



Серия «Математика»

2013. Т. 6, № 2. С. 69–76

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского  
государственного  
университета

УДК 512.5

## Большие элементарные абелевы унипотентные подгруппы групп лиева типа \*

Г. С. Сулейманова

*Сибирский федеральный университет*

**Аннотация.** В статье завершается описание больших элементарных абелевых унипотентных подгрупп групп лиева типа.

**Ключевые слова:** группа лиева типа; унипотентная подгруппа; большая абелева подгруппа.

### 1. Введение

Для любого теоретико-группового свойства  $\mathcal{P}$  большой  $\mathcal{P}$ -подгруппой конечной группы называют всякую  $\mathcal{P}$ -подгруппу наивысшего порядка.

Известно, что вопрос описания больших абелевых подгрупп группы  $G$  лиева типа над конечным полем, изучаемый с 70-х годов, сводится к аналогичному вопросу для унипотентного радикала  $U$  подгруппы Бореля в  $G$ , подобно схеме А. И. Мальцева [10] для простых комплексных алгебр Ли. Для классических типов к середине 80-х годов были найдены множество  $A(U)$  больших абелевых подгрупп в  $U$ , его подмножество  $A_N(U)$  нормальных в  $U$  подгрупп из  $A(U)$  и множество  $A_e(U)$  больших элементарных абелевых подгрупп в  $U$ , а также подгруппы Томпсона

$$J(U) = \langle A \mid A \in A(U) \rangle, \quad J_e(U) = \langle A \mid A \in A_e(U) \rangle.$$

В 1986 году в обзоре А. С. Кондратьева [3] как проблема (1.6) записана

**Проблема:** *Описать множества  $A(U)$ ,  $A_N(U)$ ,  $A_e(U)$  и подгруппы Томпсона  $J(U)$ ,  $J_e(U)$  для оставшихся случаев  $G$ .*

Е. П. Вдовин [1], [2] исследовал проблему, развивая метод А.И. Мальцева [10] и используя компьютерные перечисления. Для абелевой под-

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00968.

группы  $A$  и нильпотентной подгруппы  $N$  конечной простой неабелевой группы  $G$  он доказал:  $|A|^3 < |G|$  при  $G \neq A_1(q)$ ;  $|N|^2 < |G|$ .

Автор и В.М. Левчук реализуют подход, анонсированный в [6], связанный с предварительным описанием максимальных нормальных абелевых подгрупп в  $U$ . Так, в [7], [8], [18], [13], [14], [15] и [19] завершено описание множеств  $A(U)$ ,  $A_N(U)$  и подгрупп Томпсона  $J(U)$ . В настоящей статье завершается описание множеств  $A_e(U)$  и подгрупп Томпсона  $J_e(U)$ ; см. § 3 и § 4.

## 2. Предварительные замечания и основная теорема

Группу Шевалле, ассоциированную с системой корней  $\Phi$  и полем  $K$ , обозначаем через  $\Phi(K)$ . Как и в [17], [12], ее порождают корневые подгруппы  $X_r = x_r(K)$ ,  $r \in \Phi$ ; для положительных корней  $r \in \Phi^+$  они порождают унипотентную подгруппу  $U = U\Phi(K)$ . Скрученную группу  ${}^m\Phi(K)$  определяют как централизатор в  $\Phi(K)$  скручивающего автоморфизма  $\theta$  порядка  $m = 2$  или  $3$  – композиция графового автоморфизма  $\tau \in \text{Aut } \Phi(K)$  и автоморфизма  $\sigma : t \rightarrow \bar{t}$  основного поля, причем  $\theta(X_r) = \tau(X_r) = X_{\bar{r}}$  ( $r \in \Phi$ ) для естественного продолжения  $\bar{\phantom{x}}$  на  $\Phi$  симметрии графа Кокстера порядка  $m$  и  $U = U^m\Phi(K) := {}^m\Phi(K) \cap U\Phi(K)$ . Когда все корни в  $\Phi$  одной длины, выберем гомоморфизм  $\zeta$  решетки корней, согласно [4], [18], где полные прообразы элементов из  $\zeta(\Phi)$  есть  $\bar{\phantom{x}}$ -орбиты в  $\Phi$  длины 1 или  $m$ . В частности, для типа  ${}^3D_4$  и  ${}^2E_6$  можно рассматривать  $\zeta(\Phi)$  как систему корней типа  $G_2$  и  $F_4$ , соответственно. Для  $a \in \zeta(\Phi)$  в группе  ${}^m\Phi(K)$  выделяем корневые подгруппы  $X_a = x_a(K_\sigma)$ ,  $K_\sigma := \text{Ker}(1 - \sigma)$  при  $|\zeta^{-1}(a)| = 1$  и  $X_a = x_a(K)$   $|\zeta^{-1}(a)| = m$ . Полагая  ${}^m\Phi = \zeta(\Phi)$ , имеем

