Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 4. С. 69—84

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.946

Построение точных решений одномерного уравнения нелинейной диффузии методом линейных инвариантных подпространств

Г. А. Рудых
Институт математики, экономики и информатики ИГУ

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В работе с использованием метода линейных инвариантных подпространств строятся явные точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии.

Ключевые слова: уравнение нелинейной диффузии; инвариантные подпространства; точные решения.

1. Введение

Ранее, в работах [1, 2] авторами были построены семейства новых точных решений одномерного по пространственной переменной уравнения нелинейной диффузии. Методика построения решений основывалась на использовании уравнения Лиувилля (уравнения неразрывности). В данной статье техника построения точных решений уравнения нелинейной диффузии основывается на методе линейных инвариантных подпространств [3–6, 25]. Указанный метод позволяет отыскивать решения эволюционных уравнений в виде обобщенного разделения переменных [7, 8]. Аналогом метода инвариантных подпространств является метод конечных сумм и его частный случай — метод конечномерных колец развитый в работах [9–13], с использованием которого найдены точные решения уравнения нелинейной диффузии в виде многочленов по пространственным переменным.

2. Точные решения уравнения нелинейной диффузии без источника (стока)

В этом разделе представлены результаты по построению точных решений одномерного уравнения нелинейной диффузии со степенной нелинейностью без источника (стока)

$$u_t = \left(u^\lambda u_x\right)_x. \tag{1.1}$$

Здесь $u \stackrel{\triangle}{=} u(x,t)$ — вещественная скалярная функция двух переменных x, $t \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ — параметр уравнения.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов, напомним идею метода линейных инвариантных подпространств [5, 6]. Рассмотрим нелинейное эволюционное уравнение

$$u_t = F[u], \tag{1.2}$$

где $F[u] \equiv F\left(x, u, u_x, \dots, D_x^n u\right)$ — нелинейный дифференциальный оператор n-го порядка, $D_x = \partial/\partial x$. Пусть оператор F определен на некотором (бесконечномерном) линейном функциональном пространстве W и пусть $f_1(x)$, …, $f_k(x)$ — линейно независимые функции из этого пространства. Их линейная оболочка

$$W_k = \mathcal{L}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\} \equiv \left\{\sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x) \mid C_i \in \mathbb{R}^1\right\}$$

является k -мерным линейным подпространством в W.

Определение 1. *Линейное подпространство W_k инвариантно относительно F (F допускается W_k), если $F[W_k] \subseteq W_k$, т. е. существуют функции $\{\Psi_i\}$ такие, что*

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(C_1, \dots, C_k) f_i(x) \tag{1.3}$$

для любых постоянных $C_1, \dots, C_k$.

Лемма 1. [6] *Если линейное подпространство W_k инвариантно относительно оператора F, то уравнение (1.2) обладает решениями вида*

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) f_i(x), \tag{1.4}$$

где коэффициенты $\{a_i(t)\}$ удовлетворяют динамической системе

$$a_i'(t) = \Psi_i\left(a_1(t), \dots, a_k(t)\right), \ i = 1, \dots, k.$$

Здесь и далее штрих означает производную по переменной t. Уравнение (1.2) являющееся бесконечномерной динамической системой после сужения на конечномерное инвариантное подпространство W_k превращается в k-мерную динамическую систему.

Преобразуем исследуемое уравнение (1.1) функциональной заменой

$$u(x,t) = [v(x,t)]^{1/\lambda} \tag{1.5}$$

к эквивалентному виду

$$v_t = F[v], \tag{1.6}$$

где дифференциальный оператор

$$F[v] \equiv v v_{xx} + \frac{1}{\lambda} v_x^2 \tag{1.7}$$

является квадратичным. Отметим, что различные семейства точных решений нелинейных эволюционных уравнений, сводящихся к уравнениям с квадратичными нелинейностями получены в работах [7].

Точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии (1.6) будем строить в виде конечных полиномиальных сумм

$$v(x,t) = \sum_{i=0}^{k} a_i(t) x^i, \ k \geq 3, \tag{1.8}$$

где $a_i(t) \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $(i = \overline{0, n})$ — функции подлежащие определению, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Возможность построения таких решений связана с существованием соответствующих k-мерных линейных подпространств $W_k = \mathcal{L}\{x^{m_1}, \dots, x^{m_k}\}$, $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ m_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, k},\ m_k \neq 0,\ 1,\ 2)$, инвариантных относительно дифференциального оператора (1.7). При этом мы не рассматриваем случаи $k = 1, 2$, так как они приводят к известным [14–16] автомодельным решениям уравнения (1.1).

