Серия «Математика»
2017. Т. 21. С. 108—121

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.928
MSC 34E20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.108

Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота

Д. А. Турсунов, К. Г. Кожобеков
Ошский государственный университет

Аннотация. В статье развиваем классический метод пограничных функций Вишика – Люстерника – Васильевой – Иманалиева для построения равномерных асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных уравнений с особыми точками. В данной работе, модернизируя классический метод погранфункций, строятся равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений с дробной точкой поворота. Как нам известно, задачи с точками поворота встречаются в уравнении Шредингера для туннельного перехода, задачах с классическим осциллятором, задачах механики сплошной среды, задаче гидродинамической устойчивости, уравнении Орра – Зоммерфельда, а также при определении тепла трубе и др. Определение поведения решения подобных задач при стремлении малого (большого) параметра к нулю (к бесконечности) является актуальной задачей. Нами исследуются задачи Коши и Дирихле для сингулярно возмущенных линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка, соответственно. При этом доказывается, что главные члены асимптотических разложений имеют отрицательные дробные степени по малому параметру. Как практика показывает, решения большинство сингулярно возмущенных уравнений с особыми точками обладают этим свойством. Построенные разложения решений являются асимптотическими в смысле Эрдей, когда малый параметр стремится к нулю. Получены оценки для остаточных членов асимптотических разложений, т. е. асимптотические разложения обоснованы. Идея модификации метода пограничных функций реализована для обыкновенных дифференциальных уравнений, но ее можно применять и при построении асимптотики решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных с особенностями.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, точка поворота, бисингулярная задача, задача Коши, задача Дирихле.

1. Введение

Особый интерес в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений представляют задачи с точками поворота или задачи с нестабильным спектром. Для построения асимптотических решений подобных задач разработаны различные методы. Различные задачи с точками поворота исследованы в работах [1]–[9], [11]–[16] и др. Наша цель разработать более простой алгоритм (метод) построения равномерных асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с особенностями. В данной работе, модернизируя идею предложенную в [1; 8], строятся равномерные асимптотические разложения решений задач Коши и Дирихле с не целой, т. е. дробной точкой поворота.

2. Постановка задачи 1.

Рассмотрим бисингулярную задачу Коши

$$\varepsilon y_\varepsilon'(x) + \sqrt{x} y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 < x \le T, \tag{2.1}$$

$$y_\varepsilon(0) = y^0, \tag{2.2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $f \in C^\infty[0,T]$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k x^k,\ x \to 0,\ f_k = f^{(k)}(0)/k!,\ f_0 \neq 0,\ T,\ y^0$ — const.

Задача (2.1)-(2.2) имеет единственное решение:

$$y_\varepsilon(x) = y^0 e^{-2\sqrt{x^3}/3\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{2\left(\sqrt{s^3}-\sqrt{x^3}\right)/3\varepsilon} f(s)ds. \tag{2.3}$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to 0$ на отрезке $x \in [0,T]$. Решение соответствующего невозмущенного уравнения ($\varepsilon = 0$)

$$y_0(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}},$$

не удовлетворяет начальному условию и не является гладкой функцией на отрезке $[0,T]$.

Определение 1. *Ряд*

$$Y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x) \tag{2.4}$$

называется стандартным (классическим) внешним асимптотическим разложением решения задачи (2.1)-(2.2).

Подставляя (2.4) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентную систему относительно $y_k(x)$:

$$\sqrt{x}y_0(x) = f(x), \quad y'_{k-1}(x) + \sqrt{x}y_k(x) = 0,\ k \in N.$$

Из этой системы последовательно определяем неизвестные $y_k(x)$:

$$y_0(x) = f(x)/\sqrt{x}, \quad y_k(x) = -y'_{k-1}(x)/\sqrt{x},\ k \in N.$$

Заметим, что функции $y_k(x)$ имеют нарастающие особенности:

$$y_k(x) = O\Big(x^{-(3k+1)/2}\Big),\ x \to 0,\ k \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Ряд (2.4) является асимптотическим только при $x \in (\sqrt[3]{\varepsilon^2}, T]$ и теряет асимптотический характер когда $x \in [0, \sqrt[3]{\varepsilon^2}]$. Точка $x_0 = \sqrt[3]{\varepsilon^2}$ является особой точкой.

