Серия «Математика»
2017. Т. 21. С. 19—32

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.71; 517.977.15
MSC 93C15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.19

Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями

В. Р. Барсегян

Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет

Аннотация. Возможности современной вычислительной и измерительной техники позволяют использовать наиболее адекватные математические модели рассматриваемых динамических процессов управления в зависимости от их практического назначения. Математическое описание разнообразных динамических процессов управления, в которых будущее течение процессов зависит не только от настоящего, но и существенно определяется предысторией процесса, осуществляется при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также уравнениями с последействием или нагруженными дифференциальными уравнениями. В данной работе рассмотрена задача управления и оптимального управления одной системой линейных нагруженных дифференциальных уравнений, для которой, наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями, заданы неразделенные многоточечные промежуточные условия. Предполагается, что в точках нагружения функция фазового состояния системы имеет левосторонние пределы и выполняются некоторые неразделенные многоточечные условия. Подобные задачи возникают, например, когда при наблюдении за динамическим процессом измеряются фазовые состояния в некоторые моменты времени и информация непрерывно передается с помощью обратной связи. Эти задачи имеют важное прикладное и теоретическое значение, естественным образом возникает необходимость их исследования в различных постановках. В работе сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости для рассмотренной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Приведен конструктивный подход решения задачи управления и сформулированы условия существования программного управления и движения. Построен аналитический вид управляющего воздействия для задачи управления, а также предложен способ решения задачи оптимального управления.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с памятью, многоточечные промежуточные условия, задача управления, вполне управляемость.

Введение

Исследование многих процессов управления из различных областей науки и техники позволяют заключить, что их математическая модель сводится к динамическим системам переменной структуры [4; 5; 6; 7; 18] и системам с многоточечными промежуточными условиями [1; 2; 4; 5; 7; 17]. Характерной чертой многоточечных задач управления является наличие неразделенных условий в нескольких промежуточных точках интервала исследования. Внимание исследователей привлекли интересные краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия [1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 13; 15; 17].

Изучение подобных процессов управления приводит к выводу, что будущее течение многих процессов управления оказывается зависимым не только от настоящего, но и существенно определяется предысторией процесса. Математическое описание указанных динамических процессов может быть осуществлено при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также уравнениями с последействием или нагруженными дифференциальными уравнениями. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе [3; 8; 12; 16] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы (функции) от решения, в частности, значения решения, в которых фазовое состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на динамику процесса в целом.

Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [3; 8; 12; 16] и установлены условия их разрешимости различными методами. Значительный вклад в развитие теории нагруженных уравнений внесла работа [16] (и другие работы этого же автора), где даны определения нагруженных дифференциальных, нагруженных интегро-дифференциальных, нагруженных функциональных уравнений и их многочисленные приложения. В монографии [8] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как возмущения дифференциальных уравнений. В работе [3] на основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений и предложен алгоритм нахождения решения. Исследованию вопросов существования решения нагруженных линейных дифференциальных уравнений посвящено много работ, однако, сравнительно мало внимания уделялось задачам управления.

Интерес исследователей к задачам управления нагруженными динамическими системами и системами с многоточечными промежуточными условиями связан также с возможностями современной вычислительной и измерительной техники, которые позволяют использовать наиболее адекватные математические модели рассматриваемых процессов. В последние годы проводится интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными прикладными задачами механики, биологии, экологии и химии, моделируемых с помощью нагруженных уравнений.

В настоящей работе рассматриваются задачи управления и оптимального управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечными неразделенными промежуточными условиями. Сформулированы необходимое и достаточное условие вполне управляемости и условия существования программного управления и движения. Изложен конструктивный подход решения задачи управления и построен явный вид управляющего воздействия для задачи управления, а также предложен способ решения задачи оптимального управления.

1. Постановка задач

Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается нагруженными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u, \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ — фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B(t)$ матрицы параметров системы (непрерывные на $[t_0, T]$), $k = \overline{0,3}$, $u(t)$ управляющее воздействие с размерностями: $A_k(t)$ — $(n \times n)$, $B(t)$— $(n \times r)$, $u(t)$ — $(r \times 1)$.

Отметим, что в формуле (1.1) слагаемые $A_k(t)x(t_k)$, $k = \overline{0,3}$, как функции влияют на систему, начиная с момента времени $t \geq t_k$. Так как значение фазового состояния $x(t_k)$, как результат измерения, определяется в момент времени $t = t_k$ и с этого момента (при $t \geq t_k$) непрерывно влияет на систему в виде слагаемого $A_k(t)x(t_k)$.