Рассмотрим некоторые интересные частные случаи. Пусть $k = 3$. В этом случае имеет место

Утверждение 1. *Линейное подпространство $W_4 = \mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ инвариантно относительно дифференциального оператора (1.7), тогда и только тогда, когда $\lambda = -3/2$.*

Доказательство. Необходимость. Покажем, что если подпространство $W_4 = \mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ инвариантно относительно оператора (1.7), то $\lambda = -3/2$. Пусть подпространство W_4 является инвариантным, тогда по определению 1 должно выполняться соотношение

$$F\left[\sum_{i=0}^{3} C_i x^i\right] = \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \Psi_3 x^3, \tag{1.9}$$

для любых постоянных C_i $(i = \overline{0,\,3})$, $C_3 \neq 0$. Расписывая левую часть равенства (1.9) для оператора (1.7) получим

$$2C_0C_2 + \frac{1}{\lambda}C_1^2 + \left[6C_0C_3 + \left(2 + \frac{4}{\lambda}\right)C_1C_2\right]x +$$

$$+\left[\left(2 + \frac{4}{\lambda}\right)C_2^2 + \left(6 + \frac{6}{\lambda}\right)C_1C_3\right]x^2 + \left(8 + \frac{12}{\lambda}\right)C_2C_3x^3 + \left(6 + \frac{9}{\lambda}\right)C_3^2x^4.$$

Таким образом, для выполнения соотношения (1.9) необходимо потребовать, чтобы слагаемое содержащее четвертую степень переменой x тождественно равнялось нулю. Это возможно только при $\lambda = -3/2$, поскольку $C_3 \neq 0$.

Достаточность. Пусть $\lambda = -3/2$, в этом случае дифференциальный оператор (1.7) имеет вид

$$F[v] \equiv vv_{xx} - \frac{2}{3}v_x^2. \tag{1.10}$$

Покажем, что существуют функции $\Psi_i\,(C_0, \ldots, C_3)$ $(i = \overline{0,\,3})$ такие, что

$$F\left[\sum_{i=0}^{3} C_i x^i\right] = \sum_{i=0}^{3} \Psi_i\,(C_0, \ldots, C_3)\,x^i.$$

Подействуем оператором (1.10) на полином третьей степени $v_3(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$ с произвольными постоянными C_i $(i = \overline{0,\,3})$, $C_3 \neq 0$. После вычисления необходимых частных производных и приведения подобных слагаемых получим

$$F[v_3(x)] = \Psi_0 + \Psi_1x + \Psi_2x^2 + \Psi_3x^3,$$

где введены обозначения

$$\Psi_0 = 2C_0C_2 - \frac{2}{3}C_1^2, \quad \Psi_1 = 6C_0C_3 - \frac{2}{3}C_1C_2,$$

$$\Psi_2 = 2C_1C_3 - \frac{2}{3}C_2^2, \quad \Psi_3 \equiv 0. \tag{1.11}$$

Следовательно, в силу определения 1 линейное подпространство $W_4 = \mathcal{L}\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ инвариантно относительно дифференциального оператора (1.10). Утверждение доказано. □

Мы показали, что подпространство $W_4 = \mathcal{L}\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ инвариантно относительно дифференциального оператора (1.10). Следовательно, в силу леммы **1** уравнение (1.1) с показателем степени $\lambda = -3/2$ обладает решениями вида (1.8). Причем коэффициенты $a_i(t)$, $(i = \overline{0,\,3})$ удовлетворяют системе ОДУ

$$a_i'(t) = \Psi_i(a_0(t), \ldots, a_3(t)), \quad i = \overline{0,\,3},$$

где функции $\Psi_i(C_0, C_1, C_2, C_3)$ определяются соотношениями (1.11), причем $a_i(t) \equiv C_i(t)$ $(i = \overline{0, 3})$. Тем самым, справедливо

Утверждение 2. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t = \left(u^{-3/2} u_x\right)_x, \tag{1.12}$$

обладает точным решением вида

$$u(x,t) = \left[a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3 x^3\right]^{-2/3}, \tag{1.13}$$

где $a_3 \neq 0$ — произвольная постоянная, а функции $a_i(t)$, $(i = \overline{0, 2})$ удовлетворяют системе ОДУ

$$a_0' = 2a_0a_2 - \frac{2}{3}a_1^2, \quad a_1' = 6a_0a_3 - \frac{2}{3}a_1a_2, \quad a_2' = 2a_1a_3 - \frac{2}{3}a_2^2. \tag{1.14}$$

Пример 1. Система ОДУ (1.14) несложными преобразованиями сводится к одному нелинейному ОДУ третьего порядка на функцию $a_2(t)$

$$a_2''' + 4a_2'^2 = 0.$$

Сделав замену $a_2'(t) = y(t)$, понизим порядок уравнения и получим ОДУ $y'' + 4y^2 = 0$, интегрируя которое, имеем $y(t) = -\frac{3}{2}\wp(t + C_1, 0, C_2)$, где $\wp(t + C_1, 0, C_2)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = 0$, $g_3 = C_2$, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Отсюда находим

$$a_2(t) = -\frac{3}{2}z(t), \quad a_1(t) = \frac{3}{4a_3}\left(z^2(t) - z'(t)\right),$$

$$a_0(t) = \frac{1}{8a_3^2}\left(3z(t)z'(t) - z''(t) - z^3(t)\right), \tag{1.15}$$

где $z(t) = \displaystyle\int \wp(t + C_1, 0, C_2)\,dt$ — нормальный эллиптический интеграл второго рода [17]. Окончательно имеем, что уравнение нелинейной диффузии (1.12) обладает точным решением вида (1.13) с функциями $a_i(t)$ $(i = \overline{0, 2})$ определяемыми по формулам (1.15).

