Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 4. С. 53—68

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Стартовое управление вырожденными линейными распределенными системами

М. В. Плеханова
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. Исследованы задачи стартового управления для одного класса линейных распределенных систем, не разрешенных относительно производной по времени. В задачах рассмотрены два типа начальных условий на состояние системы и различные функционалы качества. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах задач стартового управления для линеаризованной системы уравнений фазового поля.

Ключевые слова: оптимальное управление; задача стартового управления; распределенная система управления; вырожденное эволюционное уравнение.

Введение

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — гильбертовы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный непрерывный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{X}$, действует в пространство $\mathcal{Y}$). При некоторых предположениях на операторы L и M, гарантирующих существование сильно непрерывной разрешающей полугруппы уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$, будем исследовать задачу оптимального управления для системы, в которой управляющее воздействие входит в качестве начального значения — *задачу стартового управления*

$$x(0) = u, \tag{0.1}$$

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \tag{0.2}$$

$$u \in \mathfrak{U}_{\partial}, \tag{0.3}$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\|x - w\|^2_{H^r(0,T;\mathcal{X})} + \frac{N}{2}\|u - u_0\|^2_{\mathcal{U}} \to \inf\,. \tag{0.4}$$

Здесь $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства управлений $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, $y : (0,T) \to \mathcal{Y}$, $w \in H^r(0,T;\mathcal{X})$ — заданные вектор-функции, $u_0 \in \mathcal{U}$ — заданный вектор, $u \in \mathcal{U}$ — функция управления. Особенностью задачи является нетривиальность ядра оператора L. Системы управления, описываемые соотношениями (0.1), (0.2) с вырожденным оператором L будем называть вырожденными распределенными системами.

Задача (0.1), (0.2) является абстрактной формой многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, встречающихся в естествознании и технике: системы и уравнения Соболева, уравнения волн Россби, уравнения свободной эволюции поверхности фильтрующейся жидкости и др. [1, 9, 20].

При этом заметим, что в приложениях часто более естественным оказывается вместо условия Коши (0.1) рассматривать так называемое *обобщенное условие Шоуолтера–Сидорова* [10, 19]

$$Px(0) = u, \tag{0.5}$$

где P — проектор, являющийся единицей разрешающей полугруппы операторов уравнения (0.2).

Отметим работы [2, 17], в которых исследованы различные задачи оптимального управления для дескрипторных систем — систем вида (0.2) в конечномерном случае. К классу задач для распределенных систем управления относятся рассматриваемые в ряде работ задачи, касающиеся псевдопараболических уравнений в частных производных, однако дифференциальный по пространственным переменным оператор при производной по времени в них предполагается невырожденным (см. [18] и библиографию там же).

Ранее в работах автора [3, 4, 6, 7, 13] исследовались задачи распределенного (не стартового) управления для линейных вырожденных распределенных систем в различных постановках. Целью данной работы является исследование разрешимости задач стартового управления вида (0.1)–(0.4) и (0.2)–(0.5) при $r = 0$ и $r = 1$, когда $N > 0$ (случай компромиссного функционала) и $N = 0$ (случай жесткого управления). Нужно отметить, что задачи стартового управления исследовались ранее автором в работах [5, 14], но лишь для квадратичного функционала качества, норма функции состояния в котором берется в пространстве $H^1(0,T;\mathcal{X})$. В данной работе рассмотрены различные функционалы качества, в том числе с более слабой нормой функции состояния, а также терминальный функционал относительно функции состояния и функционал с нормой графика этой функции. Кроме того, автором получены результаты для функционала, который при выполнении определенных условий может не быть квадратичным. Абстрактные результаты работы проиллюстрированы на примере многомерной линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля.

1. Сильное решение задачи с начальным условием Коши или Шоуолтера–Сидорова

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Введем обозначения

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\},$$

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Пространства Лебега–Бохнера $L_q(0,T;\mathcal{X})$ и Соболева–Бохнера $W^l_q(0,T;\mathcal{X})$, $l \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$, $q > 1$, $T \in (0,+\infty)$, для краткости будем обозначать через $L_q(\mathcal{X})$ и $W^l_q(\mathcal{X})$ соответственно. Кроме того, будем использовать обозначения $L_2(\mathcal{X}) = H^0(\mathcal{X})$, $W^l_2(\mathcal{X}) = H^l(\mathcal{X})$.

Кроме того, обозначим через $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) ядро $\ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$ (соответственно $\ker(L^L_\mu(M))^{p+1}$), а через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$ ($\mathrm{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $\mathrm{dom}M_k = \mathcal{X}^k \cap \mathrm{dom}M$ ($\mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$.

Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R} \quad (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\left\{\left\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \left\|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\right\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathcal{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, такой, что

$$\left\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1}y\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\mathrm{const}(y)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall y \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1 ..., \mu_p > a$;

(iv) для всех $\lambda, \mu_0, ..., \mu_p > a$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Замечание 1. Эквивалентность условий данного определения аналогичным более сложным условиям, использованным в работе [11], доказана в [12].

