Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 4. С. 128—137

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.983.5

Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения *

М. В. Фалалеев
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе с помощью теории фундаментальных оператор-функций исследована задача Коши для интегро-дифференциального уравнения специального вида в банаховых пространствах. Построена соответствующая фундаментальная оператор-функция, получены условия совпадения классического и обобщенного решений. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах начально-краевых задач математической теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банахово пространство; обобщенная функция; жорданов набор; фредгольмов оператор; фундаментальная оператор-функция.

1. Введение

Среди современных актуальных математических моделей выделяются модели процессов, при исследовании которых необходимо учитывать их состояние в предыдущий промежуток времени. Таковыми, например, являются колебательные процессы в вязкоупругих средах, описываемые неклассическими начально-краевыми задачами математической физики для интегро-дифференциальных уравнений. С наиболее общих позиций такие задачи можно исследовать путем редукции к вырожденным интегро-дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах. Анализируя имеющиеся модели по этому направлению, можно выделить специальный класс, в котором ядро интегральной составляющей уравнения является линейной комбинацией операторных коэффициентов его дифференциальной части. Поэтому в данной заметке

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, госконтракт № 14.B37.21.0365

исследуется задача Коши вида

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t (\alpha(t-s)A + \beta(t-s)B)u(s)ds + f(t) \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}. \tag{2}$$

Здесь B, A – замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из E_1 в E_2, E_1, E_2 – банаховы пространства, оператор B – фредгольмов, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – достаточно гладкие числовые функции.

2. Вспомогательные сведения

Далее будем предполагать, что $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$. Введем обозначения: $\{\varphi_i\} \in E_1$ – базис ядра оператора B, $\{\psi_i\} \in E_2^*$ – базис ядра сопряженного оператора B^*, $i = 1, \ldots, n$, $\{z_i\} \in E_2$, и $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ – соответствующие им биортогональные системы элементов, тогда существует ограниченный $\Gamma = \left(B + \sum\limits_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i\right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ оператор Треногина-Шмидта [1]. Проекторы P и Q, задаваемые формулами

$$P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i,$$

удовлетворяют равенствам [1]:

$$\Gamma B = I - P, \quad B\Gamma = I - Q. \tag{3}$$

Также будем предполагать, что существуют полные A-жорданов набор [1] $\left\{\varphi_i^{(j)}\right\} \in E_1$ оператора B и A^*-жорданов набор $\left\{\psi_i^{(j)}\right\} \in E_2^*$ оператора B^*, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$. Соответствующие определения и формулы для присоединенных элементов $\left\{\varphi_i^{(j)}\right\}$ и $\left\{\psi_i^{(j)}\right\}$ можно найти в [1] и [2]. Введем еще один проектор

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},$$

тогда справедливы следующие операторные равенства [2]

Лемма 1.

$$Q(A\Gamma)^k \left[I - \tilde{Q}\right] \equiv 0, \quad k \in N, \tag{4}$$

$$A\Gamma\left[I-\tilde{Q}\right]B-\left[I-\tilde{Q}\right]A\equiv 0, \tag{5}$$

$$\Gamma\left[I-\tilde{Q}\right]B+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}\equiv I. \tag{6}$$

Пусть $\mathcal{R}(t)$ – резольвента ядра $k(t)=\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*\beta(t)\theta(t)$, $\Lambda(t)$ – резольвента ядра $(-\alpha(t))$, тогда выполняются следующие сверточные равенства (первые два из которых доказаны в [2])

Лемма 2.

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)*\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)=\delta(t),$$

$$\frac{t^{(k+1)N-1}}{((k+1)N-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k+1}*\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)=$$

$$=\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k},\ \ k\geq 1,$$

$$(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))*\Big(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\Big)=\delta(t),$$

$$(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))*\Big(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\Big)^{k+1}=\Big(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\Big)^{k},\quad k\geq 1,$$

где под k-ой степенью обобщенной функции понимается ее k-кратная свертка с собой, а нулевая степень обобщенной функции есть $\delta(t)$.

3. Фундаментальная оператор-функция вырожденного интегро-дифференциального оператора

Теорема 1. *Если фредгольмов оператор B имеет полный A-жорданов набор, то интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))=B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-(\alpha(t)A+\beta(t)B)\theta(t)=\big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\big)B-(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))A$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ (обобщенных функций с ограниченным слева носителем) фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t)=\mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I-\tilde{Q}\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)^{k}*\Big(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\Big)^{k+1}\right], \tag{7}$$

где

$$\mathcal{U}_N(t)\theta(t) = \Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t) =$$

$$= \Gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k * (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t))^{k-1}(A\Gamma)^{k-1}.$$

Доказательство. Согласно определения фундаментальной оператор-функции [3], [4] для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость следующих двух равенств:

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * u(t) = u(t) \ \text{ для всех } \ u(t) \in K'_+(E_2), \tag{8}$$

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = v(t) \ \text{ для всех } \ v(t) \in K'_+(E_1). \tag{9}$$

