 1–10.
18. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Dordrecht–Boston–London : Kluwer Academic Publisher, 2002. – 568 p.
19. Sidorov D. On impulsive control of nonlinear dynamical systems based on the Volterra series / D. Sidorov // 10th IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering (EEEIC), 8-11 May 2011. Rome, Italy, 2011. – P. 1–6.

D. N. Sidorov

Solution to the Volterra equations of the 1st kind with discontinuous kernels in the class of generalized functions

Abstract. Sufficient conditions for existence and uniqueness of solutions of the equations of Volterra equation of the 1st kind with a piecewise continuous kernels in the class of generalized functions with point support are derived. An asymptotic approximation of a parametric family of generalized solutions is constructed. A method of the regular part of the solution's improvement employs the method of successive approximations.

Keywords: Volterra integral equations; discontinuous kernel; generalized solution; successive approximations.

Сидоров Денис Николаевич, с.н.с., кандидат физико-математических наук, доцент, Институт систем энергетики СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел. (3952)429440
Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1
тел.: (3952)242210 (contact.dns@gmail.com)

Sidorov Denis, PhD, Associate Professor, Senior Research Fellow Energy Systems Institute SB RAS, 130 Lermontov Str., Irkutsk, 664003 Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor,
Phone: (3952)428440 (contact.dns@gmail.com)