Теорема 1. [11]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$;

(iv) *оператор* $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ *нильпотентен степени не больше* $p \in \mathbb{N}_0$;

(v) *существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа* $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \geq 0\}$ *однородного уравнения* $L\dot{x}(t) = Mx(t)$.

Проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) на $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$), существующий в условиях теоремы 1 в силу утверждения (i), обозначим через P (Q). Кроме того, будем использовать обозначение $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \in \mathrm{dom} M \tag{1.1}$$

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t). \tag{1.2}$$

Сильным решением задачи (1.1), (1.2) называется функция $x \in W_q^1(\mathcal{X})$, удовлетворяющая условию (1.1) и почти всюду на $(0, T)$ — уравнению (1.2).

Теорема 2. [13]. *Пусть оператор* M *сильно* (L, p)*-радиален. Тогда при любых* $y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y})$ *и*

$$x_0 \in \mathcal{M}_y = \left\{ x \in \mathrm{dom} M : (I - P)x = -\sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1}(I - Q)y^{(k)}(0) \right\}$$

существует единственное сильное решение $x \in W_q^1(\mathcal{X})$ *задачи* (1.1), (1.2), *при этом*

$$\|x\|^2_{W_q^1(\mathcal{X})} \leq C \left(\|x_0\|^2_{\mathcal{X}} + \|SPx_0\|^2_{\mathcal{X}} + \|y\|^2_{W_q^{p+1}(\mathcal{Y})} \right). \tag{1.3}$$

Рассмотрим обобщенное условие Шоуолтера–Сидорова

$$Px(0) = x_0. \tag{1.4}$$

Функция $x \in W_q^1(\mathcal{X})$ называется *сильным решением* задачи (1.2), (1.4), если она удовлетворяет условию (1.4) и почти всюду на $(0, T)$ — уравнению (1.2).

Теорема 3. [4]. *Пусть оператор* M *сильно* (L, p)*-радиален. Тогда для всех* $y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y})$ *и* $x_0 \in \mathrm{dom} M_1$ *существует единственное сильное решение задачи* (1.2), (1.4), *при этом*

$$\|x\|^2_{W_q^1(\mathcal{X})} \leq C \left(\|x_0\|^2_{\mathcal{X}} + \|Sx_0\|^2_{\mathcal{X}} + \|y\|^2_{W_q^{p+1}(\mathcal{Y})} \right). \tag{1.5}$$

2. Задачи стартового управления с компромиссными функционалами

Пусть M сильно (L,p)-радиальный оператор. Рассмотрим задачу оптимального управления, у которой управлением является начальное значение — так называемую *задачу стартового управления*

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \quad x(0) = u, \tag{2.1}$$

$$u \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{2.2}$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\|x-w\|^2_{H^1(\mathcal{X})} + \frac{N}{2}\|u-u_0\|^2_{\mathcal{X}} \to \inf, \tag{2.3}$$

где $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$, $w \in H^1(\mathcal{X})$ — заданные функции, $u_0 \in \mathcal{X}$ — заданный вектор, константа $N > 0$, *множество допустимых управлений* $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathcal{X}$.

Учитывая вид уравнения (2.1), его решения будем искать в гильбертовом пространстве $\mathcal{Z}_{p+1} = \{z \in H^1(\mathcal{X}) : L\dot{z} - Mz \in H^{p+1}(\mathcal{Y})\}$ с нормой $\|z\|_{\mathcal{Z}_{p+1}} = \|z\|_{H^1(\mathcal{X})} + \|L\dot{z} - Mz\|_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}$.

Множеством допустимых пар назовем множество $\mathfrak{W}$ пар $(x,u) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{X}$, удовлетворяющих условиям (2.1), (2.2).

Функционал $J(x,u)$ называется *коэрцитивным*, если для любого $R > 0$ множество $\{(x,u) \in \mathfrak{W} : J(x,u) \leq R\}$ ограничено в пространстве $\mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{X}$.

Лемма 1. *Оператор $\gamma_0 : H^1(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$, $\gamma_0 x = x(0)$, непрерывен.*

Доказательство. Из вложений $H^{m+1}(\mathcal{X}) \hookrightarrow C^m([0,T);\mathcal{X})$, $m \in \mathbb{N}_0$, следует, что $\|x(0)\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_{C([0,T];\mathcal{X})} \leq C\|x\|_{H^1(\mathcal{X})}$. □

Решение задачи (2.1)–(2.3) состоит в нахождении пар $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал качества: $J(\hat{x},\hat{u}) = \inf\limits_{(x,u)\in\mathfrak{W}} J(x,u)$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{X}$ задачи* (2.1)–(2.3).

Доказательство. Заметим, что задача Коши (2.1) разрешима при условии принадлежности управления u множеству начальных значений $\mathcal{M}_y$, определенному в теореме 2. Поэтому при условии $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$ множество допустимых пар $\mathfrak{W}$ непусто.

