Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 2. С. 84—90

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.7

Типы базисов суперклонов ранга 2 *

И. А. Яковчук
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. В статье представлена классификация мультиопераций на основе их вхождения в максимальные суперклоны и перечислены все типы базисов суперклонов ранга 2.

Ключевые слова: суперклон; мультиоперация; базис; максимальный суперклон.

1. Введение

Проблема функциональной полноты системы является одним из важнейших вопросов алгебры логики. Большой вклад в решение данного вопроса внес Э. Пост. В частности, он показал, что в множестве булевых функций существует точно 5 максимальных классов. Известно, что в зависимости от вхождения в максимальные классы все функции можно классифицировать в классы эквивалентности, что приводит к естественной классификации базисов. Так, в статье [3] представлены 15 классов булевых функций и перечислены все типы базисов. Всего таких типов 42: один тип ранга 1, 17 типов ранга 2, 22 типа ранга 3, 2 типа базисов ранга 4.

В последнее время исследуются такие функциональные системы как суперклоны. В работе представлены свойства максимальных суперклонов ранга 2, на основе которых даны классификация мультиопераций и описание всех типов базисов булевых суперклонов.

2. Основные понятия и определения

Пусть $B(A)$ — множество всех подмножеств A, в том числе $\varnothing$. Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A, где $A = \{1, 2\}$. Множество всех мультиопераций на $A = \{1, 2\}$ обозначим F.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00351.

Мультиоперации $f \in F$ представим как отображения

$$f : \{1, 2\}^n \to \{0, 1, 2, 3\},$$

получаемых из f при кодировке

$$\{1\} \to 1; \{2\} \to 2; \ \ \varnothing \to 0; \ \ \{1, 2\} \to 3.$$

Клоном будем называть множество операций, замкнутое относительно суперпозиции, содержащее все проекции [1].

Суперклон — множество мультиопераций, замкнутое относительно суперпозиции и оператора разрешимости, содержащее все проекции [1].

Система мультиопераций называется полной в F, если любую мультиоперацию можно представить в виде суперпозиции мультиопераций данной системы. Полная и независимая система мультиопераций называется базисом в F.

3. Основные результаты

Для нахождения всех базисов множества мультиопераций воспользуемся свойством антиизоморфности решетки клонов и решетки суперклонов [1], согласно которому максимальными суперклонами являются минимальные клоны $S, F_1, F_2, M_1, M_2, L, R$. Определим эти суперклоны через порождающие их мультиоперации.

$R = \langle(31), (21)\rangle$
$L = \langle(2112), (1)\rangle$
$S = \langle(2331)\rangle$
$M_1 = \langle(2), (3332), (31)\rangle$
$M_2 = \langle(1), (1333), (23)\rangle$
$F_1 = \langle(31), (1333)\rangle$
$F_2 = \langle(23), (3332)\rangle$

Пусть $g \in F$. Определим функцию $\phi(g) = (a_1 ... a_7)$, $a_i = 0$, если $g \in H_i$ и $a_i = 1$, если $g \notin H_i$, где $H_1 = S$, $H_2 = F_1$, $H_3 = F_2$, $H_4 = M_1$, $H_5 = M_2$, $H_6 = L$, $H_7 = R$.

Очевидно, что в зависимости от принадлежности к максимальным суперклонам все множество мультиопераций разделится на классы эквивалентности, характеризуемые функцией $\phi(g)$.

Функция $\phi(g)$ не может принимать любые из 128 возможных значений. Данные ограничения описываются следующим предложением.

Предложение 1. *В F справедливы следующие вложения:*
1. $S \cap F_1 \subseteq F_2$;
2. $S \cap F_2 \subseteq F_1$;

3. $S \cap M_1 \subseteq M_2$;
4. $S \cap M_2 \subseteq M_1$;
5. $S \cap R \subseteq L$;
6. $R \cap F_1 \subseteq M_1$;
7. $R \cap F_2 \subseteq M_2$;
8. $M_1 \cap M_2 \subseteq R$;
9. $L \cap M_1 \subseteq M_2$;
10. $L \cap M_2 \subseteq M_1$;
11. $L \cap F_1 \cap F_2 \subseteq S$;
12. $S \cap M_1 \subseteq F_1$.