Пусть $k = 4$. Выясним: будет ли инвариантным подпространство $W_5 = \mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$ относительно оператора (1.7)? Если да, то при каких значениях λ?

Утверждение 3. *Линейное подпространство $W_5 = \mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$ инвариантно относительно дифференциального оператора (1.7), тогда и только тогда, когда $\lambda = -4/3$.*

Доказательство. Необходимость. Покажем, что если подпространство $W_5=\mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$ инвариантно относительно оператора (1.7), то $\lambda=-4/3$. Итак, пусть подпространство W_5 является инвариантным, тогда по определению 1 должно выполняться соотношение

$$F\left[\sum_{i=0}^{4} C_i x^i\right]=\Psi_0+\Psi_1 x+\Psi_2 x^2+\Psi_3 x^3+\Psi_4 x^4, \tag{1.16}$$

для любых постоянных C_i $(i=\overline{0,\ 4})$, $C_4\neq 0$. Расписывая левую часть равенства (1.16) для оператора (1.7) получим

$$2C_0C_2+\frac{1}{\lambda}C_1^2+\left[6C_0C_3+\left(2+\frac{4}{\lambda}\right)C_1C_2\right]x+$$
$$+\left[\left(2+\frac{4}{\lambda}\right)C_2^2+\left(6+\frac{6}{\lambda}\right)C_1C_3+12C_0C_4\right]x^2+$$
$$+\left[\left(8+\frac{12}{\lambda}\right)C_2C_3+\left(12+\frac{8}{\lambda}\right)C_1C_4\right]x^3+$$
$$+\left[\left(6+\frac{9}{\lambda}\right)C_3^2+\left(14+\frac{16}{\lambda}\right)C_2C_4\right]x^4+$$
$$+\left(18+\frac{24}{\lambda}\right)C_3C_4x^5+\left(12+\frac{16}{\lambda}\right)C_4^2x^6.$$

Для справедливости соотношения (1.16) необходимо потребовать, чтобы слагаемые содержащие четвертую и пятую степень переменой x тождественно равнялись нулю. Это выполнимо только при $\lambda=-4/3$, поскольку $C_4\neq 0$.

Достаточность. Пусть $\lambda=-4/3$, в этом случае дифференциальный оператор (1.7) имеет вид

$$F[v]\equiv vv_{xx}-\frac{3}{4}v_x^2. \tag{1.17}$$

Покажем, что существуют функции $\Psi_i\left(C_0,\ldots,C_4\right)$ $(i=\overline{0,\ 4})$ такие, что

$$F\left[\sum_{i=0}^{4} C_i x^i\right]=\sum_{i=0}^{4}\Psi_i\left(C_0,\ldots,C_4\right)x^i.$$

Подействуем оператором (1.17) на полином четвертой степени $v_4(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4$ с произвольными постоянными C_i $(i=\overline{0,\ 4})$, $C_4\neq 0$. После вычисления необходимых частных производных и приведения подобных слагаемых получим

$$F[v_4(x)]=\Psi_0+\Psi_1x+\Psi_2x^2+\Psi_3x^3+\Psi_4x^4,$$

где введены обозначения

$$\Psi_0 = 2C_0C_2 - \frac{3}{4}C_1^2,\ \ \Psi_1 = 6C_0C_3 - C_1C_2,\ \ \Psi_2 = 12C_0C_4 + \frac{3}{2}C_1C_3 - C_2^2,$$

$$\Psi_3 = 6C_1C_4 - C_2C_3,\ \ \Psi_4 = 2C_2C_4 - \frac{3}{4}C_3^2.$$

Следовательно, в силу определения 1 линейное подпространство $W_5 = \mathcal{L}\{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, x^4\}$ инвариантно относительно дифференциального оператора (1.17). Что и требовалось доказать. □

Следствием утверждения **3** и леммы **1** является

Утверждение 4. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t = \left(u^{-4/3}u_x\right)_x, \tag{1.18}$$

обладает точным решением вида

$$u(x,t) = \left[a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^4\right]^{-3/4}, \tag{1.19}$$

где функции $a_i(t)$, $(i = \overline{0,\, 4})$ *удовлетворяют системе ОДУ*

$$a_0' = 2a_0a_2 - \frac{3}{4}a_1^2,\quad a_1' = 6a_0a_3 - a_1a_2,\quad a_2' = 12a_0a_4 + \frac{3}{2}a_1a_3 - a_2^2,$$

$$a_3' = 6a_1a_4 - a_2a_3,\quad a_4' = 2a_2a_4 - \frac{3}{4}a_3^2. \tag{1.20}$$

Замечание 1. Одномерное уравнение нелинейной диффузии (1.18) является особенным с точки зрения групповой классификации [18, 19].

