Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 2. С. 77—83

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.956

Метод последовательных приближений в параболической начально-краевой задаче *

В. А. Терлецкий
Иркутский государственный университет

Е. В. Тучнолобова
Иркутский государственный университет

Н. Ю. Ульянова
Иркутский государственный университет

Аннотация. В начально-краевой задаче для параболического уравнения методом последовательных приближений устанавливается существование и единственность обобщенного решения в условиях разрывности входных данных по независимым переменным и нелинейности правой части уравнения по фазовым переменным.

Ключевые слова: начально-краевая задача; параболическое уравнение; фундаментальное решение; метод последовательных приближений.

1. Введение

Широко известно [1], что использование понятия классического (гладкого) решения дифференциальных задач часто является затруднительным, а иногда и вообще неприемлимым. Как правило, это объясняется необходимостью изучения задач с недостаточно гладкими или даже разрывными функциями, с помощью которых формулируются начально-граничные условия, правые части уравнений, коэффициенты дифференциального оператора и т. п. Существует множество способов, которые могут быть положены в основу определения обобщенного решения. К ним относятся, например, интегральные законы сохранения, искусственная вязкость, разностные аппроксимации, интегральные усреднения дифференциальных операторов и т.д.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00713, 12-01-98009) и федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг.

При исследовании задач оптимального управления системами и уравнениями с распределенными параметрами наиболее часто прибегают к обобщенным решениям по Соболеву. По-видимому, это объясняется, прежде всего, простотой и универсальностью такого подхода. Однако указанный способ имеет и существенные недостатки, отмеченные, в частности, в [2, с. 575]. Например, это необходимость отдельного, не связанного с обоснованием существования обобщенного решения, нахождения оценок его роста относительно входных данных; доказательства формулы интегрирования по частям; вывод сопряженной задачи; выяснение и обоснование аналитических свойств решений исходной и сопряженной задач.

Указанных недостатков удается избежать при конструировании обобщенного решения дифференциальной задачи как решения эквивалентной интегральной задачи. Именно такой подход является общепринятым в системах обыкновенных дифференциальных уравнений при построении решения по Каратеодори [3; 4]. Так же успешно он применяется и при обосновании решения в "широком смысле" (непрерывного, но с разрывными частными производными) в гиперболических системах одномерных полулинейных уравнений [1]. Эта идея определения обобщенного решения использовалась в гиперболических системах одномерных [5] и многомерных [6; 7] полулинейных уравнений, а также в различных начально-краевых задачах для волнового уравнения [8].

Целью настоящей работы является распространение указанного подхода на класс параболических уравнений.

2. Постановка задачи

В прямоугольнике $\Pi = S \times T$ плоскости переменных (s,t), $S = (s_0, s_1)$, $T = (t_0, t_1)$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$x_t - a^2(s)x_{ss} = f(x, x_s, s, t) \tag{1.1}$$

с начальными

$$x(s, t_0) = x^0(s), \ s \in S \tag{1.2}$$

и граничными

$$x(s_0, t) = q^0(t), \ x(s_1, t) = q^1(t), \ t \in T \tag{1.3}$$

условиями.

Здесь t – время, s – пространственная переменная, $x = x(s,t)$ – искомое решение; $a = a(s)$ – гладкая на S функция, причем $0 < a_0 \leq a(s) \leq a_\infty < +\infty$; $s \in S$; $f = f(x, y, s, t)$ непрерывна по Липшицу по переменным (x, y) в R^2 при фиксированных $(s,t) \in \Pi$ и суммируема в

П при фиксированных значениях $(x,y) \in R^2$; функции $x^0 = x^0(s),\ q^i = q^0(t),\ i = 0,1$ суммируемы в S и T соответственно.

Требуется построить обобщенное решение x, установить оценки его роста относительно входных параметров задачи (1.1)-(1.3), а именно, функций $f,\ x^0$ и $q^i,\ i = 0,1$, а также оценить его аналитические свойства.

3. Интегральный эквивалент

Введем замену переменных, положив $s = s(\eta)$ и потребовав, чтобы эта функция удовлетворяла обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{ds}{d\eta} = a(s)$$

с начальным условием $s(\eta_0) = s_0$.

В силу положительности функции $a = a(s),\ s \in S$, функция $s = s(\eta)$ является монотонно возрастающей на интервале (η_0, η_1), где η_1 выбирается из условия $s(\eta_1) = s_1$. Поэтому существует и обратное отображение $\eta = \eta(s)$, переводящее отрезок $[s_0, s_1]$ в отрезок $[\eta_0, \eta_1]$. Кроме того, на интервале S справедливо равенство

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{a(s)}$$

и $\eta(s_0) = \eta_0,\ \eta(s_1) = \eta_1$.