$$U = UG(K) = \langle X_r \mid r \in G^+ \rangle, \quad G = \Phi \text{ или } {}^m\Phi.$$

Стандартный центральный ряд  $U = U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$  группы  $U$  см. [17].

Пусть  $\{r\}^+$  – совокупность всех  $s \in G^+$  с неотрицательными коэффициентами в разложении  $s - r$  через базу  $\Pi(G)$ . Полагаем

$$T(r) := \langle X_s \mid s \in \{r\}^+ \rangle, \quad Q(r) := \langle X_s \mid s \in \{r\}^+, s \neq r \rangle, \quad r \in G.$$

Если  $H \subseteq T(r_1)T(r_2)\dots T(r_m)$  и любая замена  $T(r_i)$  на  $Q(r_i)$  нарушает включение, то  $\mathcal{L}(H) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  назовем *множеством углов* в  $H$ . Через  $\mathcal{L}_1(H)$  обозначаем множество первых углов всех элементов из  $H$ .

Как правило, большие элементарные абелевы подгруппы в  $U$  лежат в  $A(U)$ . Более точно, в работах Барри и Вонга для классических типов (см. обзор [3]) и для исключительных типов в [1], [18] и [19] установлена

**Теорема 1.** В группе  $U = UG(K)$  все большие элементарные абелевы подгруппы есть большие абелевы; исключительными являются лишь группы  $G_2(2)$ ,  ${}^3D_4(8)$ , группы Сузуки  ${}^2B_2(K)$  и группы  ${}^2F_4(K)$ .

Порядки больших абелевых подгрупп в  $U$  известны, [1] и [18].

**Лемма 1.** В группе  $U = UG(K)$  порядок  $\mathbf{a}(U)$  больших абелевых подгрупп равен порядку  $\mathbf{a}_e(U)$  больших элементарных абелевых подгрупп, кроме случаев:  $\mathbf{a}(U) = 2\mathbf{a}_e(U) = 2|U_3|$  для групп  $UG_2(2)$  и  $U{}^3D_4(8)$ ,  $\mathbf{a}(U) = 2\mathbf{a}_e(U) = 2|K|$  для типа  ${}^2B_2$ , наконец,  $\mathbf{a}(U) = 2 \cdot \mathbf{a}_e(U) = 2|K|^{15}$  для типа  ${}^2F_4$ .

Описание подгрупп Томпсона  $J_e(U)$  и множества  $A_e(U)$ , когда оно лежит в  $A(U)$ , легко следует из известных описаний  $A(U)$ ; см. обзор [3] для классических типов и [1], [18], [19] для исключительных типов.

Подгруппы Томпсона  $J_e(U)$  и множество  $A_e(U)$  для оставшихся, исключительных в теореме 1 групп мы выявляем в §§ 3 и 4. Отметим, что в [19] изучался только случай  $A_e(U) \subseteq A(U)$ .