Следовательно, задача (2.1)-(2.2) является бисингулярной [5], [6].

Для построения равномерно пригодного асимптотического разложения применяем идею [1], [8]-[9] с модификацией.

Построение асимптотического решения. Формальное асимптотическое решение задачи (2.1)-(2.2) будем искать в виде:

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \pi_k(t), \tag{2.5}$$

где $t = x/\mu^2$, $\mu^3 = \varepsilon$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x)$ — модифицированное внешнее решение, без особенностей в нуле.

Уравнение (2.1) запишем в виде

$$\varepsilon y'_\varepsilon(x) + \sqrt{x}y_\varepsilon(x) = f(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x), \quad 0 < x \le T, \tag{2.6}$$

где $h_\varepsilon(x) = h_0 + \varepsilon \frac{h_1}{\sqrt{x}} + \ldots + \varepsilon^{2n} h_{2n} + \varepsilon^{2n+1} \frac{h_{2n+1}}{\sqrt{x}} + \ldots$, h_k — пока неизвестные постоянные.

Подставляя (2.5) в (2.6) имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (v'_{k-1}(x) + \sqrt{x}v_k(x)) + \sqrt{x}v_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\pi'_{k-1}(t) + \sqrt{t}\pi_{k-1}(t)) = \\ = f(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x).$$

Отсюда, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (v'_{k-1}(x) + \sqrt{x}v_k(x)) + \sqrt{x}v_0(x) = \\ = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} h_{2k} - \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} h_{2k+1}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\pi'_{k-1}(t)+\sqrt{t}\pi_{k-1}(t))=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{6k}h_{2k}+\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{6k+2}h_{2k+1}. \qquad (2.8)$$

Из равенства (2.7) имеем:

$$v_0(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(f_0(x)-h_0),\quad v_1(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big(v'_0(x)+\frac{h_1}{\sqrt{x}}\Big),$$

$$v_{2n}(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}(v'_{2n-1}(x)+h_{2n}),\ v_{2n+1}(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big(v'_{2n}(x)+\frac{h_{2n+1}}{\sqrt{x}}\Big),\ n\in N.$$

И здесь неизвестные коэффициенты h_k выбираем так, чтобы

$$v_{2k}(x)=\sqrt{x}\widetilde{v}_{2k}(x),\ \widetilde{v}_{2k}\in C^{\infty}[0,T],\quad v_{2k+1}\in C^{\infty}[0,T],\ k\in N_0.$$

Пусть

$$h_0=f_0,\ h_{2n}=-v'_{2n-1}(0),\ h_{2n-1}=-\lim_{x\to 0}\sqrt{x}v'_{2n-2}(x),\ n\in N,$$

тогда, имеем:

$$v_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_{k+1}x^{k+1/2},\ v_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{3}{2}\right)f_{k+2}x^k,\ x\to 0,$$

$$v_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_{2n,k}x^{k+1/2},\ v_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_{2n+1,k}x^k,\ x\to 0.$$

Заметим, что $v_{2n}(0)=0,\ n\in N_0$.

Таким образом, мы определили все функции $v_k(x)$ и коэффициенты h_k.