Доказательство. Для доказательства данного предложения используется связь Галуа между клонами и суперклонами, согласно которой можно определить максимальные суперклоны через понятие полуперестановочности операции и мультиоперации [2].

Если для любых элементов $a_1^1, ..., a_m^1, ..., a_1^n, ..., a_m^n$ из A выполняется включение

$$f * (g(a_1^1, ..., a_m^1), ..., g(a_1^n, ..., a_m^n)) \subseteq g * (f(a_1^1, ..., a_1^n), ..., f(a_m^1, ..., a_m^n),$$

то говорят, что для f и g верно тождество полуперестановочности.

Если для мультиоперации g и операции f выполняется указанное тождество, то говорят, что f и g полуперестановочны.

Таким образом:
$g \in F_1 \Leftrightarrow g$ полуперестановочна с $f_1 = (11)$;
$g \in F_2 \Leftrightarrow g$ полуперестановочна с $f_2 = (22)$;
$g \in S \Leftrightarrow g$ полуперестановочна с $f_3 = (21)$;
$g \in M_1 \Leftrightarrow g$ полуперестановочна с $f_4 = (1112)$;
$g \in M_2 \Leftrightarrow g$ полуперестановочна с $f_5 = (1222)$;
$g \in R \Leftrightarrow g$ полуперестановочна с $f_6 = (11121222)$;
$g \in L \Leftrightarrow g$ полуперестановочна с $f_7 = (12212112)$.

Следовательно, для доказательства предложения достаточно показать выразимость соответствующих булевых операций:
1. $f_2(x) = f_3(f_1(x))$;
2. $f_1(x) = f_3(f_2(x))$;
3. $f_5(x, y) = f_3(f_4(f_3(x), f_3(y)))$;
4. $f_4(x, y) = f_3(f_5(f_3(x), f_3(y)))$;
5. $f_7(x, y, z) =$
$= f_6(f_6(f_3(f_6(x, y, z)), y, z), f_6(x, f_3(f_6(x, y, z)), z), f_6(x, y, f_3(f_6(x, y, z))))$;
6. $f_4(x, y) = f_6(x, y, f_1(x))$;
7. $f_5(x, y) = f_6(x, y, f_2(x))$;
8. $f_6(x, y, z) = f_5(f_4(x, y), f_4(x, z), f_4(y, z))$;
9. $f_5(x, y) = f_7(x, y, f_4(x, y))$;
10. $f_4(x, y) = f_7(x, y, f_5(x, y))$;

11. $f_3(x) = f_7(x, f_2(x), f_1(x))$;
12. $f_1(x) = f_4(x, f_3(x))$. □

Теорема. *Для суперклона F существует* 394 *типа базисов.*

Доказательство. В результате удаления значений функции $\phi(g)$, противоречащих указанным в предложении свойствам суперклонов, получено 34 класса мультиопераций. Все они представлены в таблице 1 соответствующим значением функции $\phi(g)$. Кроме того, чтобы показать, что данные классы не являются пустыми, в таблице для каждого класса приведен пример входящей в него мультиоперации.

Таблица 1

Классы мультиопераций

№	$\phi(g)$	мультиоперация	№	$\phi(g)$	мультиоперация
1	(1111111)	(2321)	18	(1010111)	(3331)
2	(1111110)	(0131)	19	(1001111)	(12312322)
3	(1111101)	(02011020)	20	(0111100)	(21)
4	(1111011)	(01111111)	21	(1110010)	(20220000)
5	(1110111)	(22222220)	22	(1101010)	(23)
6	(1101111)	(0132)	23	(1010110)	(1110)
7	(1011111)	(1331)	24	(1001011)	(1222)
8	(0111111)	(2331)	25	(1000111)	(3113)
9	(1111100)	(2010)	26	(0001111)	(1332)
10	(1111010)	(0111)	27	(1110000)	(01)
11	(1110110)	(2220)	28	(1100010)	(2202)
12	(1101101)	(2112)	29	(1010010)	(1101)
13	(1011101)	(1221)	30	(0001101)	(12212112)
14	(0111101)	(21121221)	31	(1100000)	(2)
15	(1101011)	(2333)	32	(1010000)	(1)
16	(1011011)	(30202030)	33	(1000010)	(13)
17	(1100111)	(03010103)	34	(0000000)	(3)