Для доказательства воспользуемся теоремой 2.3 [16, гл. 2]. Для этого положим $\mathfrak{Y} = H^1(\mathcal{X})$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}_{p+1}$, $\mathfrak{U} = \mathcal{X}$, $\mathfrak{V} = H^l(\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}$ при каком-либо $l \in \{0,1,...p+1\}$, $\mathfrak{F}_0 = (-y,0)$, $\mathfrak{L}(x,u) = (L\dot{x} - Mx, \gamma_0 x - u)$. Непрерывность линейного оператора $\mathfrak{L} : \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{X} \to H^l(\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}$ следует из леммы 1. Действительно,

$$\|(L\dot{x} - Mx, \gamma_0 x - u)\|^2_{H^l(\mathcal{Y})\times\mathcal{X}} = \|L\dot{x} - Mx\|^2_{H^l(\mathcal{Y})} + \|\gamma_0 x - u\|^2_{\mathcal{X}} \leq$$

$$C(\|L\dot{x}-Mx\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}+\|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})}+\|u\|^2_{\mathcal{X}})=C\|(x,u)\|^2_{\mathcal{Z}_{p+1}\times\mathcal{X}}.$$

Остается убедиться в коэрцитивности функционала J. Имеем

$$\|x\|^2_{\mathcal{Z}_{p+1}}+\|u\|^2_{\mathcal{X}}=\|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})}+\|L\dot{x}-Mx\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}+\|u\|^2_{\mathcal{X}}=$$

$$\|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})}+\|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}+\|u\|^2_{\mathcal{X}}\leq C_1J(x,u)+C_2.$$

Таким образом, все условия теоремы 2.3 [16, гл. 2] выполнены. □

Аналогичный результат можно получить для системы, начальное состояние которой задается обобщенным условием Шоуолтера – Сидорова

$$L\dot{x}(t)=Mx(t)+y(t),\quad Px(0)=u, \tag{2.4}$$

где P — проектор на $\mathcal{X}^1$ вдоль $\mathcal{X}^0$, а ограничения на множество допустимых управлений имеют прежний вид (2.2), но при этом $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathcal{X}^1$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial\cap\mathrm{dom}M_1\neq\emptyset$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u})\in\mathcal{Z}_{p+1}\times\mathcal{X}^1$ *задачи* (2.2)–(2.4).

Доказательство. Задача (2.4) по теореме 3 разрешима при условии принадлежности управления u линеалу $\mathrm{dom}M_1$. Возьмем $\mathfrak{U}=\mathcal{X}^1$, $\mathfrak{L}(x,u)=(L\dot{x}-Mx,P\gamma_0x-u)$ и проведем рассуждения аналогичные тем, которые использованы в предыдущем доказательстве. □

Рассмотрим задачу стартового управления с другим функционалом качества

$$J_1(x,u)=J_0(x)+\frac{N}{2}\|u-u_0\|^2_{\mathcal{X}}+\frac{N}{2}\|Su-Su_0\|^2_{\mathcal{X}}\to\inf, \tag{2.5}$$

где $u_0\in\mathcal{D}_S=\mathrm{dom}S=\mathrm{dom}L_1^{-1}M_1$, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{D}_S$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_S}=\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}+\langle S\cdot,S\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$. Гильбертовость этого пространства следует из замкнутости оператора S. Кроме того, поскольку $\mathcal{D}_S=\mathrm{dom}M_1$, то условие нетривиальности в таких задачах выполняется автоматически.

Функционал $J_0(x)$ выпуклый, неотрицательный на некотором линейном нормированном пространстве $\mathfrak{Y}$, полунепрерывный снизу в $\mathfrak{Y}$. Кроме того, потребуем наличия непрерывного вложения $\mathcal{Z}_{p+1}\subset\mathfrak{Y}$.

Теорема 6. *Существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u})\in\mathcal{Z}_{p+1}\times\mathcal{D}_S$ *задачи* (2.2), (2.4), (2.5).

Доказательство. Возьмем теперь $\mathfrak{Y}_1=\mathcal{Z}_{p+1}$, $\mathfrak{U}=\mathcal{D}_S$, $\mathfrak{V}=H^l(\mathcal{Y})\times\mathcal{X}$, $l\in\{0,1,...p+1\}$, $\mathfrak{F}_0=(-y,0)$. Непрерывность оператора $\mathfrak{L}(x,u)=(L\dot{x}-Mx,P\gamma_0x-u)$ следует из неравенства

$$\|L\dot{x}-Mx\|^2_{H^l(\mathcal{Y})}+\|P\gamma_0x-u\|^2_{\mathcal{X}}\leq C\|x\|^2_{\mathcal{Z}_{p+1}}+2\|u\|^2_{\mathcal{D}_S}.$$

Полунепрерывность функционала J_1 снизу в пространстве $\mathfrak{Y}\times\mathfrak{U}$ имеет место, докажем его коэрцитивность, используя оценку (1.5) на решение задачи (2.4). Действительно,

$$\|x\|^2_{\mathcal{Z}_{p+1}}+\|u\|^2_{\mathcal{D}_S}=\|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})}+\|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}+\|u\|^2_{\mathcal{D}_S}\le$$

$$C_1\left(\|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}+\|u\|^2_{\mathcal{D}_S}\right)\le C_2J_1(x,u)+C_3.$$

По теореме 2.3 [16, гл. 2] получим существование решения рассматриваемой задачи. Единственность рещщения из этой теоремы не следует, поскольку строгая выпуклость функционала качества в задаче не гарантирована.