Из (2.8), учитывая начальное условие (2.2) и $v_{2n}(0)=0,\ n\in N_0$, имеем:

$$l\pi_{6k-1}\equiv\pi'_{6k-1}(t)+\sqrt{t}\pi_{6k-1}(t)=h_{2k},\ \pi_{6k-1}(0)=0,\ k\in N_0; \qquad (2.9)$$

$$l\pi_{6k+1}=\frac{h_{2k+1}}{\sqrt{t}},\ \pi_{6k+1}(0)=0,\ k\in N_0; \qquad (2.10)$$

$$l\pi_{6k+j}=0,\ j=0,2,3,4,\ \pi_0(0)=y^0,\ \pi_{6m}(0)=0,\ m\in N,$$
$$\pi_{6k+s}(0)=0,\ s=2,4,\ \pi_{6k+3}(0)=-v_{2k+1}(0),\ k\in N_0. \qquad (2.11)$$

Задачи (2.9)-(2.11) имеют единственные решения, представимые в виде, соответственно:

$$\pi_{6k-1}(t)=h_{2k}e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}\int_0^t e^{\frac{2}{3}s^{3/2}}ds,\qquad \pi_0(t)=y^0e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},$$

$$\pi_{6m}(t) \equiv 0,\ m \in N, \quad \pi_{6k+1}(t) = h_{2k+1} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}} \int_0^t e^{\frac{2}{3}s^{3/2}} s^{-1/2} ds,$$

$$\pi_{6k+2}(t) \equiv 0, \quad \pi_{6k+3}(t) = -v_{2k+1}(0) e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}, \quad \pi_{6k+4}(t) \equiv 0,\ k \in N_0.$$

Для функции $\pi_{6k-1}(t)$, $\pi_{6k+1}(t)$ справедливы соотношения

$$\pi_{6k-1}(t) = \frac{h_{2k}}{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{c_1}{t^{3/2}} + \ldots + \frac{c_n}{t^{3n/2}} + \ldots\right),\ t \to \infty,$$

$$\pi_{6k+1}(t) = \frac{h_{2k+1}}{t} \left(1 + \frac{\widetilde{c}_1}{t^{3/2}} + \ldots + \frac{\widetilde{c}_n}{t^{3n/2}} + \ldots\right),\ t \to \infty.$$

Нами определены все члены формального асимптотического разложения (2.5). Перейдем теперь к оценке остаточной функции этого асимптотического разложения (2.5).

Обоснование разложения (2.5). Рассмотрим остаточную функцию

$$R_{\varepsilon,2m+1}(x) = y_\varepsilon(x) - y_{\varepsilon,2m+1}(x),$$

где

$$y_{\varepsilon,2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{2m+1} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=-1}^{6m+3} \mu^k \pi_k(t),\ 0 < m.$$

Тогда, для остаточной функции $R_{\varepsilon,2m+1}(x)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon R'_{\varepsilon,2m+1}(x) + \sqrt{x} R_{\varepsilon,2m+1}(x) = -\varepsilon^{2m+2} v'_{2m+1}(x), \quad 0 < x \le T, \tag{2.12}$$

$$R_{\varepsilon,2m+1}(0) = 0. \tag{2.13}$$

Задача (2.12)-(2.13) имеет единственное решение

$$R_{\varepsilon,2m+1}(x) = -\varepsilon^{2m+1} e^{-\frac{2}{3\varepsilon}x^{3/2}} \int_0^x e^{\frac{2}{3\varepsilon}s^{3/2}} v'_{2m+1}(s) ds$$

и для него справедлива асимптотическая оценка

$$R_{\varepsilon,2m+1}(x) = O(\varepsilon^{2m+1}),\ \varepsilon \to 0,\ 0 \le x \le T.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Для решения задачи Коши (2.1)-(2.2) при* $\varepsilon \to 0,\ x \in [0, T]$ *справедливо асимптотическое разложение (2.5).*

Замечание 1. Аналогично, можно построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи Коши

$$\varepsilon y'_\varepsilon(x) + x^\alpha p(x) y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 < x \le T,$$

$$y_\varepsilon(0) = y^0,$$

где $0 < \alpha$ — рациональное число, $p, f \in C^\infty[0,T]$, $\quad 0 < p(x),\ x \in [0,T]$, $f_0 \neq 0$.

3. Постановка задачи 2.