Нетрудно видеть, что

$$x_\eta = x_s a(s),\ x_{\eta\eta} = x_{ss} a^2(s) + x_s a'(s) a(s).$$

Следовательно, в терминах новой пространственной переменной η уравнение (1.1) принимает вид

$$x_t - x_{\eta\eta} = f\left(x, \frac{x_\eta}{a(s(\eta))}, s(\eta), t\right) - a'(s(\eta)) x_\eta.$$

Таким образом, при естественных предположениях о гладкости, неотрицательности и ограниченности функции $a = a(s)$ уравнение вида (1.1) всегда может быть сведено к уравнению того же вида, но с единичным коэффициентом при второй частной производной по пространственной переменной от решения в дифференциальном операторе. Это означает, что не ограничивая общности задачи (1.1)-(1.3), далее будем считать, что в уравнении (1.1) $a(s) = 1,\ s \in S$. Для функций x, имеющих непрерывные первую производную по времени и вторую производную по пространственной переменной, будем использовать обозначение $Dx = x_t - x_{ss}$.

Перейдем к построению интегрального эквивалента задачи (1.1)–(1.3), используя известное (см., например, [9, 10]) фундаментальное решение для уравнения теплопроводности:

$$\mathcal{X}(s-\xi,t-\tau)=\frac{e^{-\left(\frac{s-\xi}{4(t-\tau)}\right)^2}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

Действуя по схеме [10, с. 370-373], можно установить, что на гладких решениях задачи (1.1)-(1.3) функции

$$x(x^0;s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(s-\xi,t-t_0)\check{x}^0(\xi)d\xi,$$

$$x(f;s,t)=\int_{t_0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(s-\xi,t-\tau)\check{f}[\xi,\tau]d\xi d\tau$$

обладают свойствами

$$Dx(x^0;s,t)=0,\ (s,t)\in\Pi,\ x(x^0;s,t_0)=x^0(s),\ s\in S,$$

$$x(x^0;s_0,t)=x(x^0;s_1,t)=0,\ t\in T,$$

$$Dx(f;s,t)=f(x(s,t),x_s(s,t),s,t),\ (s,t)\in\Pi,\ x(f;s,t_0)=0,\ s\in S,$$

$$x(f;s_0,t)=x(f;s_1,t)=0,\ t\in T.$$

Здесь функции $\check{x}^0=\check{x}^0(\xi)$, $\check{f}=\check{f}[\xi,\tau]=f(x(\xi,\tau),x_\xi(\xi,\tau),\xi,\tau)$ строятся по функциям x^0 и f как их антисимметрические продолжения по пространственной переменной на всю вещественную ось:

$$\check{x}^0(\xi\pm kl)=(-1)^k x^0(\xi),$$

$$\check{f}[\xi\pm kl,\tau]=(-1)^k f(x(\xi,\tau),x_\xi(\xi,\tau),\xi,\tau),$$

$$\xi\in S,\ \tau\in T,\ l=s_1-s_0,\ k=0,1,2,...$$

Для завершения построения интегрального эквивалента задачи (1.1)-(1.3) остается указать ее решения, "отвечающие"за граничные условия (1.3). Пусть

$$\check{y}^i(\xi\pm 2kl)=-(-1)^i 2k,\ \xi\in S,\ k=0,1,...,\ i=0,1.$$

В плоскости переменных (s,t) определим функции

$$y^i(s,t)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(s-\xi,t-\tau)\check{y}^i(\xi)d\xi,\ t>0,\\ 0,\ t\le 0,\ i=0,1.\end{cases}$$

Аналогично предыдущим устанавливаем справедливость равенств

$$Dy^i=0,\ (s,t)\in\Pi,\ y^i(s,t_0)=0,\ y^i(s_j,t)=\begin{cases}1,\ i=j,\ t>0,\\ 0,\ i\ne j,\ i,j=0,1.\end{cases}$$

По схеме [9, с. 47] можно доказать, что функции

$$x(q^i;s,t)=\int_T \frac{\partial}{\partial t} y^i(s,t-\tau)q^i(\tau)d\tau$$

обладают свойствами

$$Dx(q^i;s,t)=0,\ (s,t)\in\Pi,$$

$$x(q^i;s,t_0)=0,\ s\in S,\ x(q^i;s_j,t)=\begin{cases} q^i(t),\ i=j,\\ 0,\ i\neq j,\ t\in T,\ i,j=0,1.\end{cases}$$

Обозначим для краткости $x(q;s,t) = x(q^0;s,t) + x(q^1;s,t)$. Тогда искомый вид интегрального эквивалента следующий:

$$x(s,t)=x(x^0;s,t)+x(q;s,t)+x(f(x,x_s,s,t),s,t). \tag{2.1}$$

Интегральное уравнение (2.1) уже не содержит старших производных x_t и x_{ss}, которые входят в дифференциальный оператор D уравнения (1.1), что позволяет сформулировать следующее

Определение 1. *Обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $x = x(s,t)$, удовлетворяющую уравнению (2.1).*

4. Метод последовательных приближений

Равенство (2.1) естественным образом может быть положено в основу метода последовательных приближений. Однако, в общем случае, когда правая часть f уравнения (1.1) зависит от частной производной x_s решения x, его следует дополнить уравнением

$$x_s(s,t)=x_s(x^0;s,t)+x_s(q;s,t)+x_s(f(x,x_s,s,t);s,t), \tag{3.1}$$

которое получается из (2.1) путем его формального дифференцирования по пространственной переменной s.

