Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 4. С. 48—52

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 512.541:512.552

Абелевы группы с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов *

В. М. Мисяков
Томский государственный университет

Аннотация. Описываются абелевы группы из некоторого класса, имеющие самоинъективный цент кольца эндоморфизмов.

Ключевые слова: абелева группа; самоинъективный цент кольца эндоморфизмов.

В монографии [1] сформулирована проблема №16: «Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?». В этой статье поставленная задача решается для абелевых групп с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов из некоторого класса $\mathbb{K}$. Также приводится пример абелевой группы, не принадлежащей классу $\mathbb{K}$ и имеющей самоинъективный центр кольца эндоморфизмов.

Заметим, что редуцированные абелевы группы, кольцо эндоморфизмов которых самоинъективно справа, были описаны в [2]. Произвольные абелевы группы, кольцо эндоморфизмов которых самоинъективно слева (справа), были исследованы в [3]. Описание нередуцированных абелевых групп, кольцо эндоморфизмов которых самоинъективно справа и произвольных абелевых групп, кольцо эндоморфизмов которых самоинъективно слева, было независимо получено в [4]. В [3] и [4] было показано, что самоинъективность слева кольца эндоморфизмов произвольной абелевой группы влечёт самоинъективность справа.

Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми. Понятия и обозначения, которые не поясняются, являются стандартными, их можно найти, например, в [1], [5], [6] или [7].

Введем некоторые обозначения: $\mathrm{E}(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A; $C(\mathrm{E}(A))$ — центр кольца $\mathrm{E}(A)$; Q — группа рациональных чисел; $Z(p^\infty)$ — квазициклическая группа; $Z(p^{k_p})$ — циклическая груп-

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

па порядка p^{k_p}; $T(A)$ — периодическая часть группы A; $T_p(A)$ — p-компонента периодической части группы A; $P(A)$ — множество всех простых чисел p таких, что $T_p(A) \neq 0$; $h_p(a)$ — p-высота элемента a.

Напомним следующее понятие.

Определение 1. *Кольцо R называется самоинъективным справа (слева), если модуль R_R ($_RR$) инъективен. Кольцо R, самоинъективное справа и слева, называется самоинъективным.*

Замечание 1. Поскольку для любого коммутативного кольца R следует равенство модулей R_R и $_RR$, то, используя критерий Бэра [7, гл. 5, §5.7, теорема 5.7.1], легко показать, что из самоинъективности справа такого кольца следует самоинъективность слева и наоборот.

Нам понадобятся два результата из [4] и [8] соответственно.

Теорема 1. *Для группы A следующие условия эквивалентны:*
1) $E(A)$ самоинъективно слева и справа;
2) а) для каждого простого числа p существуют целые неотрицательные числа m_p, n_p, $n_p \neq 0$ такие, что $T_p(A) = \bigoplus\limits_{m_p} Z(p^{n_p})$;
б) если A — нередуцированная группа, то $A = \bigoplus\limits_{n} Q \bigoplus T(A)$;
с) если A — редуцированная группа, то A является сервантной, вполне характеристической подгруппой в $\prod\limits_{p \in P(A)} T_p(A)$.

Предложение 1. *Пусть $G = A \bigoplus B$ — нередуцированная группа, где A — редуцированная, а B — делимая группы. Кольцо $\mathrm{E}(G)$ является коммутативным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) $B = Q$ либо $B = \bigoplus\limits_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^\infty)$;
2) если $A \neq 0$, то $A = \bigoplus\limits_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$, причём если
$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p}) \text{ и } B = \bigoplus_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^\infty), \text{ то } P(A) \bigcap P(B) = \emptyset.$$

Определение 2. *Будем говорить, что группа A принадлежит классу $\mathbb{K}$, если $C(E(A))_{C(E(A))}$ — существенный подмодуль модуля $E(A)_{C(E(A))}$.*

Сформулируем и докажем основной результат данной работы.

Теорема 2. *Для группы A, принадлежащей классу $\mathbb{K}$, следующие условия эквивалентны:*

1) $C(E(A))$ — самоинъективное кольцо;

2) а) $T_p(A) = Z(p^{n_p})$ для каждого $p \in P(A)$, где $n_p \in N$;

б) если A — нередуцированная группа, то $A = Q \bigoplus T(A)$;

с) если A — редуцированная группа, то A является сервантной, вполне характеристической подгруппой в $\prod\limits_{p \in P(A)} T_p(A)$.