Пусть заданы начальное

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

и конечное

$$x(T) = x_T \tag{1.3}$$

состояния системы (1.1).

Предполагается, что заданы фиксированные моменты времени t_k, $k = \overline{1,\, 4}$, такие что $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$. Функция $x(t)$ непрерывна на интервалах $[t_{k-1},\, t_k)$ и в точках нагружения t_k имеет конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t \to t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

Пусть заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия

$$\sum_{k=1}^{3} F_k x(t_k) = \alpha, \tag{1.4}$$

где $\alpha - q$-мерный ($q \leq n$) вектор-столбец, $F_k - (q \times n)$- мерные матрицы, $k = \overline{1,\, 3}$, элементы которых являются вещественными числами.

Вообще для ряда прикладных задач можно предполагать, что в промежуточные моменты времени t_k, $k = \overline{1,\, 3}$, условию (1.4) удовлетворяют не все значения координат фазового вектора $x(t_k)$, а лишь некоторые. В таких случаях будем считать, что соответствующие элементы матрицы F_k будут нулями.

Наличие в динамике системы нагруженного слагаемого $A_k(t)x(t_k)$ не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследования, которые развиты для обычных (не нагруженных) динамических систем. Это подчеркивает как теоретическую, так и практическую актуальность исследования различных задач управления для нагруженных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $u = u(t)$, $t \in [t_0, T]$, и программное движение системы (1.1), переводящее движение системы (1.1) из начального состояния (1.2) в конечное (1.3), обеспечивающее выполнение условия (1.4), а также построить программное управление.

Пусть для отбора оптимальных решений на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества $\chi[u]$, который имеет смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Задачу оптимального управления для системы (1.1) с условиями (1.2)-(1.4) для критерия качества $\chi[u]$ можно сформулировать следующим образом.

Задача 2. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее движение системы (1.1) из начального состояния (1.2) в конечное (1.3), обеспечивающее выполнение условия (1.4) и имеющее наименьшее возможное значение критерия качества $\chi[u^0]$.

Предположим, что система нагруженных дифференциальных уравнений (1.1) с условием (1.4) на промежутке времени $[t_0, T]$ является вполне управляемой [4; 7; 14]. Это означает, что на промежутке времени

$[t_0, T]$ можно выбрать управляющее воздействие $u(t)$, под воздействием которого соответствующее движение $x(t) = x(t, u(t))$, удовлетворяющее системе (1.1), выходя из начального состояния (1.2) и удовлетворяя промежуточному условию (1.4), достигает конечного состояния (1.3).

2. Построение движения нагруженной системы

Для построения движения системы (1.1) интервал $[t_0, T]$ разбиваем на части точками нагружения: $[t_0, T) = \bigcup\limits_{k=1}^{4} [t_{k-1},\, t_k)$. Учитывая последовательность точек нагружения и характер влияния соответствующих слагаемых $A_k(t)x(t_k)$, $k = \overline{1,\, 3}$, уравнение (1.1) выпишем по отдельности на интервалах $[t_{k-1},\, t_k)$, $k = \overline{1,\, 4}$, в виде поэтапно меняющихся дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \begin{cases} A_0(t)x + B(t)u, & t \in [t_0, t_1), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u, & t \in [t_1, t_2), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + B(t)u, & t \in [t_2, t_3), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u, & t \in [t_3, T]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Для решения поставленных задач построим движение системы (1.1) (или поэтапно меняющейся системы (2.1)) на интервале $[t_0, T]$. Для этого выпишем решение системы (2.1) для промежутка времени $[t_0, t_1)$ следующим образом:

$$x(t) = X[t, t_0]x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} H[t, \tau]u(\tau)d\tau, \tag{2.2}$$

где $H[t, \tau] = X[t, \tau]B(\tau)$, $X[t, \tau]$ — нормированная фундаментальная матрица решения однородного уравнения $\dot{x} = A_0(t)x$.