Зафиксируем *регулярное упорядочение* корней, согласованное с функцией высоты корней [17, Лемма 5.3.1]. Всякий элемент  $\gamma$  в  $U$  допускает единственное согласованное (*каноническое*) разложение в произведение корневых элементов  $x_r(\gamma_r)$  ( $r \in G^+$ ), [12, Лемма 18]. Коэффициент  $\gamma_r$  называем *r-проекцией* элемента  $\gamma$ . Очевидно, первый угол элемента  $\gamma$  соответствует его первому сомножителю в каноническом разложении.

### 3. Группы $U$ типа $G_2$ и ${}^3D_4$

В этом параграфе мы опишем большие элементарные абелевы подгруппы групп  $U = UG(K)$  типа  $G_2$  и  ${}^3D_4$ . Нам потребуются леммы.

Далее для типа  ${}^3D_4$  полагаем  $\pi := 1 + \sigma + \sigma^2$ . Порядок любой подгруппы  $A$  в  $U$  можно оценивать через порядки проекций  $A_i$  пересечений:

$$A \cap U_i = x_r(A_i) \bmod U_{i+1}, \quad 1 < ht(r) = i \leq 5;$$

$$|A| = |A : A \cap U_2| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| \cdot |A_5|.$$

Нам потребуются следующие три леммы из [18] и [19].

**Лемма 2.** Пусть  $A$  – абелева подгруппа в  $U$ . Тогда в  $K$  существуют элементы  $d_a, d_b$  и аддитивная подгруппа  $F$  такие, что  $d_b F A_4 = 0$  и

$$A = \gamma(F) \cdot (A \cap U_2), \quad \gamma(t) = x_a(d_a t) x_b(d_b t) \bmod U_2 \quad (t \in F).$$

Для типа  ${}^3D_4$  и  $G_2$  имеем, соответственно,  $(A_2 A_3)^\pi = 0$  и  $3A_2 A_3 = 0$ , а при  $d_a F \ni 1$  аналогично  $A_2^{1+\sigma} = A_3^\pi = 0$  и  $2A_2 = 3A_3 = 0$ .

**Лемма 3.** Если  $2K = K$ , то  $\text{Ker}(1 + \sigma) = 0$ . В общем случае имеем:

$$K = K^{1+\sigma} + K_\sigma, \quad K_\sigma \cap K^{1+\sigma} = 2K_\sigma, \quad K^\pi = K_\sigma, \quad \text{Ker}(\pi) = K^{1-\sigma}.$$

**Лемма 4.** Если  $\Delta_1 := X_{a+b}X_{2a+b}U_5$  и  $\Delta_2 := X_bU_4$ , то  $T(b) = \Delta_1\Delta_2$ . Когда  $U$  типа  $G_2$  и  $3K = 0$ , централизатор  $C(\Delta_1)$  равен  $T(b)$  и центр  $Z$  в  $U$  равен  $X_{2a+b}U_5$ ; в остальных случаях  $C(\Delta_1) = \Delta_2$ ,  $C(\Delta_2) = \Delta_1$  и  $Z = U_5$ . Кроме того,  $\Delta_1 \simeq \Delta_2 \simeq UT(3, K)$ , когда  $U$  типа  $G_2$  и  $3K = K$ , и  $\Delta_2 \simeq UT(3, K_\sigma)$  для типа  ${}^3D_4$ .

**Лемма 5.** Пусть  $2K = 0$ ,  $\gamma \in U$ ,  $\gamma^2 = 1$  и  $\gamma = x_{a+b}(s)x_{2a+b}(t) \pmod{U_4}$ ,  $s, t \in K$ . Тогда  $st = 0$  для типа  $G_2$  и  $st \in K^{1-\sigma}$  типа  ${}^3D_4$ .