Доказательство. Пусть $S = C(E(A))$ и $R = E(A)$. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть S — самоинъективное кольцо. Тогда из инъективности модуля S_S следует, что $R_S = S_S \bigoplus V_S$ [7, гл. 5, §5.3, теорема 5.3.1]. Поскольку группа A принадлежит классу $\mathbb{K}$, то S_S — существенный подмодуль модуля R_S и, следовательно, $R_S = S_S$. Таким образом, R — коммутативное, самоинъективное кольцо. Из коммутативности кольца R следует, что $T_p(A)$ — коциклическая группа для каждого $p \in P(A)$ [1, гл. 3, §19, предложение 19.2]. Тогда по теореме 1 из самоинъективности кольца R получаем условие 2) а).

Если A — нередуцированная группа, то из теоремы 1 и предложения 1 следует справедливость условия 2) б). Если A — редуцированная группа, то из теоремы 1 следует условие 2) с).

2) $\Rightarrow$ 1). Самоинъективность кольца R получаем из теоремы 1. Если A — нередуцированная группа, то из предложения 1 имеем коммутативность кольца R. Пусть A — редуцированная группа. Покажем, что группа A не имеет ненулевых элементов, высота которых равна бесконечности для всякого $p \in P(A)$. Допустим противное, то есть пусть существует $0 \neq a \in A$ такой, что $h_p(a) = \infty$ для каждого $p \in P(A)$. Пусть $< a >_*$ — сервантная подгруппа, порождённая элементом a. Так как A является сервантной подгруппой в $\prod\limits_{p \in P(A)} T_p(A)$ и $q(\prod\limits_{p \in P(A)} T_p(A)) = \prod\limits_{p \in P(A)} T_p(A)$ для любого простого числа $q \notin P(A)$, то $< a >_*$ будет делимой подгруппой в A, что противоречит редуцированности группы A. Таким образом, группа A не имеет ненулевых элементов, высота которых равна бесконечности для всякого $p \in P(A)$. Тогда R — коммутативное кольцо [1, гл. 3, §19, теорема 19.4]. Таким образом, в обоих случаях R — коммутативное, самоинъективное кольцо, то есть $C(E(A))$ — самоинъективное кольцо. □

Приведём пример группы, не принадлежащей классу $\mathbb{K}$ и имеющей самоинъективный центр кольца эндоморфизмов.

Пример 1. Рассмотрим группу $A = Z(2) \oplus Z(2)$, тогда $\mathrm{E}(A) \cong$ $\cong \begin{pmatrix} Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}$ [6, теорема 106.1], где Z_2 — кольцо классов вычетов по модулю 2. Отождествляя кольцо $\mathrm{E}(A)$ с данным кольцом матриц, получим, что $\mathrm{E}(A)_S = S_S \oplus T_S$, где

$$S = C(\mathrm{E}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Кольцо S имеет только два идеала:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Поскольку следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \arrow[dl, "\psi"] \\ & S_S & \end{tikzcd} \qquad \text{и} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & S \arrow[dl, "\gamma"] \\ & S_S & \end{tikzcd}$$

коммутативны, то S — самоинъективное кольцо [7, гл. 5, §5.7, теорема 5.7.1], где α — тождественное вложение, φ, ψ — нулевые гомоморфизмы, β — произвольный гомоморфизм и $\gamma = \beta$.

Рассматриваемый в теореме 2 класс $\mathbb{K}$ является достаточно широким, в частности, он содержит все абелевы группы, имеющие коммутативное кольцо эндоморфизмов. Задача описания абелевых групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов является сложной и на данный момент открытой проблемой.

Список литературы

1. Крылов П. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. – Томск : ТГУ, 2002. – 464 с.
2. Rangaswamy K. M. Abelian groups with self-injective endomorphism rings / K. M. Rangaswamy // Lecture Notes Math. – 1974. – Vol. 372. – P. 595–604.
3. Иванов А. В. Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием / А. В. Иванов // Абелевы группы и модули. – 1982. – С. 93–109.
4. Albrecht U. Abelian groups with self-injective endomorphism rings / U. Albrecht // Communications in Algebra. – 1987. – Vol. 15(12). – P. 2451–2471.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.

6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1977. – Т. 2. – 415 с.
7. Каш Ф. Модули и кольца / Ф. Каш. – М. : Мир, 1981. – 368 с.
8. Мисяков В. М. Об одном свойстве кольца эндоморфизмов абелевой группы / В. М. Мисяков // Вестн. ТГУ. Математика и механика. – 2010. – №3(11). – С. 38–46.

V. M. Misyakov

Abelian groups with self-injective center of the endomorphism ring

Abstract. Abelian groups belonging to a particular class and having self-injective center of the endomorphism ring are described.

Keywords: abelian group; self-injective center of the endomorphism ring.

Мисяков Виктор Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный университет, 634050, Томск, пр. Ленина, 36 тел.: (3822)460369 (mvm@mail.tsu.ru)

Misyakov Viktor, Tomsk State University, 36 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050 associate professor, Phone: (3822)460369 (mvm@mail.tsu.ru)