Для промежутка времени $[t_1, t_2)$ решение уравнения (2.1) запишем в виде

$$x(t) = X[t, t_1]x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} X[t, \tau]\,(A_1(\tau)x(t_1) + B(\tau)\,u(\tau))d\tau. \tag{2.3}$$

С учетом $\lim\limits_{t \to t_k - 0} x(t) = x(t_k)$, из формулы (2.2) вычисляем значение $x(t_1)$. Подставляя его в (2.3), получим движение системы (2.1) для момента времени $t \in [t_1, t_2)$ в виде

$$x(t) = \tilde{X}[t, t_1]X[t_1, t_0]x(t_0) + \tilde{X}[t, t_1]\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_1}^{t} H[t, \tau]u(\tau)d\tau. \tag{2.4}$$

Продолжая эту процедуру, получим формулу представления движения системы (2.1) для момента времени $t \in [t_2, t_3)$ в виде

$$x(t) = Y[t,t_2]X[t_1,t_0]x(t_0) + Y[t,t_2]\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1,\tau]u(\tau)d\tau + \tag{2.5}$$

$$+\tilde{X}[t,t_2]\int\limits_{t_1}^{t_2} H[t_2,\tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_2}^{t} H[t,\tau]u(\tau)d\tau,$$

$$Y[t,t_2] = \tilde{X}[t,t_2]\tilde{X}[t_2,t_1] + \int\limits_{t_2}^{t} X[t,\tau]A_1(\tau)d\tau,$$

а для момента времени $t \in [t_3, t_4]$ в виде

$$x(t) = Z[t,t_3]X[t_1,t_0]x(t_0) + Z[t,t_3]\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1,\tau]u(\tau)d\tau +$$

$$+\left(\int\limits_{t_3}^{t} X[t,\tau]A_2(\tau)d\tau + \tilde{X}[t,t_3]\tilde{X}[t_3,t_2]\right)\int\limits_{t_1}^{t_2} H[t_2,\tau]u(\tau)d\tau + \tag{2.6}$$

$$+\tilde{X}[t,t_3]\int\limits_{t_2}^{t_3} H[t_3,\tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_3}^{t} H[t,\tau]u(\tau)d\tau,$$

где

$$\tilde{X}[t,t_j] = X[t,t_j] + \int\limits_{t_j}^{t} X[t,\tau]A_j(\tau)d\tau,\ j = \overline{1,3},$$

$$Z[t,t_3] = \int\limits_{t_3}^{t} X[t,\tau]A_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_3}^{t} X[t,\tau]A_2(\tau)d\tau\tilde{X}[t_2,t_1] + \tag{2.7}$$

$$+\tilde{X}[t,t_3]Y[t_3,t_2].$$

Таким образом, имея начальное состояние $x(t_0)$ системы (1.1) и задавая управляющее воздействие $u(t)$, фазовое состояние $x(t)$ системы (1.1) (решение нагруженного уравнения (1.1)) для соответствующих промежутков времени $[t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1,\,4}$, определяется с помощью формул (2.2), (2.4)-(2.6).

3. Решение задач

Для моментов времени $t = t_k$, $k = \overline{1,\,3}$, из формул (2.2), (2.4) и (2.5), вычисляя $x(t_1)$, $x(t_2)$ и $x(t_3)$ соответственно, и подставляя их значения в формулу (1.4), будем иметь следующее соотношение:

$$\Big(F_1 + F_2\tilde{X}[t_2,t_1] + F_3 Y[t_3,t_2]\Big)\, X[t_1,t_0]x(t_0)+$$

$$+\Big(F_1 + F_2\tilde{X}[t_2,t_1] + F_3 Y[t_3,t_2]\Big)\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1,\tau]u(\tau)d\tau+$$

$$+\Big(F_2 + F_3\tilde{X}[t_3,t_2]\Big)\int\limits_{t_1}^{t_2} H[t_2,\tau]u(\tau)d\tau + F_3\int\limits_{t_2}^{t_3} H[t_3,\tau]u(\tau)d\tau = \alpha, \quad (3.1)$$

а при $t = t_4 = T$ из формулы (2.6) получаем

$$x(t_4) = Z[t_4,t_3]X[t_1,t_0]x(t_0) + Z[t_4,t_3]\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1,\tau]u(\tau)d\tau+$$

$$+\left(\int\limits_{t_3}^{t_4} X[t_4,\tau]A_2(\tau)d\tau + \tilde{X}[t_4,t_3]\tilde{X}[t_3,t_2]\right)\int\limits_{t_1}^{t_2} H[t_2,\tau]u(\tau)d\tau+ \qquad (3.2)$$

$$+\tilde{X}[t_4,t_3]\int\limits_{t_2}^{t_3} H[t_3,\tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_3}^{t_4} H[t_4,\tau]u(\tau)d\tau.$$