Рассмотрим некоторые частные случаи, при которых система ОДУ (1.20) интегрируется в квадратурах. Так если $a_0(t) = a_1(t) = a_2(t) \equiv 0$, то получим известное [20] инвариантное решение

$$u(x,t) = \left[-\frac{4}{3}C_1x^3 - \frac{4}{3}\left(C_2 + C_1^2t\right)x^4\right]^{-3/4},\ \ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R},$$

уравнения (1.18).

При $a_0(t) = a_1(t) \equiv 0$ находим следующее точное автомодельное решение

$$u(x,t) = \left[\frac{4\left(C_1x^2 + C_2x^3\right)}{3T(t)} - \left(\frac{4}{9}C_3T^2(t) - \frac{C_2^2}{C_1T(t)}\right)x^4\right]^{-3/4},$$

здесь $T(t) = 4C_1t - 3$, $C_1 \neq 0$, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Пример 2. Уравнение (1.18) обладает точным двухпараметрическим решением

$$u(x,t) = \left[-\frac{4}{3}C_1 A(t) - \frac{4}{3}B(t)x^2 - \frac{4}{3}A(t)x^4\right]^{-3/4},$$

где введены следующие обозначения

$$A(t) = \frac{C_2\sqrt{3\sqrt{3}}\,(\mathrm{cn}(C_2t,\nu)-1)}{16\sqrt{C_1}[1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})\mathrm{cn}(C_2t,\nu)]},$$

$$B(t) = -\frac{C_2 3\sqrt{3}\,\mathrm{sn}(C_2t,\nu)\,\mathrm{dn}(C_2t,\nu)}{4\,[\mathrm{cn}(C_2t,\nu)-1]\,\left[1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})\,\mathrm{cn}(C_2t,\nu)\right]}.$$

Здесь $\mathrm{cn}(C_2t,\nu)$, $\mathrm{sn}(C_2t,\nu)$ и $\mathrm{dn}(C_2t,\nu)$ — соответственно эллиптический косинус, эллиптический синус и дельта амплитуды Якоби; $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ — модуль эллиптической функции [21], а $C_1 \geq 0$, C_2 — произвольные постоянные.

Несложный анализ показывает, что при $k = 5$ условие $\lambda = -5/4$ является только необходимым для инвариантности подпространства $W_5 = \mathcal{L}\{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, x^4,\, x^5\}$. При этом, функция

$$u(x,t) = \left[a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^4 + a_5(t)x^5\right]^{-4/5},$$

будет решением уравнения (1.1) с $\lambda = -5/4$ только в том случае, если функции $a_i(t)$, $(i = \overline{0,\,5})$ удовлетворяют системе ОДУ

$$\begin{gathered}a_0' = 2a_0a_2 - \frac{4}{5}a_1^2, \quad a_1' = 6a_0a_3 - \frac{6}{5}a_1a_2,\\ a_2' = 12a_0a_4 + \frac{6}{5}a_1a_3 - \frac{6}{5}a_2^2, \quad a_3' = 20a_0a_5 + \frac{28}{5}a_1a_4 - \frac{8}{5}a_2a_3, \qquad (1.21)\\ a_4' = 12a_1a_5 + \frac{6}{5}a_2a_4 - \frac{6}{5}a_3^2, \quad a_5' = 6a_2a_5 - \frac{6}{5}a_3a_4,\end{gathered}$$

стесненной дополнительным алгебраическим соотношением

$$a_3a_5 - \frac{2}{5}a_4^2 = 0. \qquad (1.22)$$

Таким образом, для нахождения функций $a_i(t)$, $(i = \overline{0,\,5})$ мы получили переопределенную систему дифференциально-алгебраических уравнений (1.21)–(1.22). Известно [22], что в общем случае переопределенные системы уравнений не всегда разрешимы. Однако в некоторых случаях такие системы допускают частные решения. Поскольку, по построению, нас интересует случай $k = 5$ (другими словами $a_5(t) \neq 0$), то алгебраическое соотношение (1.22) будет выполнено, если положить $a_3(t) = a_4(t) \equiv 0$. В этом случае система (1.21)–(1.22) обладает частным решением вида

$$a_2(t) = \left(\frac{6}{5}t - C_1\right)^{-1}, \quad a_5(t) = C_2\left(\frac{6}{5}t - C_1\right)^5,$$

$$a_0(t) = a_1(t) = a_3(t) = a_4(t) \equiv 0.$$

Замечание 2. В [3] показана связь между размерностью подпространства k и порядком дифференциального оператора n: для нелинейных операторов F выполнено $k \leq 2n+1$. Мы работаем с дифференциальным оператором (1.7), который имеет размерность $n = 2$, поэтому в нашем случае $k \leq 5$.