Докажем единственность решения. Пусть существуют два различных решения $(\hat{x}_1,\hat{u}_1)$, $(\hat{x}_2,\hat{u}_2)$. Это означает, что $\hat{u}_1\neq\hat{u}_2$ в силу единственности решения задачи (2.4). В силу выпуклости множества допустимых пар, которая следует из линейности задачи (2.4), пара, имеющая вид $(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2},\frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2})$, является допустимой. Поскольку функционал J_1 есть сумма выпуклого по x и строго выпуклого по u функционалов получим

$$J_1\left(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2},\frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2}\right)=J_0\left(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2}\right)+\frac{N}{2}\left\|\frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2}-u_0\right\|^2_{\mathcal{X}}+$$

$$\frac{N}{2}\left\|S\frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2}-Su_0\right\|^2_{\mathcal{X}}<\frac{1}{2}(J_0(\hat{x}_1)+J_0(\hat{x}_2))+\frac{N}{4}(\|\hat{u}_1-u_0\|^2_{\mathcal{X}}+$$

$$\|\hat{u}_2-u_0\|^2_{\mathcal{X}})+\frac{N}{4}(\|S\hat{u}_1-Su_0\|^2_{\mathcal{X}}+\|S\hat{u}_2-Su_0\|^2_{\mathcal{X}})=\frac{1}{2}(J_1(\hat{x}_1,\hat{u}_1)+J_2(\hat{x}_2,\hat{u}_2)).$$

Это противоречит предположению, что на парах $(\hat{x}_1,\hat{u}_1)$, $(\hat{x}_2,\hat{u}_2)$ функционал J_1 достигает минимума. □

Возьмем функционалы

$$J_2(x,u)=\frac{1}{2}\|x-w\|^2_{L_2(\mathcal{X})}+\frac{N}{2}\|u-u_0\|^2_{\mathcal{X}}+\frac{N}{2}\|Su-Su_0\|^2_{\mathcal{X}}\to\inf, \quad (2.6)$$

$$J_3(x,u)=\frac{1}{2}\|x(T)-w\|^2_{\mathcal{X}}+\frac{N}{2}\|u-u_0\|^2_{\mathcal{X}}+\frac{N}{2}\|Su-Su_0\|^2_{\mathcal{X}}\to\inf, \quad (2.7)$$

где $w\in L_2(\mathcal{X})$ для (2.6) и $w\in\mathcal{X}$ для (2.7), $u_0\in\mathcal{X}$, $N>0$.

Следствие 1. *Существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u})\in\mathcal{Z}_{p+1}\times\mathcal{D}_S$ *задачи* (2.2), (2.4), (2.6).

Доказательство. Для доказательства достаточно взять $\mathfrak{Y}=L_2(\mathcal{X})$ и сослаться на теорему 6. □

Лемма 2. *Функционал* $J_0(x) = \|x(T) - w\|^2_{\mathcal{X}}$ *с* $w \in \mathcal{X}$ *является выпуклым на пространстве* $H^1(\mathcal{X})$.

Доказательство. Для $\alpha \in [0,1]$ очевидны неравенства

$$\alpha(1-\alpha)(a-b)^2 \geq 0; \quad \alpha(1-\alpha)a^2 + \alpha(1-\alpha)b^2 - 2\alpha(1-\alpha)ab \geq 0;$$

$$(\alpha - \alpha^2)a^2 + ((1-\alpha) - (1-\alpha)^2)b^2 - 2\alpha(1-\alpha)ab \geq 0;$$

$$(\alpha a + (1-\alpha)b)^2 \leq \alpha a^2 + (1-\alpha)b^2.$$

Отсюда имеем при любых $x_1, x_2 \in H^1(\mathcal{X})$

$$J_0(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \|\alpha x_1(T) + (1-\alpha)x_2(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} \leq$$

$$(\alpha\|x_1(T) - w\|_{\mathcal{X}} + (1-\alpha)\|x_2(T) - w\|_{\mathcal{X}})^2 \leq$$

$$\alpha\|x_1(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} + (1-\alpha)\|x_2(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} = \alpha J_0(x_1) + (1-\alpha)J_0(x_2).$$

□

Следствие 2. *Существует единственное решение* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_S$ *задачи* (2.2), (2.4), (2.7).