Соотношения (3.1) и (3.2) представим в следующем виде:

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{k=1}^{3} H_i[t]\right)u(t)dt = \qquad (3.3)$$

$$= \alpha - \Big(F_1 + F_2\tilde{X}[t_2,t_1] + F_3 Y[t_3,t_2]\Big)\, X[t_1,t_0]x(t_0),$$

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{k=1}^{4} \tilde{H}_i[t]\right)u(t)dt = x(T) - Z[T,t_3]X[t_1,t_0]x(t_0), \qquad (3.4)$$

где

$$H_1[t] = \Big(F_1 + F_2\tilde{X}[t_2,t_1] + F_3 Y[t_3,t_2]\Big)\,\bar{H}[t_1,t],$$

$$H_2[t] = \Big(F_2 + F_3\tilde{X}[t_3,t_2]\Big)\,\bar{H}[t_2,t], \quad H_3[t] = F_3 H[t_3,t],$$

$$\tilde{H}_1[t] = Z[t_4, t_3]\bar{H}[t_1, t], \quad \tilde{H}_3[t] = \tilde{X}[t_4, t_3]\bar{H}[t_3, t], \quad \tilde{H}_4[t] = \bar{H}[t_4, t],$$

$$\tilde{H}_2[t] = \left(\int\limits_{t_3}^{t_4} X[t_4, \tau]A_2(\tau)d\tau + \tilde{X}[t_4, t_3]\tilde{X}[t_3, t_2] \right) \bar{H}[t_2, t],$$

$$\bar{H}[t_1, t] = \begin{cases} H[t_1, t] \text{ при } t_0 \le t < t_1, \\ 0 \text{ при } t_1 \le t \le T, \end{cases} \quad \bar{H}[t_2, t] = \begin{cases} 0 \text{ при } t_0 \le t < t_1, \\ H[t_2, t] \text{ при } t_1 \le t < t_2, \\ 0 \text{ при } t_2 \le t \le T, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\bar{H}[t_3, t] = \begin{cases} 0 \text{ при } t_0 \le t < t_2, \\ H[t_3, t] \text{ при } t_2 \le t < t_3, \\ 0 \text{ при } t_3 \le t \le T, \end{cases} \quad \bar{H}[t_4, t] = \begin{cases} 0 \text{ при } t_0 \le t < t_3, \\ H[t_4, t] \text{ при } t_3 \le t \le T. \end{cases}$$

Вводя следующие обозначения:

$$H[t] = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} H_i[t] \\ \sum\limits_{k=1}^{4} \tilde{H}_i[t] \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\eta(t_0, ..., T) = \begin{pmatrix} \alpha - \left(F_1 + F_2\tilde{X}[t_2, t_1] + F_3Y[t_3, t_2] \right) X[t_1, t_0]x(t_0) \\ x(T) - Z[T, t_3]X[t_1, t_0]x(t_0) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

представим интегральные соотношения (3.3) и (3.4) в виде

$$\int\limits_{t_0}^{T} H[t]u(t)dt = \eta(t_0, ..., T). \tag{3.8}$$

Блочная матрица $H[t]$ состоит из матриц с размерностями $(q \times r)$ и $(n \times r)$, следовательно, имеет размерность $((q + n) \times r)$. Отметим, что в (3.8) число интегральных соотношений равно $n + q$.

Из интегрального соотношения (3.8) следует, что система (1.1) с многоточечным промежуточным условием (1.4) на отрезке $[t_0, T]$ вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого заданного вектора $\eta(t_0, ..., T)$ из пространства R^{n+q} можно указать управление $u = u(t, \eta(t_0, ..., T))$, удовлетворяющее условию (3.8).

Сформулируем утверждения для вполне управляемости системы (1.1) с условием (1.4) следующим образом.

Для того чтобы нагруженная система (1.1) с многоточечным промежуточным условием (1.4) была вполне управляемой на отрезке $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбцы матрицы $H[t]$ (3.6) были линейно независимыми на этом отрезке.

Следуя [4; 6; 11], функцию $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющую интегральному соотношению (3.8), ищем в виде

$$u(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} H_i[t] \\ \sum\limits_{k=1}^{4} \tilde{H}_i[t] \end{pmatrix}^T C + v(t), \tag{3.9}$$

где C — искомый постоянный вектор, $v(t)$ — некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int\limits_{t_0}^{T} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} H_i[t] \\ \sum\limits_{k=1}^{4} \tilde{H}_i[t] \end{pmatrix} v(t)dt = 0. \tag{3.10}$$

Верхний индекс "T" в (3.9) и далее означает операцию транспонирования.