Пример 3. Уравнение нелинейной диффузии

$$u_t = \left(u^{-5/4}u_x\right)_x,$$

обладает точным автомодельным решением

$$u(x,t) = \left[\left(\frac{6}{5}t - C_1\right)^{-1} x^2 + C_2\left(\frac{6}{5}t - C_1\right)^5 x^5\right]^{-4/5},$$

где C_1, $C_2 \geq 0$ — произвольные постоянные.

Резюмируя выше изложенное приходим к выводу, что при $k = 5$ и $\lambda = -5/4$ инвариантным относительно оператора (1.7) будет подпространство $W_2 = \mathcal{L}\{x^2, x^5\}$.

Утверждение 5. *Линейное подпространство $W_2 = \mathcal{L}\{x^2, x^m\}$, $m \in \mathbb{R}$, ($m \neq 0, 1, 2$) инвариантно относительно дифференциального оператора (1.7), тогда и только тогда, когда $\lambda = -\dfrac{m}{m-1}$.*

Доказательство. Необходимость. Покажем, что если линейное подпространство $W_2{=}\mathcal{L}\{x^2, x^m\}$ инвариантно относительно оператора (1.7), то $\lambda = -\dfrac{m}{m-1}$. Итак, пусть подпространство W_2 является инвариантным, отсюда по определению 1 должно выполняться соотношение

$$F\left[C_2x^2 + C_mx^m\right] = \Psi_2x^2 + \Psi_mx^m, \tag{1.23}$$

для любых постоянных C_2, $C_m \neq 0$. Расписывая левую часть равенства (1.23) для оператора (1.7) получим

$$\left(2 + \frac{4}{\lambda}\right)C_2^2x^2 + \left(m^2 - m + \frac{4m}{\lambda}\right)C_2C_mx^m + \left(m^2 - m + \frac{m^2}{\lambda}\right)C_m^2x^{2m-2}.$$

Отсюда, для выполнимости соотношения (1.23) необходимо потребовать, чтобы коэффициент перед x^{2m-2} тождественно равнялся нулю, а это возможно только при $\lambda = -\dfrac{m}{m-1}$, так как $C_m \neq 0$ и $m \neq 0$.

Достаточность. Пусть $\lambda = -\dfrac{m}{m-1}$, в этом случае дифференциальный оператор (1.7) имеет вид

$$F[v] \equiv vv_{xx} - \frac{m-1}{m} v_x^2. \tag{1.24}$$

Покажем, что существуют функции $\Psi_2\,(C_2,\, C_m)$, $\Psi_m\,(C_2,\, C_m)$ такие, что

$$F\left[C_2 x^2 + C_m x^m\right] = \Psi_2\,(C_2,\, C_m)\, x^2 + \Psi_m\,(C_2,\, C_m)\, x^m.$$

Действуя оператором (1.24) на двучлен $v_m(x) = C_2 x^2 + C_m x^m$, после несложных преобразований получим

$$F\left[v_m(x)\right] = \left(\frac{4}{m} - 2\right) C_2^2 x^2 + (m-3)(m-2) C_2 C_m x^m.$$

Здесь можно положить

$$\Psi_2 = \left(\frac{4}{m} - 2\right) C_2^2, \quad \Psi_m = (m-3)(m-2) C_2 C_m.$$

Следовательно, в силу определения 1 подпространство $W_2 = \mathcal{L}\{x^2,\, x^m\}$ инвариантно относительно дифференциального оператора (1.24). Что и требовалось доказать. □

Следствием утверждения 5 и леммы **1** является

Утверждение 6. *Уравнение нелинейной диффузии (1.1) для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda \neq 0, -1, -2)$ *обладает точным решением вида*

$$u(x,t) = \left[\frac{\lambda x^2}{C_1 - 2(\lambda+2)t} + C_2\,(C_1 - 2(\lambda+2)t)^\gamma\, x^p\right]^{1/\lambda}, \tag{1.25}$$

где $\gamma = -\dfrac{\lambda(2\lambda+3)}{2(\lambda+1)^2}$, $p = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$, C_1, C_2 *— произвольные постоянные.*

Замечание 3. Точное решение (1.25) впервые опубликовано в работах авторов [1, 2] и вошло в известный справочник [24]. Если положить $C_2 = 0$, то из формулы (1.25) получим известное автомодельное решение Зельдовича-Баренблатта [14, 15].