Рассмотрим бисингулярную задачу Дирихле

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) - \sqrt{x} y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3.1}$$

$$y_\varepsilon(0) = 0, \quad y_\varepsilon(1) = 0, \tag{3.2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $f \in C^\infty[0,1],\ f(0) \neq 0$.

Не нарушая общности, рассматриваем однородные граничные условия, так как неоднородные граничные условия $y_\varepsilon(0) = a, y_\varepsilon(1) = b$ с помощью линейного преобразования $y_\varepsilon(x) = a + (b-a)x + z_\varepsilon(x)$ всегда можно привести к однородным граничным условиям $z_\varepsilon(0) = 0, z_\varepsilon(1) = 0$.

Задача (3.1)-(3.2) имеет единственное решение, с помощью модифицированных функции Бесселя можно записать явное решение. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y_\varepsilon(x)$ по малому параметру ε на отрезке $x \in [0,1]$, когда $\varepsilon \to 0$.

Здесь тоже решение соответствующего невозмущенного уравнения $(\varepsilon = 0)$

$$-\sqrt{x} y_0(x) = f(x)$$

не удовлетворяет краевым условиям (3.2) и не является гладкой функцией на отрезке $[0,1]$, точку $= 0$ называют дробной точкой поворота [10]. Следовательно, задача (3.1)-(3.2) является бисингулярной [5].

Рассмотрим стандартное (классическое) внешнее разложение решения задачи (3.1)-(3.2):

$$Y_\varepsilon(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентную систему для определения $y_k(x)$:

$$-\sqrt{x} y_0(x) = f(x), \quad y_{k-1}''(x) - \sqrt{x} y_k(x) = 0,\ k \in N.$$

Отсюда последовательно определяем $y_k(x)$:

$$y_0(x) = -f(x)/\sqrt{x}, \quad y_k(x) = y_{k-1}''(x)/\sqrt{x},\ k \in N.$$

Нетрудно заметить, что функции $y_k(x)$ имеют нарастающие особенности вида:

$$y_k(x) = O(x^{-(5k+1)/2}),\ x \to 0,\ k \in N_0 = N \cup \{0\}.$$

Следовательно, ряд (3.3) тоже является асимптотическим только при $\sqrt[5]{\varepsilon^2} < x \le 1$ и теряет асимптотический характер при $0 \le x \le \sqrt[5]{\varepsilon^2}$.

Построение асимптотического решения. Для построения равномерного асимптотического разложения решения задачи (3.1)–(3.2) применяем выше изложенную идею. Формальное асимптотическое решение будем искать в виде:

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k(\tau), \tag{3.4}$$

где $t = x/\mu^2,\ \mu = \sqrt[5]{\varepsilon},\ \lambda = \sqrt{\varepsilon},\ \tau = (1-x)/\lambda,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x)$ — модифицированное внешнее решение, без особенностей в нуле.

Уравнение (3.1) запишем в виде

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) - \sqrt{x} y_\varepsilon(x) = f(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x),\ 0 < x < 1, \tag{3.5}$$

где

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\varepsilon^{2k} h_{2k}(x) + \varepsilon^{2k+1} \Big(\frac{h_{2k+1,1}}{\sqrt{x}} + \frac{h_{2k+1,3}}{\sqrt{x^3}} \Big) \right),$$

$h_k,\ h_{k,j}$ — пока неизвестные постоянные.

Подставляя (3.4) в (3.5) имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (v''_{k-1}(x) - \sqrt{x} v_k(x)) - \sqrt{x} v_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\pi''_{k-1}(t) - \sqrt{t} \pi_k(t)) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w''_k(\tau) - \sqrt{1-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k(\tau) = f(x) - h_\varepsilon(x) + h_{\mu^5}(t\mu^2).$$

Отсюда, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (v''_{k-1}(x) - \sqrt{x} v_k(x)) - \sqrt{x} v_0(x) = f(x) - h_\varepsilon(x); \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\pi''_{k-1}(t) - \sqrt{t} \pi_k(t)) = h_{\mu^5}(t\mu^2); \tag{3.7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w''_k(\tau) - \sqrt{1-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k(\tau) = 0. \tag{3.8}$$