Вектор C удовлетворяет уравнению

$$Q\left(t_0, ..., T\right) C = \eta\left(t_0, ..., T\right), \tag{3.11}$$

где

$$Q(t_0, ..., T) = \int\limits_{t_0}^{T} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} H_i[t] \\ \sum\limits_{k=1}^{4} \tilde{H}_i[t] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} H_i[t] \\ \sum\limits_{k=1}^{4} \tilde{H}_i[t] \end{pmatrix}^T dt. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.11) имеет решение, если $\det Q \neq 0$ или ранг матрицы Q совпадает с рангом расширенной матрицы $\{Q, \eta\}$.

Если $\det Q \neq 0$, то решение уравнения (3.11): $C = Q^{-1}\eta$. Следовательно, из (3.9), имеем

$$u(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} H_i[t] \\ \sum\limits_{k=1}^{4} \tilde{H}_i[t] \end{pmatrix}^T Q^{-1} \times \tag{3.13}$$

$$\times \begin{pmatrix} \alpha - \left(F_1 + F_2\tilde{X}[t_2, t_1] + F_3 Y[t_3, t_2]\right) X[t_1, t_0]x(t_0) \\ x(T) - Z[T, t_3]X[t_1, t_0]x(t_0) \end{pmatrix} + v(t).$$

Таким образом, решение задачи 1 можно сформулировать в виде следующей теоремы, аналогичной теореме, доказанной в [4; 11].

Теорема. Для того чтобы существовало программное управление вида (3.9) и соответствующее ему решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (3.8), (3.10), необходимо и достаточно, чтобы матрица

(3.12) была неособой или чтобы ранги матриц Q и $\{Q, \eta\}$ совпадали между собой.

Учитывая обозначения (3.5)-(3.7) при $\det Q \neq 0$ и $v(t) = 0$, управляющее воздействие $u(t)$, согласно (3.13), представим в следующем виде:

$$u(t) = \begin{pmatrix} \left(F_1 + F_2\tilde{X}[t_2, t_1] + F_3 Y[t_3, t_2]\right) H[t_1, t] \\ Z[t_4, t_3] H[t_1, t] \end{pmatrix}^T Q^{-1}\eta(t_0, ..., T) \tag{3.14}$$

при $t \in [t_0, t_1)$,

$$u(t) = \begin{pmatrix} \left(F_2 + F_3\tilde{X}[t_3, t_2]\right) H[t_2, t] \\ \left(\int\limits_{t_3}^{t_4} X[t_4, \tau] A_2(\tau) d\tau + \tilde{X}[t_4, t_3]\tilde{X}[t_3, t_2]\right) H[t_2, t] \end{pmatrix}^T Q^{-1}\eta(t_0, ..., T)$$

при $t \in [t_1, t_2)$,

$$u(t) = \begin{pmatrix} F_3 H[t_3, t] \\ \tilde{X}[t_4, t_3] H[t_3, t] \end{pmatrix}^T Q^{-1}\eta(t_0, ..., T) \text{ при } t \in [t_2, t_3),$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ H[t_4, t] \end{pmatrix}^T Q^{-1}\eta(t_0, ..., T) \text{ при } t \in [t_3, T].$$

Подставляя из (3.14) управляющее воздействие $u(t)$ в (2.2), (2.4)-(2.6) соответственно, получим программное движение системы (1.1) на промежутке времени $[t_0, T]$, удовлетворяющее условиям (1.2)-(1.4).

Для решения задачи 2 заметим, что (3.8) является линейной операцией, которая порождена функцией $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Следовательно, если функционал $\chi[u]$ является нормой некоторого линейного нормированного пространства, то решение задачи 2 следует построить с помощью алгоритма решения соответствующей проблемы моментов [4; 14]. Тогда построенное оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющее условию (3.8) и минимизирующее функционал $\chi[u]$, будет решением задачи 2.

Заключение

Предложен конструктивный подход исследования задач управления и оптимального управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечными неразделенными промежуточными условиями. Введена формула определения фазового состояния таких динамических систем для любого момента времени при заданном начальном состоянии. Сформулированы необходимое и достаточное условие вполне управляемости, условия существования программного управления и движения. Построены аналитические виды управляющего воздействия для задачи управления, а также предложен способ решения задачи оптимального управления.