Замечание 4. При $\lambda \to -1$ из формулы (1.25) следует результат, полученный в работе [23], а именно, предельное уравнение быстрой диффузии

$$u_t = \left(u^{-1} u_x\right)_x \quad \text{или} \quad u_t = (\ln u)_{xx}\,, \tag{1.26}$$

обладает точным автомодельным решением

$$u(x,t) = \left[C_2(C_1 - 2t) - (C_1 - 2t)^{-1}x^2\right]^{-1}.$$

Уравнение (1.26) интересно тем, что соответствующее ему эквивалентное уравнение (1.6) на функцию $v(x,t)$ имеет следующий дифференциальный оператор

$$F[v] \equiv vv_{xx} - v_x^2. \tag{1.27}$$

Ниже мы покажем, что существуют инвариантные относительно оператора (1.27) подпространства $W_k{=}\mathcal{L}\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ с элементами не только в классе степенных функций $f_p(x) = x^p$, но и в классе экспоненциальных функций. Так имеет место

Утверждение 7. *Линейное подпространство* $W_3 = \mathcal{L}\{1, e^x, e^{-x}\}$, *инвариантно относительно дифференциального оператора (1.27).*

Доказательство. Покажем, что существуют функции $\Psi_0(C_0, C_1, C_2)$, $\Psi_1(C_0, C_1, C_2)$, $\Psi_2(C_0, C_1, C_2)$ такие, что равенство

$$F\left[C_0 + C_1e^x + C_2e^{-x}\right] = \Psi_0 + \Psi_1e^x + \Psi_2e^{-x},$$

выполняется для любых постоянных C_0, C_1, C_2. Действуя оператором (1.27) на функцию $C_0 + C_1e^x + C_2e^{-x}$, получим

$$F\left[C_0 + C_1e^x + C_2e^{-x}\right] = 4C_1C_2 + C_0C_1e^x + C_0C_2e^{-x}.$$

Таким образом, полагая

$$\Psi_0 = 4C_1C_2, \quad \Psi_1 = C_0C_1, \quad \Psi_2 = C_0C_2,$$

в силу определения 1 мы убеждаемся, что линейное подпространство $W_3{=}\mathcal{L}\{1,\ e^x,\ e^{-x}\}$ инвариантно относительно оператора (1.27). Утверждение доказано. □

Заметим, что инвариантным относительно оператора (1.27) будет также подпространство $W_3{=}\mathcal{L}\{1,\ e^{mx},\ e^{-mx}\}$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

Пример 4. Предельное уравнение быстрой диффузии (1.26) обладает точным решением

$$u(x,t) = \left[\frac{C_2}{m}\operatorname{tg} s(t) + \sec s(t)\left(C_3e^{mx} + \frac{C_2^2}{4m^2C_3}e^{-mx}\right)\right]^{-1}.$$

Здесь $s(t) = mC_2(t + C_1)$, $m \neq 0$, C_1, $C_2 \neq 0$, $C_3 \neq 0$ — произвольные постоянные.

Утверждение 8. *Подпространства* $W_3{=}\mathcal{L}\{1,\ \mathrm{sh}(mx),\ \mathrm{ch}(mx)\}$ *и* $W_3{=}\mathcal{L}\{1,\ \sin(mx),\ \cos(mx)\}$ *инвариантны относительно дифференциального оператора (1.27).*

Схема доказательства этого утверждения аналогична доказательству утверждения 7, поэтому приводить его не будем.

Пример 5. Предельное уравнение быстрой диффузии (1.26) обладает точными решениями

$$u(x,t) = \left[a_0(t) + a_1(t)\,\mathrm{sh}(mx) + a_2(t)\,\mathrm{ch}(mx)\right]^{-1},$$

$$u(x,t) = \left[a_0(t) + a_1(t)\sin(mx) + a_2(t)\cos(mx)\right]^{-1},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, а функции $a_i(t)\,(i = \overline{0,2})$ удовлетворяют, соответственно, динамическим системам

$$a_0' = m^2\left(a_2^2 - a_1^2\right), \quad a_1' = m^2 a_0 a_1, \quad a_2' = m^2 a_0 a_2, \tag{1.28}$$

$$a_0' = -m^2\left(a_1^2 + a_2^2\right), \quad a_1' = -m^2 a_0 a_1, \quad a_2' = -m^2 a_0 a_2. \tag{1.29}$$

Система ОДУ (1.28) имеет общее решение вида

$$a_0(t) = \frac{1}{mc_1}\,\mathrm{tg}\left(\frac{m}{c_1}t + c_2\right), \quad a_1(t) = \pm c_3\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{m}{c_1}t + c_2\right)},$$

$$a_2(t) = \pm\frac{\sqrt{1 + m^2 c_1^2 c_3^2}}{mc_1}\,\frac{1}{\cos\left(\frac{m}{c_1}t + c_2\right)},$$

где $c_1 \neq 0$, c_2, c_3 — произвольные постоянные. При интегрировании системы ОДУ (1.29) функция $a_2(t)$ получается комплексной, поэтому общее решение ОДУ (1.29) приводить здесь не будем.