Действительно, в силу равенства (3) для проектора Q

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right] =$$

$$= (I-Q)\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right] -$$

$$-(\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)) * A\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right].$$

В силу сверточных равенств леммы 2

$$\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t) = I\delta(t) + (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)) * A\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t),$$

поэтому

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right] =$$

$$= \Big[(I-Q)\Big(I\delta(t) + (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)) * A\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t)\Big) -$$

$$-(\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)) * A\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t)\Big]\left[I - \tilde{Q}\right] =$$

$$= \left[I - \tilde{Q}\right]\delta(t) - (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)) * QA\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right].$$

Но по формуле (4) (см. вспомогательную лемму 1)

$$QA\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right] \equiv 0,$$

следовательно

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right] = \left[I - \tilde{Q}\right]\delta(t).$$

Далее прямыми выкладками находим

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \Big(\mathcal{E}_N(t) - \mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right]\Big) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}*\left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k}*(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))*\left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right].$$

Так как $B\varphi_i^{(1)}=0$, то по лемме 2 получаем

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\left(\mathcal{E}_N(t)-\mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I-\tilde{Q}\right]\right)=$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1}*\left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k}*\left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k}\right]+\tilde{Q}\delta(t)$$

или

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\left(\mathcal{E}_N(t)-\mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I-\tilde{Q}\right]\right)=$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle\left(B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k}*\left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k}\right]+\tilde{Q}\delta(t).$$

Отсюда в силу определения $A-$жордановой цепочки [1], [2]

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\left(\mathcal{E}_N(t)-\mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I-\tilde{Q}\right]\right)=\tilde{Q}\delta(t),$$

таким образом $\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t)$, т.е. равенство (8) доказано.

С другой стороны по лемме 2 и формуле (9) получаем

$$\mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I-\tilde{Q}\right] * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$$

$$= \Gamma\left(I\delta(t) + \tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t) * (\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))A\Gamma\right)\left[I-\tilde{Q}\right]B-$$

$$-\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t) * (\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))\left[I-\tilde{Q}\right]A = \Gamma\left[I-\tilde{Q}\right]B\delta(t)+$$

$$+\Gamma\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\theta(t) * (\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))\left(A\Gamma\left[I-\tilde{Q}\right]B - \left[I-\tilde{Q}\right]A\right) =$$

$$= \Gamma\left[I-\tilde{Q}\right]B\delta(t).$$

Поскольку $B^*\psi_i^{(1)} = 0$, то по лемме 2 получаем

$$\left(\mathcal{E}_N(t) - \mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I-\tilde{Q}\right]\right) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=2}^{p_i-k-1}\left\langle\cdot, B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k+1} * \left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k+1}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k} * \left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot, B^*\psi_i^{(j+1)} - A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)^{k} * \left(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t)\right)^{k}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t)$$

Отсюда по определению A^*–жорданова набора [1] вытекает равенство

$$\left(\mathcal{E}_N(t) - \mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right]\right) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t),$$

из которого по формуле (6) получаем равенство

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$$

$$= \left(\Gamma\left[I - \tilde{Q}\right]B + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)\delta(t) = I\delta(t),$$

завершающее доказательство формулы (9) и теоремы в целом. □

Наиболее простой вид формула (7) для фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$ будет иметь при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, а именно:

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \mathcal{U}_N(t)\theta(t)\left[I - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \cdot, \psi_i^{(1)}\right\rangle A\varphi_i^{(1)}\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\left\langle \cdot, \psi_i^{(1)}\right\rangle \varphi_i^{(1)}\Big(\delta(t) + \Lambda(t)\theta(t)\Big).$$

В этом случае единственным обобщенным решением задачи Коши (1)–(2) в классе $K'_+(E_1)$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем является регулярная обобщенная функция вида

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \Big(f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) +$$

$$+ \cdots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)\Big). \tag{10}$$

Прямыми вычислениями находим

$$\tilde{u}^{(j)}(t)\Big|_{t=0} = \Gamma Bu_j - \sum_{i=1}^{n}\Big\langle f^{(j)}(0) + \Lambda^{(j-1)}(0)f(0) + \Lambda^{(j-2)}(0)f'(0) +$$

$$+ \cdots + \Lambda(0)f^{(j-1)}(0), \psi_i^{(1)}\Big\rangle\varphi_i^{(1)} = u_j - \sum_{i=1}^{n}\Big\langle Au_j + f^{(j)}(0) + \Lambda(0)f^{(j-1)}(0) +$$

$$+ \cdots + \Lambda^{(j-2)}(0)f'(0) + \Lambda^{(j-1)}(0)f(0), \psi_i^{(1)}\Big\rangle\varphi_i^{(1)}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

отсюда в силу линейной независимости системы элементов $\{\varphi_i^{(1)}\}$ получаем

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 длины всех A-жордановых цепочек равны 1, то задача Коши (1)–(2) имеет в классе* $C^N(t \geq 0, E_1)$ *единственное решение вида (10) тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Big\langle Au_j + f^{(j)}(0) + \Lambda(0)f^{(j-1)}(0) + \cdots + \Lambda^{(j-2)}(0)f'(0) +$$

$$+\Lambda^{(j-1)}(0)f(0), \psi_i^{(1)} \Big\rangle = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \ \ i = 1, \ldots, n. \qquad (11)$$

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 $\beta(t) \equiv 0$, то формула (7) совпадает с основным результатом работы [5], если $\alpha(t) \equiv 0$, то с результатом работы [2], а если $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$, то работы [3].