**Доказательство.** В условиях леммы получаем

$$1 = \gamma^2 = [x_{a+b}(s), x_{2a+b}(t)].$$

Для типа  $G_2$  отсюда сразу же следуют равенства  $x_{3a+2b}(3st) = 1$  и  $st = 0$ . Когда  $U$  типа  ${}^3D_4$ , при  $s \in K_\sigma$  находим  $0 = s(t^\pi) = (st)^\pi$  и, по лемме 3,  $st \in K^{1-\sigma}$ . В общем случае при  $s \in K^*$  существует  $K$ -характер  $\chi$  решетки корней с условиями  $\chi(a) = s^{-1}$ ,  $\chi(b) = 1$ . Диагональный автоморфизм  $h(\chi)$  переводит  $\gamma$  в элемент порядка 2, равный  $x_{a+b}(1)x_{2a+b}((\bar{s}\bar{s})^{-1}t)$  по модулю  $U_4$ . По доказанному,  $t \in \bar{s}\bar{s}K^{1-\sigma}$  и поэтому  $st \in K^{1-\sigma}$ .  $\square$

**Лемма 6.** Если  $A$  – элементарная абелева подгруппа в  $U$ ,  $2K = 0$ , то

$$T(a) = C(U_4) \supseteq A \quad \text{или} \quad T(b) \supseteq A \supseteq U_5. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Достаточно показать, что угол в  $A$  единствен. Допустим противное, т. е.  $A$  содержит элемент с углом  $a$  и элемент с углом  $b$ . Очевидно, один из этих элементов или их произведение есть элемент  $\gamma \in A$ , равный  $x_a(t)x_b(1)$  по модулю  $U_2$  при подходящем  $t \neq 0$ . Тогда соотношения

$$\gamma^2 = [x_a(t), x_b(1)] = x_{a+b}(t) \pmod{U_3}$$

дают противоречие с элементарной абелевостью подгруппы  $A$ .  $\square$

К элементарным абелевым подгруппам порядка  $|U_3|$  в  $U$  относятся

$$U_3, X_{a+b}U_4, X_aU_4, X_bX_{a+b}U_5, X_bX_{2a+b}U_5. \quad (3.2)$$

**Теорема 2.** В группе  $U = UG_2(2)$  всякая большая элементарная абелева подгруппа сопряжена подгруппе из (3.2).

**Доказательство.** Выберем произвольную подгруппу  $A \in A_e(U)$ . В первом случае из (3.1) имеем  $A = \langle \gamma \rangle \times U_4$  для элемента  $\gamma \in T(a) \setminus$

$U_4$ ,  $\gamma^2 = 1$ . По лемме 5, при  $A \subseteq U_2$  получаем  $A = X_{a+b}U_4$  или  $A = U_3$ . Когда  $\gamma$  имеет угол  $a$ , с точностью до  $X_b$ -сопряжения, элемент  $\gamma$  лежит в  $X_aU_3$ . В этом случае он  $n_b$ -сопряжен с элементом порядка 2 из  $U_2$ , так что  $\gamma \in X_aU_4$ , по лемме 5, и поэтому

$$A = X_aU_4 = (X_{a+b}U_4)^{n_b}.$$

В оставшихся случаях  $A = \langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle \times U_5$  для элемента  $\alpha$  с углом  $b$  и элемента  $\beta \in U_2 \setminus U_4$  с одним из условий, где  $v, f, g \in K$ :

$$(i) \quad \beta = x_{a+b}(1)x_{3a+b}(v), \quad \alpha = x_b(1)x_{2a+b}(f)x_{3a+b}(g);$$

$$(ii) \quad \beta = x_{2a+b}(1)x_{3a+b}(v), \quad \alpha = x_b(1)x_{a+b}(f)x_{3a+b}(g).$$

В обоих случаях  $\alpha^2 = [x_b(1), x_{3a+b}(g)] = x_{3a+2b}(g) = 1$  и поэтому  $g = 0$ . С точностью до  $X_a$ -сопряжения  $A$ , можно считать  $v = 0$  в (i), а в (ii) –  $f = 0$ . Тогда соотношение  $1 = [\alpha, \beta]$  дает  $f = 0$  в (i) и  $v = 0$  в (ii). Таким образом,  $A = X_bX_{a+b}U_5 = (U_3)^{n_a}$  или  $A = X_bX_{2a+b}U_5 = (X_{a+b}U_4)^{n_a}$ .  $\square$