Доказательство. Докажем непрерывность терминального функционала $J_0(x) = \frac{1}{2}\|x(T) - w\|^2_{\mathcal{X}}$ в пространстве $\mathfrak{Y} = H^1(\mathcal{X})$. Пусть $\{x_n\}$ сходится к x в $H^1(\mathcal{X})$. Тогда

$$|J_0(x_n) - J_0(x)| = \frac{1}{2}|\|x_n(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} - \|x(T) - w\|^2_{\mathcal{X}}| =$$

$$\frac{1}{2}|\|x_n(T) - w\|_{\mathcal{X}} - \|x(T) - w\|_{\mathcal{X}}|(\|x_n(T) - w\|_{\mathcal{X}} + \|x(T) - w\|_{\mathcal{X}}) \leq$$

$$C\|x_n(T) - x(T)\|_{\mathcal{X}} \leq C_1\|x_n(T) - x(T)\|_{H^1(\mathcal{X})} \to 0, \quad n \to \infty.$$

С учетом доказанной в лемме 2 выпуклости функционала J_0 отсюда по теореме 6 следует существование единственного решения. □

Пусть теперь функционал качества имеет вид

$$\tilde{J}_1(x,u) = J_0(x) + \frac{N}{2}\|u - u_0\|^2_{\mathcal{X}} + \frac{N}{2}\|Mu - Mu_0\|^2_{\mathcal{Y}} \to \inf, \tag{2.8}$$

$u_0 \in \mathcal{D}_M = \mathrm{dom} M$, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства $\mathcal{D}_M$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_M} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}} + \langle M\cdot, M\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}$.

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_M$ *задачи* (2.1), (2.2), (2.8).

Доказательство. В отличие от предыдущих случаев, выбираем $\mathfrak{U} = \mathcal{D}_M$. Докажем коэрцитивность функционала $\tilde{J}_1$. В силу (1.3) имеем

$$\|x\|^2_{\mathcal{Z}_{p+1}} + \|u\|^2_{\mathcal{D}_M} \leq C\left(\|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{\mathcal{D}_M} + \|L_1^{-1}M_1Pu\|^2_{\mathcal{X}}\right) =$$
$$C\left(\|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{\mathcal{D}_M} + \|L_1^{-1}QMu\|^2_{\mathcal{X}}\right) \leq$$
$$C_1\left(\|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{\mathcal{D}_M}\right) \leq C_2\tilde{J}_1(x,u) + C_3.$$

□

Из данной теоремы для задач с функционалами

$$\tilde{J}_2(x,u) = \frac{1}{2}\|x-w\|^2_{L_2(\mathcal{X})} + \frac{N}{2}\|u-u_0\|^2_{\mathcal{X}} + \frac{N}{2}\|Mu-Mu_0\|^2_{\mathcal{Y}} \to \inf, \quad (2.9)$$

$$\tilde{J}_3(x,u) = \frac{1}{2}\|x(T)-w\|^2_{\mathcal{X}} + \frac{N}{2}\|u-u_0\|^2_{\mathcal{X}} + \frac{N}{2}\|Mu-Mu_0\|^2_{\mathcal{Y}} \to \inf, \quad (2.10)$$

получим следующие утверждения.

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_M$ *задачи* (2.1), (2.2), (2.9).

Следствие 4. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_M$ *задачи* (2.1), (2.2), (2.10).

3. Жесткое стартовое управление

В данном параграфе будут рассмотрены задачи стартового управления, в которых функционал качества не зависит в явном виде от функции управления — так называемые задачи с жестким управлением [16]. Доказательства теорем существования и единственности для них отличаются от доказательств соответствующих теорем для задач с компромиссными функционалами лишь тем, что для коэрцитивности функционала качества используется дополнительное условие ограниченности множества допустимых управлений.

Как и прежде, на протяжении всего параграфа будем предполагать выполнение условия сильной (L,p)-радиальности оператора M. Также по умолчанию считаем, что $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое замкнутое выпуклое в пространстве $\mathcal{X}$ множество. Лишь дополнительное условие ограниченности $\mathfrak{U}_\partial$ будем прописывать в формулировках утверждений явно, чтобы подчеркнуть отличие от задач с компромиссными функционалами в предыдущем параграфе.

Во-первых, рассмотрим задачи стартового управления с функционалом

$$J(x) = \frac{1}{2}\|x-w\|^2_{H^1(\mathcal{X})} \to \inf, \quad (3.1)$$

где $w \in H^1(\mathcal{X})$ — заданная функция, или с функционалом

$$J_0(x) \to \inf, \tag{3.2}$$

который предполагается выпуклым, неотрицательным на линейном нормированном пространстве $\mathfrak{Y}$, полунепрерывным снизу в $\mathfrak{Y}$. Причем, при минимизации функционала J_0 предполагается непрерывность вложения $\mathcal{Z}_{p+1} \subset \mathfrak{Y}$.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{U}_\partial$ — ограниченное в пространстве $\mathcal{X}$ множество, причем $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{X}$ задачи* (2.1), (2.2), (3.1).