Замечание 2. Результат теоремы 1 допускает обобщение на случаи, когда оператор B нетеров или операторный пучок $(B - \lambda A)$ спектрально, секториально или радиально ограничен [6].

4. Приложения

Исследуем две начально-краевые задачи из теории колебаний в вязкоупругих средах [7].

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)\, u_t - (\mu - \Delta)\, u - \int_0^t g(t-\tau)\,(\gamma - \Delta)\, u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \qquad (12)$$

где $g(t)$, $f(t, \bar{x})$ – заданные функции, $u = u(t, \bar{x})$ – искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset R^m$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ – оператор Лапласа, $u = u(t, \bar{x})$ определена на цилиндре $R_+ \times \Omega$ и удовлетворяет начально-краевым условиям

$$u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \ \ \bar{x} \in \Omega; \ \ u\Big|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0, \ \ t \geq 0. \qquad (13)$$

Задача Коши – Дирихле (12)–(13) редуцируется к задаче Коши (1)–(2) если выбрать банаховы пространств E_1 и E_2 как соболевские, т.е.

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x}) \in W_2^2(\Omega) : \ v\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \ \ E_2 \equiv W_2(\Omega), \qquad (14)$$

а операторы A и B определить формулами

$$B = \lambda - \Delta, \quad A = \mu - \Delta, \quad \lambda \in \sigma(\Delta), \quad \mu \neq \lambda. \qquad (15)$$

В этом случае

$$\alpha(t) = \frac{\gamma - \mu}{\lambda - \mu} g(t), \quad \beta(t) = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda - \mu} g(t),$$

оператор B фредгольмов, размерность n ядра оператора B равна кратности собственного значения $\lambda \in \sigma(\Delta)$ оператора Лапласа, длины всех $A-$жордановых цепочек базисных элементов ядра $\varphi_i \in N(B)$, $i = 1, \ldots, n$ равны 1, здесь $\lambda\varphi_i = \Delta\varphi_i$, $\varphi_i\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0$, т.е. выполнены все условия теоремы 2. Таким образом справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть для задачи Коши – Дирихле (12)–(13) пространства E_1 и E_2 выбраны как в (14), операторы A и B определены как в (15), $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда задача Коши – Дирихле (12)–(13) однозначно разрешима в классе $C^1(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начально-краевые условия (13) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям*

$$\Big\langle (\mu - \lambda) u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \Big\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)\, u_{tt} - \delta\Delta u_t - (\mu - \Delta)\, u - \int\limits_0^t g(t-\tau)\,(\gamma - \Delta)\, u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \tag{16}$$

с начально-краевыми условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t\Big|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega; \quad u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0. \tag{17}$$

Положим в уравнении (16) $\delta = 0$, пространства E_1 и E_2 выбраны как в (14), операторы A и B как в (15), тогда справедлива

Теорема 4. *Пусть для задачи Коши – Дирихле (16)–(17) $\delta = 0$, пространства E_1 и E_2 и операторы A и B выберем как в (14) и (15), $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда задача Коши – Дирихле (16)–(17) однозначно разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начально-краевые условия (17) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям*

$$\Big\langle (\mu - \lambda)^2 u_1(\bar{x}) + (\mu - \lambda) f_t'(0, \bar{x}) + (\gamma - \mu) g(0) f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \Big\rangle = 0,$$

$$\Big\langle (\mu - \lambda) u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \Big\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Список литературы

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 90–102.
3. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.
4. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov N, B. Loginov B, A. Sinitsyn and M. Falaleev – Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 2002. – 548 p.
5. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 10. – С. 68–79.
6. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht- Boston-Köln-Tokyo : VSP, 2003.
7. Cavalcanti M. M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 24. – P. 1043–1053.

M. V. Falaleev

Singular integro-differential equations of the special type in Banach spaces and it's applications

Abstract. In this paper Cauchy problem for singular integro- differential equation of the special type in Banach spaces is investigated with help of the theory of fundamental operator-functions. The corresponding fundamental operator-function is constructed, the conditions for equal generalized with classical solution are describet. The abstract results are illustrated by examples of the initial-bounbary problems of the mathematical theory of viscoelasticity.

Keywords: Banach spaces; generalized function; Jordan set; Fredholm operator; fundamental operator-function.

Фалалеев Михаил Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)521298, 512285 (mihail@ic.isu.ru)

Falaleev Mikhail, Irkutsk State University, 1, K. Marks st., Irkutsk, 664003, professor, Phone: (3952)521298, 512285 (mihail@ic.isu.ru)