3. Точные решения уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком)

В этом разделе рассматривается одномерное уравнение нелинейной диффузии с источником (стоком) специального вида

$$u_t = (u^\lambda u_x)_x + \alpha u^{1-\lambda} + \beta u, \tag{2.1}$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}$ — произвольные параметры. Выбор данного источника (стока) в правой части уравнения (2.1) обусловлен тем, что заменой (1.5) оно сводится к нелинейному эволюционному уравнению $v_t = F[v]$ с дифференциальным оператором вида

$$F[v] \equiv vv_{xx} + \frac{1}{\lambda}v_x^2 + \alpha\lambda + \beta\lambda v. \tag{2.2}$$

Этот оператор отличается от (1.7) наличием двух слагаемых $\alpha\lambda$, $\beta\lambda v$ степени не выше первой и также является квадратичным. Поэтому можно ожидать, что при определенных условиях линейное подпространство $W_k = \mathcal{L}\{x^{m_1}, \ldots, x^{m_k}\}$, $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ m_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, k})$ будет инвариантным относительно оператора (2.2). Легко показать, что подпространство $W_3 = \mathcal{L}\{1, x, x^2\}$ является инвариантным относительно оператора (1.29) при любом параметре $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Для подпространств W_k размерности $k \geq 3$ справедливы следующие высказывания

Утверждение 9. *Линейное подпространство* $W_4 = \mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3\}$ *инвариантно относительно дифференциального оператора (2.2), тогда и только тогда, когда* $\lambda = -3/2$.

Утверждение 10. *Линейное подпространство* $W_5 = \mathcal{L}\ \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ *инвариантно относительно дифференциального оператора (2.2), тогда и только тогда, когда* $\lambda = -4/3$.

Доказательство этих утверждений аналогично схемам доказательств соответствующих утверждений **1, 3**. Следствием этих утверждений и леммы **1** являются утверждения

Утверждение 11. *Уравнение нелинейной диффузии с источником (стоком)*

$$u_t = \left(u^{-3/2} u_x\right)_x + \alpha u^{5/2} + \beta u,$$

обладает точным решением

$$u(x,t) = \left[a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3\right]^{-2/3},$$

где функции $a_i(t)$, $(i = \overline{0, 3})$ *удовлетворяют системе ОДУ*

$$a_0' = 2a_0a_2 - \frac{2}{3}a_1^2 - \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta a_0, \quad a_1' = 6a_0a_3 - \frac{2}{3}a_1a_2 - \frac{3}{2}\beta a_1,$$

$$a_2' = 2a_1a_3 - \frac{2}{3}a_2^2 - \frac{3}{2}\beta a_2, \quad a_3' = -\frac{3}{2}\beta a_3.$$

Утверждение 12. *Уравнение нелинейной диффузии с источником (стоком)*

$$u_t = \left(u^{-4/3} u_x\right)_x + \alpha u^{7/3} + \beta u, \tag{2.3}$$

имеет точное решение

$$u(x,t) = \left[a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^4\right]^{-3/4},$$

где функции $a_i(t)$, $(i = \overline{0, 4})$ *определяются из системы ОДУ*

$$a_0' = 2a_0a_2 - \frac{3}{4}a_1^2 - \frac{4}{3}\alpha - \frac{4}{3}\beta a_0, \quad a_1' = 6a_0a_3 - a_1a_2 - \frac{4}{3}\beta a_1,$$

$$a_2' = 12a_0a_4 - a_2^2 + \frac{3}{2}a_1a_3 - \frac{4}{3}\beta a_2, \quad a_3' = 6a_1a_4 - a_2a_3 - \frac{4}{3}\beta a_3,$$

$$a_4' = 2a_2a_4 - \frac{3}{4}a_3^2 - \frac{4}{3}\beta a_4.$$

Пример 6. Уравнение (2.3) с параметром $\beta \equiv 0$ имеет точное автомодельное решение вида

$$u(x,t) = \left[\frac{15x^4}{16\alpha(C_1-t)^3} + \frac{3x^2}{2(C_1-t)} + \frac{\alpha}{3}(C_1-4)\right]^{-3/4},$$

где C_1 — произвольная постоянная.

В заключение сформулируем утверждение, в котором построено точное решение для уравнения нелинейной диффузии с неавтономным источником (стоком) специального вида.