Доказательство. Как и в теореме 4, выберем $\mathfrak{Y} = H^1(\mathcal{X})$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}_{p+1}$, $\mathfrak{U} = \mathcal{X}$, $\mathfrak{V} = H^l(\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}$, $l \in \{0, 1, ..., p+1\}$, $\mathfrak{F}_0 = (-y, 0)$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4, покажем лишь коэрцитивность функционала. Заметим, что множество допустимых управлений ограничено, т. е. существует такая константа R, что для всех $u \in \mathfrak{U}_\partial$ $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq R$. Отсюда

$$\|x\|^2_{\mathcal{Z}_{p+1}} + \|u\|^2_{\mathcal{X}} = \|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})} + \|L\hat{x} - Mx\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{\mathcal{X}} =$$

$$\|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})} + \|y\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} + \|u\|^2_{\mathcal{X}} \leq \|x\|^2_{H^1(\mathcal{X})} + C + R^2 \leq C_1 J(x) + C_2.$$

Докажем единственность. Пусть существуют два решения $(\hat{x}_1, \hat{u}_1)$, $(\hat{x}_2, \hat{u}_2)$ задачи (2.1), (2.2), (3.1). Из выпуклости множества допустимых пар следует, что $(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2}, \frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2})$ — допустимая пара. Если $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, то $\hat{u}_1 = \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = \hat{u}_2$ и два решения $(\hat{x}_1, \hat{u}_1)$, $(\hat{x}_2, \hat{u}_2)$ совпадают. Пусть $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$, тогда строгая выпуклость функционала J означает, что

$$J\left(\frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(J(\hat{x}_1) + J(\hat{x}_2)).$$

Это неравенство противоречит тому, что $J(\hat{x}_1) = J(\hat{x}_2) = \inf\limits_{(x,u)\in\mathfrak{W}} J(x)$. Следовательно, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$. □

Следующее утверждение доказывается аналогично.

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{U}_\partial$ — ограниченное в пространстве $\mathcal{X}^1$ множество, причем $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathrm{dom} M_1 \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{X}^1$ задачи* (2.2), (2.4), (3.1).

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$, $\mathfrak{U}_\partial$ — ограниченное в пространстве $\mathcal{D}_M$ множество. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_M$ задачи* (2.1), (2.2), (3.2). *Если функционал J_0 является строго выпуклым, то решение задачи единственно.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 7 и используя неравенство (1.3), ограниченность множества допустимых управлений и неотрицательность функционала J_0, получим коэрцитивность функционала J_0. □

Рассмотрим задачи с функционалами

$$J_1(x) = \frac{1}{2}\|x - w\|^2_{L_2(\mathcal{X})} \to \inf, \tag{3.3}$$

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\|x(T) - w\|^2_{\mathcal{X}} \to \inf, \tag{3.4}$$

где $w \in L_2(\mathcal{X})$ в первом случае и $w \in \mathcal{X}$ во втором.

Следствие 5. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$, $\mathfrak{U}_\partial$ *— ограниченное в пространстве* $\mathcal{D}_M$ *множество. Тогда существует единственное решение* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_M$ *задачи* (2.1), (2.2), (3.3).

Доказательство. Единственность следует из строгой выпуклости функционала J_1 по x в пространстве $\mathfrak{Y} = L_2(\mathcal{X})$. □

Следствие 6. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial \cap \mathcal{M}_y \neq \emptyset$, $\mathfrak{U}_\partial$ *— ограниченное в пространстве* $\mathcal{D}_M$ *множество. Тогда существует решение* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_M$ *задачи* (2.1), (2.2), (3.4).

Аналогично доказываются следующие утверждения.

Теорема 11. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial$ *— ограниченное в пространстве* $\mathcal{D}_S$ *множество. Тогда существует решение* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_S$ *задачи* (2.2), (2.4), (3.2).

Следствие 7. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial$ *— ограниченное в пространстве* $\mathcal{D}_S$ *множество. Тогда существует единственное решение* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_S$ *задачи* (2.2), (2.4), (3.3).

Следствие 8. *Пусть* $\mathfrak{U}_\partial$ *— ограниченное в пространстве* $\mathcal{D}_S$ *множество. Тогда существует единственное решение* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathcal{D}_S$ *задачи* (2.2), (2.4), (3.4).

4. Начально-краевая задача для квазистационарной системы уравнений фазового поля

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\theta(x, 0) + \varphi_1(x, 0) = u(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial\theta}{\partial n}(x,t)+\lambda\theta(x,t)=0,\\ \tfrac{\partial\varphi_i}{\partial n}(x,t)+\lambda\varphi_i(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\quad i=1,2,\ldots,m,\end{gathered}\tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial t}\theta(x,t)+\tfrac{\partial}{\partial t}\varphi_1(x,t)=\Delta\theta(x,t)+f(x,t),\\ \Delta\varphi_1(x,t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{1j}\varphi_j(x,t)+\theta(x,t)+g_1(x,t)=0,\\ \Delta\varphi_i(x,t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\varphi_j(x,t)+g_i(x,t)=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),\ i=2,3,\ldots,m,\end{gathered}\tag{4.3}$$

которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [8]. Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\lambda,\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$, $i,j=1,2,\ldots,m$. Искомыми функциями являются $\theta(x,t)$, $\varphi_i(x,t)$, $i=1,2,\ldots,m$.