В группе лиева типа  ${}^3D_4$  подгруппу  $\Delta_1 = X_{a+b}X_{2a+b}U_5$  нормализует  $n_a$ . Выделим аддитивные преобразования  $\tilde{\cdot}$  поля  $K$  и  $\beta(v)$  такие, что

$$\beta(v) := x_{a+b}(v)x_{2a+b}(\tilde{v}), \quad (t\tilde{v} - \tilde{t}v)^\pi = 0 \quad (t, v \in K).$$

**Лемма 7.** *Большие элементарные абелевы подгруппы в  $U_2$  группы  $U$  типа  ${}^3D_4$  исчерпывают подгруппы вида  $\beta(K)U_4, U_3$ , а также диагонально сопряженные к подгруппам*

$$x_{a+b}(K_\sigma)x_{2a+b}(K^{1-\sigma})U_5 \quad \text{или} \quad x_{a+b}(K^{1-\sigma})x_{2a+b}(K_\sigma)U_5. \quad (3.3)$$

**Доказательство.** Выберем, как в лемме, подгруппу  $A$ . Условия абелевости  $A$  из леммы 2, в частности, включение  $A_2A_3 \subseteq Ker(\pi) = K^{1-\sigma}$  сохраняются при умножениях  $A_i$  и  $F$  на элементы из  $K_\sigma$ . Когда  $A_2$  и  $A_3$  порождают ненулевые  $K_\sigma$ -модули, размерность хотя бы одного из них равна 1; иначе  $(A \cap U_2)U_4$  – элементарная абелева подгруппа порядка  $> \mathfrak{a}_e(\mathbf{U})$ . С точностью до диагонального и  $n_a$ -сопряжений,  $A_2 = K_\sigma$  и, по лемме 5,  $A_3 \subseteq K^{1-\sigma}$ . Отсюда следует, что  $A$  – первая подгруппа (3.3).  $\square$

Полное описание  $A(U)$  и  $A_c(U)$  получаем и для типа  ${}^3D_4$ , по аналогии с типом  $G_2$ , используя леммы 6 и 7; описание подгрупп Томпсона см. § 4. Заметим, что  $x_a(d)$ -сопряжение  $X_{a+b}U_4$  дает подгруппу  $\beta(K)U_4$ , где  $\tilde{t} = \bar{d}\bar{t} + d\bar{t}$ ,  $(t\tilde{v} - \tilde{t}v)^\pi = [d(\bar{t}\bar{v} - \bar{v}\bar{t} + \bar{v}\bar{t} - \bar{t}\bar{v})]^\pi = (d \cdot 0)^\pi = 0 \quad (t, v \in K)$ .

#### 4. Группы $U$ типа ${}^2B_2$ и ${}^2F_4$ и подгруппы Томпсона

Группа лиева типа  ${}^2B_2$  (или группа М. Сузуки) и группа Ри типа  ${}^2F_4$  определены над полем  $K$  с автоморфизмом  $\bar{\phantom{x}}$  таким, что  $\bar{\bar{x}}^2 = x, x \in K$ .

Хорошо известно, что для типа  ${}^2B_2$  множество  $A(U)$  всех больших абелевых подгрупп в  $U$  образуют максимальные абелевы подгруппы; их исчерпывают подгруппы вида  $\langle \gamma \rangle U_2$  ( $\gamma \in U \setminus U_2$ ). В частности,

$$J(U) = U, \quad A_e(U) = \{U_2\} \quad J_e(U) = U_2.$$

Для группы  $U = U^2 F_4(K)$  в представлении из [5, § 4 (I)] подгруппу  $U_i$  порождают «корневые элементы»  $R_{mj}(t)$ , соответствующие столбцам с номерами  $\geq i$  в следующей таблице:

$$\begin{array}{cccccccc} R_{21} & R_{2,-1} & R_{3,-1} & R_{3,-2} & & & & \\ R_{32} & R_{31} & R_{43} & R_{42} & R_{41} & R_{4,-1} & R_{4,-2} & R_{4,-3}. \end{array}$$