Из равенства (3.6) имеем:

$$v_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}(f(x) - h_0), \quad v_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Big(v''_0(x) + \frac{h_{1,1}}{\sqrt{x}} + \frac{h_{1,3}}{\sqrt{x^3}} \Big),$$

$$v_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(v''_{2n-1}(x) + h_{2n}),$$

$$v_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(v''_{2n}(x) + \frac{h_{2n+1,1}}{\sqrt{x}} + \frac{h_{2n+1,3}}{\sqrt{x^3}}\Big),\ n \in N.$$

И здесь неизвестные коэффициенты $h_k,\ h_{k,j}$ выберем так, чтобы

$$v_{2k}(x) = \sqrt{x}\widetilde{v}_{2k}(x),\ \widetilde{v}_{2k} \in C^\infty[0,1], \quad v_{2k+1} \in C^\infty[0,1],\ k \in N_0.$$

Пусть

$$h_0 = f_0,\ h_{2n} = -v''_{2n-1}(0),\ h_{2n-1,3} = -\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3}v''_{2n-2}(x),$$

$$h_{2n-1,1} = -\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\Big(v''_{2n-2}(x) + \frac{h_{2n-1,3}}{\sqrt{x^3}}\Big),\ n \in N,$$

тогда

$$v_0(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1}x^{k+1/2}, \quad v_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+3/2)(k+5/2)f_{k+3}x^k, \ldots,$$

$$v_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2n,k}x^{k+1/2}, \qquad v_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2n+1,k}x^k, \ldots$$

Заметим, что $v_{2n}(0) = 0,\ n \in N_0$.

В результате нами определены все функции $v_k(x)$ и неизвестные коэффициенты $h_k, h_{k,j}$. Из равенства (3.7) имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\pi''_{k-1}(t) - \sqrt{t}\pi_k(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{10k}\Big(h_{2k} + \frac{1}{\sqrt{t}}\mu^4 h_{2k+1,1} + \frac{1}{\sqrt{t^3}}\mu^2 h_{2k+1,3}\Big).$$

Отсюда, учитывая краевое условие $y_\varepsilon(0) = 0$, и $v_{2n}(0) = 0, n \in N_0$, имеем:

$$L\pi_{10k-1} \equiv \pi''_{10k-1}(t) - \sqrt{t}\pi_{10k-1}(t) = h_{2k},\ t \in (0,\infty), \quad \pi_{10k-1}(0) = 0,\ k \in N_0; \tag{3.9}$$

$$L\pi_{10k+2j} = 0,\ t \in (0,\infty),\ \pi_{10k+2j}(0) = 0,\ j = 0,1,2,3,4,\ k \in N_0; \tag{3.10}$$

$$L\pi_{10k+1} = \frac{h_{2k+1,3}}{\sqrt{t^3}},\ t \in (0,\infty),\ \pi_{10k+1}(0) = 0,\ k \in N_0; \tag{3.11}$$

$$L\pi_{10k+3} = \frac{h_{2k+1,1}}{\sqrt{t}},\ t \in (0,\infty),\ \pi_{10k+3}(0) = 0,\ k \in N_0; \tag{3.12}$$

$$L\pi_{10k+5} = 0,\ t \in (0,\infty),\ \pi_{10k+5}(0) = -v_{2k+1}(0),\ k \in N_0; \tag{3.13}$$

$$L\pi_{10k+7} = 0,\ t \in (0,\infty),\ \pi_{10k+7}(0) = 0,\ k \in N_0. \tag{3.14}$$

Дополнительно потребуем, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \pi_{k-1}(t) = 0,\ k \in N_0. \tag{3.15}$$

Справедлива

Лемма 1. *Задача*

$$z''(t) - \sqrt{t}z(t) = \frac{c}{\sqrt{t^k}},\ t \in (0,\infty),\ k = 0,1,3,\ z(0) = z^0, \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

имеет единственное решение (c, z^0 — const).