Редукция задачи (4.1)–(4.3) к задаче (2.2), (2.4) была проделана в работе [15]. Сначала сделаем замены $\theta(x,t)+\varphi_1(x,t)=v(x,t)$, $\varphi_i(x,t)=w_i(x,t)$, $i=1,2,\ldots,m$. Тогда задача примет вид

$$v(x,0)=u(x),\quad x\in\Omega,\tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial v}{\partial n}(x,t)+\lambda v(x,t)=0,\\ \tfrac{\partial w_i}{\partial n}(x,t)+\lambda w_i(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\quad i=1,2,\ldots,m,\end{gathered}\tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}v_t(x,t)=\Delta v(x,t)-\Delta w_1(x,t)+f(x,t),\\ \Delta w_1(x,t)+(\alpha_{11}-1)w_1(x,t)+\sum_{j=2}^{m}\alpha_{1j}w_j(x,t)+v(x,t)+g_1(x,t)=0,\\ \Delta w_i(x,t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}w_j(x,t)+g_i(x,t)=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),\ i=2,3,\ldots,m.\end{gathered}\tag{4.6}$$

Возьмем $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=(L_2(\Omega))^{m+1}$,

$$L=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix}\Delta&-\Delta&0&\ldots&0\\1&\alpha_{11}-1+\Delta&\alpha_{12}&\ldots&\alpha_{1m}\\0&\alpha_{21}&\alpha_{22}+\Delta&\ldots&\alpha_{2m}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\ldots&\alpha_{mm}+\Delta\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{dom}M=\left\{(v,w_1,\ldots,w_m)\in(H^2(\Omega))^{m+1}:\left(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\right)v(x)=\left(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\right)w_i(x)=0,\ x\in\partial\Omega,\ i=1,2,\ldots,m\right\}.$$

Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$. Причем $\ker L = \{0\} \times (L_2(\Omega))^m$.

Обозначим $Az = \Delta z$, $\mathrm{dom} A = H^2_\partial(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : \frac{\partial z}{\partial n}(x) + \lambda z(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$. Кроме того, введем в рассмотрение оператор $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, задаваемый матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1m} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Теорема 12. [15]. *Пусть $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$. Тогда оператор M сильно $(L,0)$-радиален.*

Задачу (4.4)–(4.6) можно исследовать с помощью теоремы 3.

Следствие 9. *Пусть $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$. Тогда для любых $u \in H^2_\partial(\Omega)$ и $f, g_i \in H^1(L_2(\Omega))$, $i = 1, 2, \dots, m$, существует единственное сильное решение $(v, w_1, \dots, w_m) \in H^1((L_2(\Omega))^{m+1})$ задачи (4.4)–(4.6).*

5. Стартовое управление системой уравнений фазового поля

Рассмотрим задачи стартового управления для распределенной системы, состояние которой описывается начально-краевой задачей (4.4)–(4.6), с ограничением на управление

$$u \in \mathfrak{U}_\partial \tag{5.1}$$

и функционалами качества

$$\begin{gathered} J(v, w_1, \cdots, w_m, u) = \tfrac{1}{2}\|v - z_0\|^2_{H^1(L_2(\Omega))} + \\ \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \|w_j - z_j\|^2_{H^1(L_2(\Omega))} + \tfrac{N}{2}\|u - u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$J_1(v, w_1, \cdots, w_m) = \frac{1}{2}\|v - z_0\|^2_{H^1(L_2(\Omega))} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \|w_j - z_j\|^2_{H^1(L_2(\Omega))} \to \inf, \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered} J_2(v, w_1, \cdots, w_m, u) = \tfrac{1}{2}\|v - z_0\|^2_{L_2(L_2(\Omega))} + \\ \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \|w_j - z_j\|^2_{L_2(L_2(\Omega))} + \tfrac{N}{2}\|u - u_0\|^2_{H^2(\Omega)} \to \inf, \end{gathered} \tag{5.4}$$

$$J_3(v, w_1, \cdots, w_m) = \frac{1}{2}\|v - z_0\|^2_{L_2(L_2(\Omega))} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \|w_j - z_j\|^2_{L_2(L_2(\Omega))} \to \inf, \tag{5.5}$$

Здесь константа $N > 0$. В случае задачи минимизации функционала (5.2) или (5.3) заданы также функции $z_0, z_1, \dots, z_m \in H^1(L_2(\Omega))$. Для рассмотрения задачи с функционалом (5.4) или (5.5) взяты функции $z_0, z_1, \dots, z_m \in L_2(L_2(\Omega))$. Функция u_0 берется из пространства $L_2(\Omega)$ для функционала (5.2) и из $H^2_\partial(\Omega)$ — для функционала (5.4).