Тогда для построения обобщенного решения можно воспользоваться следующей схемой метода последовательных приближений:

$$x^{(k+1)}(s,t)=x(x^0;s,t)+x(q;s,t)+x(f(x^{(k)},{x_s}^{(k)},s,t);s,t),$$
$${x_s}^{(k+1)}(s,t)=x_s(x^0;s,t)+x_s(q;s,t)+x(f(x^{(k)},{x_s}^{(k)},s,t);s,t),$$
$$x^{(0)}(s,t)={x_s}^{(0)}(s,t)=0,\ (s,t)\in\Pi, k=0,1,...$$

Для доказательства сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x^{(k+1)}(s,t)-x^{(k)}(s,t)),\ \sum_{k=0}^{\infty}({x_s}^{(k+1)}(s,t)-{x_s}^{(k)}(s,t)),$$

а, следовательно, и существования обобщенного решения достаточно установить сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}(s,t), \ \sum_{k=0}^{\infty} {\delta_s}^{(k)}(s,t),$$

где приращения $\delta^{(k)}$ и ${\delta_s}^{(k)}$ определяются равенствами

$$\delta^{(k)}(s,t) = |x^{(k+1)}(s,t) - x^{(k)}(s,t)|, \ {\delta_s}^{(k)}(s,t) = |{x_s}^{(k+1)}(s,t) - {x_s}^{(k)}(s,t)|.$$

Тогда из (2.1), (3.1) и условия Липшица для функций f по фазовым переменным следуют неравенства

$$\delta^{(k+1)}(s,t) \leq C \int_{t_0}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(s-\xi, t-\tau)[\delta^{(k)}(\xi,\tau) + {\delta_s}^{(k)}(\xi,\tau)] d\xi d\tau,$$

$$(3.2)$$

$${\delta_s}^{(k+1)}(s,t) \leq C \int_{t_0}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_s(s-\xi, t-\tau)[\delta^{(k)}(\xi,\tau) + {\delta_s}^{(k)}(\xi,\tau)] d\xi d\tau,$$

в которых константа $C > 0$ определяется только константой Липшица.

Система неравенств (3.2) обосновывает существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), которое вместе со своей частной производной x_s по пространственной переменной является точкой равновесия отображения (2.1) и (3.1). Справедливость интегральных уравнений (2.1), (3.1) позволяет проанализировать аналитические свойства обобщенного решения и получить оценки его роста относительно входных данных x^0, q^0, q^1 и f задачи (1.1)-(1.3).

Список литературы

1. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М. : Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2 / Дж. Сансоне. – М. : Иностр. лит., 1954. – 415 с.
4. Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М. : Иностр. лит., 1958. – 474 с.
5. Терлецкий В. А. Обобщенное решение одномерных полулинейных гиперболических систем со смешанными условиями / В. А. Терлецкий // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 12. – С. 75–83.
6. Терлецкий В. А. Обобщенное решение многомерных полулинейных гиперболических систем / В. А. Терлецкий // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 68–76.

7. Терлецкий В. А. Обобщенное решение в задачах оптимального управления гиперболическими системами / В. А. Терлецкий // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4. – С. 68–78.
8. Терлецкий В. А. Обобщенное решение нелинейного волнового уравнения с нелинейными граничными условиями первого, второго и третьего рода / В. А. Терлецкий, Е. А. Лутковская // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 3. – С. 403–415.
9. Годунов С.К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. – М. : Наука, 1979. – 392 с.
10. Михайлов В. П. Диффернциальные уравнения в частных производных /В. П. Михайлов. – М. : Наука, 1983. – 424 с.

V. A. Terletsky, E. V. Tuchnolobova, N. Yu. Ulyanova

Method of successive approximations of parabolic initial-boundary problem

Abstract. The existence and uniqueness of generalized solution of an initial-boundary problem of parabolic equation with discontinuous enterance data with respect to independent variables and nonlinear right part of equation with respect to spacial variables is received by method of successive approximations.

Keywords: initial-boundary problem, parabolic equation, fundamental solution, method of successive approximations

Терлецкий Виктор Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)52-12-82 (terletsky@math.isu.ru)

Тучнолобова Екатерина Владимировна, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)52-12-82 (tuchnokaterina@mail.ru)

Ульянова Надежда Юрьевна, старший преподаватель кафедры, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)52-12-82 (nadinmix@mail.ru)

Terletsky Viktor, Ph. D., Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664000, Phone: (3952)52-12-82 (terletsky@math.isu.ru)

Tuchnolobova Ekaterina, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664000, Phone: (3952)52-12-82 (tuchnokaterina@mail.ru)

Ulyanova Nadegda, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664000, Phone: (3952)52-12-82 (nadinmix@mail.ru)