Основные соотношения [5, Лемма 4] показывают, что подгруппы

$$\langle R_{21}(K)R_{2,-1}(K) \rangle, \langle R_{43}(K)R_{4,-3}(K) \rangle, \langle R_{3v}(K)R_{4,2v}(K) \rangle \quad (|v| = 1)$$

изоморфны  $U^2 B_2(K)$ ; отображение  $t \rightarrow R_{mj}(t)$  ( $t \in K$ ) для оставшихся  $R_{mj}$  есть изоморфизм аддитивной группы  $K^+$  поля  $K$  в  $U$ .

Из основных соотношений сразу же следует, что подгруппы

$$\langle R_{43}(1) \rangle R_{42}(K)U_5, \quad \langle R_{3,-1}(1) \rangle R_{2,-1}(K)R_{3,-2}(K)U_6 \quad (4.1)$$

есть большие абелевы в  $U$ , а подгруппы

$$\begin{array}{cc} R_{42}(K)U_5, & R_{32}(K)R_{42}(K)R_{41}(K)R_{4,-1}(K)U_8, \\ R_{3,-2}(K)U_5, & R_{2,-1}(K)R_{3,-2}(K)U_6 \end{array} \quad (4.2)$$

– большие элементарные абелевы. ( $\langle R_{31}(1) \rangle R_{42}(K)R_{41}(K)U_7$  – максимальная абелева подгруппа, а ее порядок  $< \mathbf{a}_e(U)$ .)

Используя [5, Лемма 4], несложно показать, что (4.1) и (4.2), с точностью до  $B$ -сопряжения, исчерпывают соответствующие подгруппы. Это дает также подгруппы Томпсона.

**Замечание.** В [18] показано, что в конечной группе  $U$  либо каждая большая абелева подгруппа  $G$ -сопряжена с нормальной подгруппой в  $U$ , либо  $G$  типа  $G_2$ ,  ${}^3D_4$ ,  $F_4$  или  ${}^2E_6$ . К исключениям в [18, Теорема 6.5] нужно отнести также тип  ${}^2F_4$ : с учетом [5, Лемма 4], вторая из подгрупп в (4.1) не является нормальной в  $U$  (ср. с замечанием после таблицы 3 в [2]) и, более того, она не  $G$ -сопряжена с нормальной подгруппой в  $U$ .

Резюмируем с уточнениями результаты о подгруппах Томпсона для групп  $U$  исключительных типов.

**Теорема 3.** Пусть  $U = UG(K)$  – исключительного типа. Тогда:

- a)  $J(U) = J_e(U) = \prod_{i=1}^6 T(\alpha_i)$  для типа  $E_8$ ;
- b)  $A(U) = A_N(U) = A_e(U)$  для типа  $E_6$  и  $E_7$ ;
- c)  $J(U) = J_e(U) = U_{\alpha_1}$  в группе  $UF_4(K)$  при  $2K = K$  и в  $U^2E_6(K)$ ;
- d)  $J(U) = J_e(U) = U$  в группе  $UF_4(K)$  при  $2K = 0$ ;
- e)  $J(U) = T(a)$ ,  $J_e(U) = U$  в группе  $U^3D_4(8)$  и  $J(U) = J_e(U) = U$  в группах  $U^3D_4(K)$  при  $|K_\sigma| > 2$  и  $UG_2(K)$  при  $|K| > 2$ ;
- f)  $J(U) \in A_N(U)$ ,  $|A_N(U)| = 1$  и  $J_e(U) = U$  для группы  $UG_2(2)$ ;
- g)  $J(U) = U$ ,  $J_e(U) = U_2$  в группе  $U^2B_2(K)$ ;
- h)  $J(U) = R_{2,-1}(K)U_3$ ,  $J_e(U) = R_{32}(K)U_2$  в группе  $U^2F_4(K)$ .