Список литературы

1. Абдуллаев В. М. Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями / В.М. Абдуллаев // Сиб. журн. индустр. математики. – 2012. – Т. 15, № 3(51). – С. 3–15.
2. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями / Л. Т. Ащепков // ПММ. – 1981. – Т. 45, вып. 2. – С. 215–222.
3. Бакирова Э. А. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений / Э. А. Бакирова, Ж. М. Кадирбаева // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2016. – № 5. – С. 168–175.
4. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями / В. Р. Барсегян. – М. : Наука, 2016. – 230 с.
5. Барсегян В. Р. Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями / В. Р. Барсегян, Т. В. Барсегян // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 4. – С. 3-15. https://doi.org/10.1134/S0005117915040013.
6. Barseghyan V. R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems / V. R. Barseghyan // Yugoslav Journal of Operations Resarch. – 2012. – Vol. 22, N 1. – P. 31–39.
7. Барсегян В. Р. Управление поэтапно меняющимися линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени / В.Р. Барсегян // Динамика неоднородных систем / Тр. ИСА РАН. – 2010. – Т. 53(2), вып. 14. – С. 7–18.
8. Дженалиев М. Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов. – Алматы, 2010. – 334 с.
9. Джумабаев Д. С. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи / Д. С. Джумабаев, А. Е. Иманчиев // Мат. журн. – 2005. – Т. 5, № 1(15). – С. 30–38.
10. Дыхта В. А. Принцип максимума для гладких задач оптимального импульсного управления с многоточечными фазоограничениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – Т. 49, № 6. – С. 981–997.
11. Зубов В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 496 с.
12. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А. И. Кожанов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 4. – С. 694–716.
13. Коняев Ю. А. Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач / Ю. А. Коняев // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 57–61.
14. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1968. – 476 с.

15. Миронов В. И. Энергетически оптимальное управление в линейных многоточечных задачах о встрече движений / В. И. Миронов, Ю. В. Миронов // Тр. СПИИРАН. – 2007. – Вып. 5. – С. 322-328.
16. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение / А. М. Нахушев. – М. : Наука, 2012. – 232 с.
17. Самойленко А. М. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач / А. М. Самойленко, В. Н. Лаптинский, К. К.Кенжебаев. – Киев : ИМ НАН Украины, 1999. – 220 с.
18. Теория систем с переменной структурой / под ред. С.В. Емельянова. – М. : Наука, 1970. – 592 с.

Барсегян Ваня Рафаелович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б; профессор, факультет математики и механики, Ереванский государственный университет, 0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1 тел.: (37410)523640
(e-mail: barseghyan@sci.ams)

V. R. Barseghyan

The Control Problem for a System of Linear Loaded Differential Equations with Nonseparated Multi-Point Intermediate Conditions

Abstract. The possibilities of modern computational and measurement techniques allow using the most adequate mathematical models of control of the considered dynamic processes depending on their adequate practical purpose. A mathematical description of various dynamic processes of control in which the future flow of processes depends not only on the present but also is significanlty determined by the history of the process, is performed by using ordinary differential equations with memory of various types, also called equations with aftereffect or loaded differential equations. In this work the problem of control and optimal control of a system of linear loaded differential equations is considered, for which, along with classical boundary (initial and terminal) conditions, nonseparated multipoint intermediate conditions are given. It is assumed that at the loading points the phase-state function of the system has left-side limits and some nonseparated multipoint conditions are satisfied. Similar problems arise, for example, when, during the observation of a dynamic process, phase states are measured at some moments of time and the information is continuously transmitted by feedback. These problems have important practical and theoretical value, hence the need for their investigation in various formulations arises naturally. In this work necessary and sufficient conditions for complete controllability for the considered system of linear loaded differential equations is formulated. A constructive approach for the solution of control problem is given and conditions for the existence of program control and motion are formulated. An explicit form of the control action for the control problem is constructed and a method for solving the optimal control problem is proposed. An analitical form of the control action for the control problem is constructed, as well as an approach for solving the optimal control problem is proposed.

Keywords: loaded differential equations, differential equations with memory, multipoint intermediate conditions, control problem, complete controllability.