Утверждение 13. *Уравнение нелинейной диффузии с источником (стоком) специального вида*

$$u_t = \left(u^\lambda u_x\right)_x + \alpha u^{1-\lambda} + \beta u + \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} f(t)g(t)x^{-\frac{2+\lambda}{1+\lambda}}, \tag{2.4}$$

обладает точным решением

$$u(x,t) = \left[f(t) + h(t)x^2 + g(t)x^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{2.5}$$

где функции $f(t)$, $h(t)$, $g(t)$ удовлетворяют динамической системе

$$f' = 2fh + \lambda\alpha + \lambda\beta f, \quad h' = \frac{2(2+\lambda)}{\lambda}h^2 + \lambda\beta h,$$

$$g' = \frac{(2+\lambda)(2\lambda+3)}{(1+\lambda)^2}hg + \lambda\beta g.$$

В справедливости данного утверждения можно убедиться непосредственной подстановкой функции (2.5) в уравнение (2.4).

Список литературы

1. Рудых Г. А. Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии / Г.А. Рудых, Э.И. Семенов // Сиб. матем. журн. — 1997. Т. 38, № 5. — С. 1130–1139.
2. Рудых Г. А. О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком) / Г. А. Рудых, Э. И. Семенов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. Т. 38, № 6. – С. 971–977.
3. Свирщевский С. Р. Нелинейные дифференциальные операторы первого и второго порядков, обладающие инвариантными линейными пространствами максимальной размерности / С. Р. Свирщевский // ТМФ. – 1995. – Т. 105, № 2. – С. 198–207.
4. Galaktionov V. A. Invariant subspaces and new explicit solution to evolution equations with quadratic nonlinearities / V. A. Galaktionov // School of Mathematics. Univ.Bristol. – 1991. Report № AM-91-11. – 39 p.

5. Galaktionov V. A. Invariant subspaces and new explicit solution to evolution equations with quadratic nonlinearities / V. A. Galaktionov // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1995. Vol. 125A. – P. 225–246.
6. Galaktionov V. A. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics / V. A. Galaktionov, S. R. Svirshchevskii // Chapman and Hall/CRC, 2006. – 528 p.
7. Галактионов В. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями / В. А. Галактионов, С. А. Посашков // Журн. вычис. математики и мат. физики. – 1989. Т. 29, № 4. – С. 497–506.
8. Галактионов В. А. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями / В. А. Галактионов, С. А. Посашков, С. Р. Свирщевский // Дифференц. уравнения. – 1995. Т. 31, № 2. – С. 253–261.
9. Титов С. С. О представлении решений линейных уравнений в виде конечных сумм / С. С. Титов // Мат. заметки. – 1976. – Т. 20, № 3. – С. 359–363.
10. Титов С. С. О решениях нелинейных уравнений в частных производных в виде многочленов по одной из переменных / С. С. Титов // Численные методы механики сплошной среды. – 1977. – Т. 8, № 1. – С. 144–149.
11. Титов С.С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики / С. С. Титов // Аэродинамика. – Саратов : Сарат. ун-т, 1988. – С. 104–110.
12. Титов С. С. Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств / С. С. Титов // Препринт. Ур. гос. Архитектурно-художественная академия. – Екатеринбург, 1999. – 266 с.
13. Титов С. С. Исследование многочленных решений уравнений фильтрации газа с целым показателем адиабаты / С. С. Титов, В. А. Устинов // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной Среды : сб. науч. тр. АН СССР. Урал. отд-ние. Ин-т математики и механики. – 1985. – С. 64–79.
14. Зельдович Я. Б. К теории распространения тепла при теплопроводности зависящей от температуры / Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец // Сборник, посвящ. 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. – М. : Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.
15. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористых средах / Г. И. Баренблатт // ПММ. – 1952. – Т. 16, № 1. – С. 67–68.
16. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1987. – 480 с.
17. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер // М. -Л. : ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.
18. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
19. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М. : Мир, 1989. – 639 с.
20. Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником / В. А. Дородницын // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1982. – Т. 22, № 6. – С. 1393–1400.
21. Янке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1977.
22. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1968. – 688 с.

23. Пухначев В. В. Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений / В. В. Пухначев // ДАН СССР. – 1987. – Т. 294, № 3. – С. 535–538.
24. Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнения математической физики: Точные решения / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин // М. : Физматлит, 2002. – 432 с.
25. Полянин А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.

G. A. Rudykh, E. I. Semenov

Construction of exact solutions of one-dimensional nonlinear diffusion method of linear invariant subspaces

Abstract. In this paper, using the method of linear subspaces invariant construct explicit exact solutions of one-dimensional nonlinear diffusion equation.

Keywords: nonlinear diffusion equation; invariant subspace; exact solutions.

Рудых Геннадий Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, бульвар Гагарина, 20, тел.: (3952)242214 (rudykh@icc.ru)

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.: (3952) 453099 (edwseiz@gmail.com)

Gennadii Rudykh, professor, Institute of Mathematics, Economics and Information Science, Irkutsk State University, 20, Gagarin blvd., Irkutsk, 664003, Russia; Phone: (3952)242214 (rudykh@icc.ru)

Edward Semenov, senior researcher, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov str., Irkutsk, 664033, Russia; Phone: (3952) 453099 (edwseiz@gmail.com)