Для того, чтобы система мультиопераций была базисом, согласно определению, необходимо соблюдать условия полноты и независимости. Легко видеть, что система полна, если суммарное значение соответствующих компонент векторного задания функций $\phi(g)$ не равна нулю; и независима, если при удалении любой функции из системы суммарное значение компонент имеет по крайне мере одну нулевую координату.

В результате прямой комбинаторной проверки в F найдено 394 типа базисов. Базисы представлены указанными в таблице 1 порядковыми номерами классов мультиопераций. В зависимости от ранга базиса все типы распределены следующим образом:

– 1 тип ранга 1: (1);

– 187 типов ранга 2:
(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (2,12), (2,13), (2,14), (2,15), (2,16), (2,17), (2,18), (2,19), (2,24), (2,25), (2,26), (2,30), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (3,10), (3,11), (3,15), (3,16), (3,17), (3,18), (3,19), (3,21), (3,22), (3,23), (3,24), (3,25), (3,26), (3,28), (3,29), (3,33), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8), (4,9), (4,11), (4,12), (4,13), (4,14), (4,17), (4,18), (4,19), (4,20), (4,23), (4,25), (4,26), (4,30), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9), (5,10), (5,12), (5,13), (5,14), (5,15), (5,16), (5,19), (5,20), (5,22), (5,24), (5,26), (5,30), (6,7), (6,8), (6,9), (6,10), (6,11), (6,13), (6,14), (6,16), (6,18), (6,20), (6,21), (6,23), (6,27), (6,29), (6,32), (7,8), (7,9), (7,10), (7,11), (7,12), (7,14), (7,15), (7,17), (7,20), (7,21), (7,22), (7,27), (7,28), (7,31), (8,9), (8,10), (8,11), (8,12), (8,13), (8,15), (8,16), (8,17), (8,18), (8,19), (8,21), (8,22), (8,23), (8,24), (8,25), (8,27), (8,28), (8,29), (8,31), (8,32), (8,33), (9,15), (9,16), (9,17), (9,18), (9,19), (9,24), (9,25), (9,26), (10,12), (10,13), (10,14), (10,17), (10,18), (10,19), (10,25), (10,26), (10,30), (11,12), (11,13), (11,14), (11,15), (11,16), (11,19), (11,24), (11,26), (11,30), (12,16), (12,18), (12,23), (12,29), (12,21), (13,15), (13,17), (13,21), (13,22), (13,28), (14,15), (14,16), (14,17), (14,18), (14,19), (14,21), (14,22), (14,23), (14,24), (14,25), (14,28), (14,29), (14,33), (15,18), (15,20), (15,23), (16,17), (16,20), (17,20), (18,20), (18,22), (19,20), (19,21), (19,27), (20,17), (20,24), (20,25), (21,26), (21,30), (26,27);

– 199 типов ранга 3:

(9,12,22), (9,12,28), (9,12,33), (9,13,23), (9,13,29), (9,13, 33), (9,22,30), (9,23,30), (9,28,30), (9,29,30), (9,30,33), (10,16,23), (10,23,24), (11,17,22), (11,22,25), (12,13,19), (12,13,24), (12,13,25), (12,13,26), (12,13,33), (12,14,26), (12,15,27), (12,15,32), (12,17,27), (12,17,32), (12,19,32), (12,20,22), (12,20,26), (12,20,28), (12,20,33), (12,22,27), (12,22,32), (12,24,27), (12,24,32), (12,25,27), (12,25,32), (12,26,32), (12,27,28), (12,27,33), (12,28,32), (12,32,33), (13,14,26), (13,16,27), (13,16,31), (13,18,27), (13,18,31), (13,19,31), (13,20,23), (13,20,26), (13,20,29), (13,20,33), (13,23,27), (13,23,31), (13,24,27), (13,24,31), (13,25,27), (13,25,31), (13,26,31), (13,27,29), (13,27,33), (13,29,31), (13,31,33), (14,26,31), (14,26,32), (15,16,19), (15,16,25), (15,16,26), (15,16,30), (15,17,21), (15,17,27), (15,17,29), (15,17,32), (15,19,29), (15,19,32), (15,21,25), (15,25,27), (15,25,29), (15,25,32), (15,26,29), (15,26,32), (15,27,30), (15,29,30), (15,30,32), (16,18,21), (16,18,27), (16,18,28), (16,18,31), (16,19,22), (16,19,28), (16,19,31), (16,21,23), (16,21,25), (16,22,23), (16,22,25), (16,22,26), (16,22,30), (16,23,27), (16,23,28), (16,23,31), (16,25,27), (16,25,28), (16,25,31), (16,26,28), (16,26,31), (16,27,30), (16,28,30), (16,30,31), (17,18,19), (17,18,24), (17,18,26), (17,18,30), (17,19,23), (17,19,29), (17,19,32), (17,21,22), (17,21,24), (17,22,23), (17,22,27), (17,22,29), (17,22,32), (17,23,24), (17,23,26), (17,23,30), (17,24,27), (17,24,29), (17,24,32), (17,26,29), (17,26,32), (17,27,30), (17,29,30), (17,30,32), (18,19,28), (18,19,31), (18,21,24), (18,24,27), (18,24,28), (18,24,31), (18,26,28), (18,26,31), (18,27,30), (18,28,30), (18,30,31), (19,22,23), (19,22,29), (19,22,32), (19,23,28), (19,23,31), (19,28,29), (19,28,32), (19,29,31), (19,31,32), (20,22,26), (20,22,30), (20,23,26), (20,23,30), (20,26,28), (20,26,29), (20,26,31), (20,26,32), (20,26,33), (20,28,30), (20,29,30), (20,30,33), (21,22,25), (21,23,24), (21,24,25), (22,23,24), (22,23,25), (22,23,26), (22,23,30), (22,25,27), (22,25,29), (22,25,32), (22,26,29), (22,26,32), (22,27,30), (22,29,30), (22,30,32), (23,24,27), (23,24,28), (23,24,31), (23,26,28), (23,26,31), (23,27,30), (23,28,30), (23,30,31), (24,25,27), (24,27,30), (25,27,30), (26,28,29), (26,28,32), (26,29,31), (26,31,32), (27,28,30), (27,29,30), (27,30,33), (28,29,30), (28,30,32), (29,30,31);

– 7 типов ранга 4:
(24,25,28,29), (24,25,28,32), (24,25,29,31), (24,25,31,32), (24,30,31,32), (25,30,31,32), (30,31,32,33).

□

Список литературы

1. Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны / Н. А. Перязев // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 2. – С. 120–125.
2. Перязев Н. А. Теория Галуа для клонов и суперклонов / Н. А. Перязев // Проблемы теоретической кибернетики : материалы XVI Междунар. конф. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 2011. – С. 359–363.
3. Classifications and basis enumerations in many-valued logics / M. Miyakawa, I. Stojmenovic, D. Lau, I. G. Rosenberg // Internationl Symposium on Multiple-Valued Logic. 17 th. – Boston, 1987. – P. 152–160.

I. A. Yakovchuk
Types of rank 2 superclone bases

Abstract. This article presents classification of multioperations based on their membership in the maximal superclones. Also, all types of rank 2 superclone bases are enumerated.
Keywords: superclone; multiopation; base; maximal superclone.

Яковчук Инна Александровна, аспирант, кафедра математической информатики, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, ул. Нижняя набережная, 6 тел.: (3952)240477 (inna_andrey@list.ru)

Yakovchuk Inna, East Siberian Academy of Education, 6, Nignaya Naberegnaya St., Irkutsk, 664011 aspirant, Phone: (3952)240477 (inna_andrey@list.ru)