References

1. Abdullaev V.M. Reshenie differentsial'nykh uravneniy s nerazdelennymi mnogotochechnymi i integral'nymi usloviyami [Solution of Differential Equations with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions]. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2012, vol. 15, no 3 (51), pp. 3-15.
2. Aschepkov L.T. Optimal'noe upravlenie sistemoy s promezhutochnymi usloviyami [Optimal Control of the System with Intermediate Conditions]. *PMM*, 1981, vol.45, no 2, pp. 215-222.
3. Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. O razreshimosti lineynoy mnogotochechnoy kraevoy zadachi dlya nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy [On a Solvability of Linear Multipoint Boundary Value Problem for the Loaded Differential Equations]. *Izvestiya HAH PK. Ser. fiz.-mat.*, 2016, vol. 5, no 309, pp. 168-175.
4. Barseghyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of Compound Dynamic Systems and of Systems with Multipoint Intermediate Conditions]. Moscow, Nauka, 2016. 230 p.
5. Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. On an Approach to the Problems of Control of Dynamic System with Nonseparated Multipoint Intermediate Conditions. [Automation and Remote Control], 2015, vol. 76, no 4, pp. 549-559. https://doi.org/10.1134/S0005117915040013
6. Barseghyan V.R. Control of Stage by Stage Changing Linear Dynamic Systems. *Yugoslav Journal of Operations Resarch*, 2012, vol. 22, no 1, pp. 31-39.
7. Barseghyan V.R. Upravlenie poetapno menyayushchimisya lineynymi dinamicheskimi sistemami s ogranicheniyami na znacheniya chastey koordinat fazovogo vektora v promezhutochnye momenty vremeni [Control of Stage by Stage Changing Linear Dynamic Systems with Constraints on the Values of Parts of the Coordinates of the Phase Vector in the Intermediate Moments of Time]. *Dinamika neodnorodnykh sistem. Trudy ISA RAN*, 2010, vol. 53(2), no 14, pp. 7-18.
8. Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded Equations as a Perturbation of Differential Equations]. Almaty, 2010. 334 p.
9. Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Korrektnaya razreshimost' lineynoy mnogotochechnoy kraevoy zadachi [Correct Solvability of Linear Miltipoint Boundary Value Problem]. *Matematicheskiy zhurnal*, 2005, vol. 5, no 1, pp. 30-38.
10. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. Printsip maksimuma dlya gladkikh zadach optimal'nogo impul'snogo upravleniya s mnogotochechnymi fazoogranicheniyami [The Maximum Principle for Smooth Problems of Optimal Impulse Control with Multipoint Phase Constraints]. *Zhurnal Vichislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 2009, vol.49, no 6, pp. 981-997.
11. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on the Theory of Control]. Moscow, Nauka, 1975. 496 p.
12. Kozhanov A.I. Nelineynye nagruzhennye uravneniya i obratnye zadachi [Nonlinear Loaded Equations and Inverse Problems]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2004, vol. 44, no 4, pp. 694-716.
13. Konyaev Yu.A. Konstruktivnye metody issledovaniya mnogotochechnykh kraevykh zadach [Constructive Methods for Studying Multipoint Boundary Value Problems]. *Izv. Vuzov. Matem.*, 1992, no 2, pp. 57-61.
14. Krasovsky N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka, 1968. 476 p.
15. Mironov V.I., Mironov Yu.V. Energeticheski optimal'noe upravlenie v lineynykh mnogotochechnykh zadachakh o vstreche dvizheniy [The Power Optimum Control

in Linear Multipointed Problems on Meeting Points Motions]. *Trudy SPIIRAN*, 2007, no 5, pp. 322-328.

16. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded Equations and their Applications]. Moscow, Nauka, 2012. 232 p.
17. Samoilenko A.M., Laptinsky V.N., Kenzhebaev K.K. *Konstruktivnye metody issledovaniya periodicheskikh i mnogotochechnykh kraevykh zadach* [Constructive Methods of Investigation of Periodic and Multipoint Boundary Problems]. Kiev, IM NAN Ukr., 1999. 220 p.
18. Emel'yanov S.V. (ed.) *Teoriya sistem s peremennoy strukturoy*[Theory of Variable Structure Systems]. Moscow, Nauka, 1970. 592 p.

Barseghyan Vanya Rafaelovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Leading Scientific Researcher, Institute of Mechanics NAS RA, 24B, Marshal Baghramyan ave., Yerevan, 0019; Professor, Department of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University, 1, Alec Manukyan st., Yerevan, 0025 tel.: (37410) 523640
(e-mail: barseghyan@sci.ams)