### Список литературы

1. Вдовин Е. П. Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле / Е. П. Вдовин // Мат. заметки – 2000. – Т. 68, вып. 1. – С. 53–76.
2. Вдовин Е. П. Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле / Е. П. Вдовин // Алгебра и логика. – 2001. – Т. 40, № 5. – С. 523–544.
3. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле / А. С. Кондратьев // Успехи мат. наук. – 1986. – Т. 41, № 1 (247). – С. 57–96.
4. Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп / В. М. Левчук // Мат. заметки. – 1982. – Т. 31, вып. 4. – С. 509–525.
5. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле / В. М. Левчук // Алгебра и логика. – 1990. – Т. 29, № 2. – С. 141–161.
6. Левчук В. М. Обобщенные унипотентные подгруппы классических линейных групп / В. М. Левчук // Фундам. и прикл. математика. – 1996. – Т. 2, № 2. – С. 625–627.
7. Левчук В. М. Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы / В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова // Докл. РАН. – 2008. – Т. 419, № 5. – С. 595–598.
8. Левчук В. М. Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле / В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова // Тр. ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 133–142.
9. Левчук В. М. Нормальное строение унипотентной подгруппы групп лиева типа и её экстремальные подгруппы / В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова // Фундам. и прикл. математика. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 155–169.
10. Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли / А. И. Мальцев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1945. – Т. 9, № 4. – С. 291–300.
11. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли / Ж.-П. Серр. – М. : Мир, 1969. – 379 с.
12. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М. : Мир, 1975. – 264 с.
13. Сулейманова Г. С. О сопряженности в группе Шевалле больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы / Г. С. Сулейманова // Фундамен. и прикл. математика. – 2009. – Т. 15, № 7. – С. 205–216.

14. Сулейманова Г. С. Классы сопряженных в группе Шевалле типа  $F_4$  больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы / Г. С. Сулейманова // Владикавказ. мат. журн. – 2011. – Т. 13, вып. 2. – С. 45–55.
15. Сулейманова Г. С. Сопряженность в конечной группе Шевалле типа  $E_8$  больших абелевых унипотентных подгрупп / Г. С. Сулейманова // J. of Siberian Federal University. Math. & Physics. – 2011. – Vol. 4, Issue 4. – P. 536–540.
16. Сулейманова Г. С. Исключительные большие унипотентные абелевы подгруппы групп лиева типа / Г. С. Сулейманова // Вестн. СибГАУ. – 2012. – Т. 44, № 4. – С. 61–64.
17. Carter R. Simple groups of Lie type / R. Carter. – N. Y. : Wiley and Sons, 1972.
18. Levchuk V. M. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type / V. M. Levchuk, G. S, Suleimanova // Journal of Algebra. – 2012. – Vol. 349, N 1. – P. 98–116.
19. Levchuk V. M. Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups / V. M. Levchuk, G. S, Suleimanova // J. of Siberian Federal University. Math. & Physics. – 2013. – Vol. 6, Issue 1. – P. 63–73.

---

**G. S. Suleimanova**  
**Large elementary abelian unipotent subgroups**  
**in Lie type groups**

**Abstract.** The description of large elementary abelian unipotent subgroups in Lie type groups is completed.

**Keywords:** Lie type group; unipotent subgroup; large abelian subgroup.

Сулейманова Галина Сафиуллаовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79 тел.: (3912)2062148 (suleimanova@list.ru)

Suleimanova Galina, Institute of Mathematics and Computr Science, Siberian Federal University, 79, Svobodny, Krasnoyarsk, 660041, Phone: (3912)2062148 (suleimanova@list.ru)