Гильбертово пространство $\mathcal{Z}_1$ составляют наборы $(v, w_1, \dots, w_m) \in H^1((L_2(\Omega))^{m+1})$, для которых определены и принадлежат пространству $H^1(L_2(\Omega))$ выражения $v_t - \Delta v + \Delta w_1$, $\Delta w_1 + (\alpha_{11} - 1)w_1 + \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} w_j + v$, $\Delta w_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j$, $i = 2, 3, \dots, m$.

Из теорем 5 и 9 соответственно и из равенств $\mathcal{X}^1 = L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}_S = H^2_\partial(\Omega)$ следуют утверждения.

Утверждение 5.1. *Пусть* $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$, $f, g_1, \dots, g_m \in H^1(L_2(\Omega))$, $\mathfrak{U}_\partial$ *— непустое замкнутое выпуклое подмножество* $L_2(\Omega)$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{v}, \hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_m, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_1 \times L_2(\Omega)$ *задачи* (4.4)–(4.6), (5.1), (5.2).

Утверждение 5.2. *Пусть* $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$, $f, g_1, \dots, g_m \in H^1(L_2(\Omega))$, $\mathfrak{U}_\partial$ *— непустое ограниченное замкнутое выпуклое подмножество пространства* $L_2(\Omega)$. *Тогда задача* (4.4)–(4.6), (5.1), (5.3) *имеет единственное решение* $(\hat{v}, \hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_m, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_1 \times L_2(\Omega)$.

Следствия 1 и 7 влекут утверждения 5.3, 5.4.

Утверждение 5.3. *Пусть* $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$, $f, g_1, \dots, g_m \in H^1(L_2(\Omega))$, $\mathfrak{U}_\partial$ *— непустое замкнутое выпуклое подмножество* $H^2_\partial(\Omega)$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{v}, \hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_m, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_1 \times H^2_\partial(\Omega)$ *задачи* (4.4)–(4.6), (5.1), (5.4).

Утверждение 5.4. *Пусть* $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$, $f, g_1, \dots, g_m \in H^1(L_2(\Omega))$, $\mathfrak{U}_\partial$ *— непустое ограниченное замкнутое выпуклое подмножество пространства* $H^2_\partial(\Omega)$. *Тогда задача* (4.4)–(4.6), (5.1), (5.5) *имеет единственное решение* $(\hat{v}, \hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_m, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_1 \times L_2(\Omega)$.

Список литературы

1. Демиденко Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. – Новосибирск : Науч. кн., 1998. – 436 с.
2. Келлер А. В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоуолтера-Сидорова и численные решения / А. В. Келлер // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 30–43.
3. Плеханова М. В. О разрешимости задач смешанного оптимального управления линейными распределенными системами / М. В. Плеханова, А. Ф. Исламова // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 7. – С. 37–47.

4. Плеханова М. В. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 40–44.
5. Плеханова, М. В. Задачи стартового управления для линейных уравнений соболевского типа / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Физика. Химия. – 2005. – № 6 (46). – С. 43–49.
6. Плеханова М. В. Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2007. – № 2. – С. 37–44.
7. Плеханова М. В. О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Сер. мат. – 2011. – Т. 75, № 2. – С. 177–194.
8. Плотников П. И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П. И. Плотников, В. Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 3. – С. 461–471.
9. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М. : Физматлит, 2007. – 734 с.
10. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н. А. Сидоров. – Иркутск : Иркут. гос. ун-т, 1982. – 311 с.
11. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В. Е. Федоров // Алгебра и анализ. - - 2000. – Т. 12, вып. 3. - - С. 173–200.
12. Федоров В. Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденной полугруппы операторов / В. Е. Федоров // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – № 20 (158). – С. 12–19.
13. Федоров В. Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1548–1556.
14. Федоров В. Е. Задача стартового управления для класса полулинейных распределенных систем соболевского типа / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, №. 1. – С. 259–267.
15. Федоров В. Е. Ограниченные решения линеаризованной системы уравнений фазового поля / В. Е. Федоров, М. А. Сагадеева // Неклассические уравнения математической физики : тр. семинара. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2005. – С. 275–284.
16. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск : Науч. кн., 1999. – 350 с.
17. Чистяков В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. – Новосибирск : Наука, 2003. – 320 с.
18. Lyashko S. I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters / S. I. Lyashko. – Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 455 p.
19. Showalter R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – Vol. 6, N 1. – P. 25–42.
20. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publisher, 2002. – 568 p.

M. V. Plekhanova

Start control for degenerate linear distributed systems

Abstract. Start control problems for a class of linear distributed systems usolved with respect to the times derivative are studied. Two types of initial condition for the system state and various cost functionals are considered in the problems. Abstract results are illustrated by examples of the start control problems for the linearized quasistationary system of phase field equations.

Keywords: optimal control problem, start control problem, distributed system, degenerate evolution equation

Плеханова Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет (НИУ), 454080 г. Челябинск, пр. Ленина, 76, тел. (351) 267-99-00.
(`mariner79@mail.ru`)

Plekhanova Marina, National Research South Ural State University, Av. Lenin, 76, Chelyabinsk, 454080. Phone: (351) 267-99-00.
(`mariner79@mail.ru`)