Доказательство. Однородное уравнение

$$\tilde{z}''(t) - \sqrt{t}\tilde{z}(t) = 0$$

имеет два независимых решения:

$$z_1(t) = \sqrt{t}I_{2/5}(4t^{5/4}/5),\ z_2(t) = \sqrt{t}K_{2/5}(4t^{5/4}/5),$$

где $I_{2/5}(s), K_{2/5}(s)$ — модифицированные функции Бесселя.

Отметим, что

$$z_1(t) = O(t^{-1/8}e^{\frac{4}{5}t^{5/4}}),\ z_2(t) = O(t^{-1/8}e^{-\frac{4}{5}t^{5/4}}),\ t\to\infty,$$

$$z_1(0) = 0, z_2(0) \neq 0, W(z_1(t), z_2(t)) = 1/c_1,\ 0 \neq c_1 - const.$$

Учитывая экспоненциальное убывание функции $z_2(t)$ при $t\to\infty$, можем ее использовать для построения решения неоднородного уравнения с соответствующим краевым условием. Таким образом, имеем

$$z(t) = \frac{z^0 z_2(t)}{z_2(0)} + cc_1\Big(z_2(t)\int_0^t s^{-k/2}z_1(s)ds + z_1(t)\int_t^\infty s^{-k/2}z_2(s)ds\Big).$$

Из асимптотического поведения функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ при $t\to\infty$ следует: $z(t) = O(t^{-(k+1)/2})$, а когда $t\to 0$, то $z(t) = O(t^{2-k/2})$, $k = 0,1,3$. Лемма доказана.

В силу этой леммы, задачи (3.10), (3.14) с дополнительным условием (3.15) имеют тривиальные решения. А решения задач (3.9), (3.11)-(3.13) удовлетворяющие условию (3.15) представимы в виде, соответственно:

$$\pi_{10k-1}(t) = h_{2k}c_2\Big(z_2(t)\int_0^t z_1(s)ds + z_1(t)\int_t^\infty z_2(s)ds\Big),$$

$$\pi_{10k+1}(t) = h_{2k+1,3}c_2\Big(z_2(t)\int_0^t s^{-3/2}z_1(s)ds + z_1(t)\int_t^\infty s^{-3/2}z_2(s)ds\Big),$$

$$\pi_{10k+3}(t) = h_{2k+1,1}c_2\Big(z_2(t)\int_0^t s^{-1/2}z_1(s)ds + z_1(t)\int_t^\infty s^{-1/2}z_2(s)ds\Big),$$

$$\pi_{10k+5}(t) = -v_{2k+1}(0)\frac{z_2(t)}{z_2(0)},\ k \in N_0,$$

и справедливы соотношения

$$\pi_{10k-1}(t) = O(t^{-1/2}),\ \pi_{10k+1}(t) = O(t^{-2}),\ \pi_{10k+3}(t) = O(t^{-1}),\ t \to \infty;$$

$$\pi_{10k-1}(t) = O(t^{2}),\ \pi_{10k+1}(t) = O(t^{1/2}),\ \pi_{10k+3}(t) = O(t^{1/3}),\ t \to 0.$$

А также

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \pi_k(t) = \Big\| t = x/\mu^2 \Big\| = \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \pi_k\Big(\frac{x}{\mu^2}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{\pi}_k(x,\varepsilon). \tag{3.16}$$

Перейдем теперь к определению членов ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k(\tau)$. Из (3.8) имеем

$$w_0''(\tau) - w_0(\tau) = 0,\ w_k''(\tau) - w_k(\tau) = g_k(\tau, w_0, ..., w_{k-1}),\ \tau \in (0,\infty), \tag{3.17}$$

где правые части $g_k(\tau, w_0, ..., w_{k-1})$ линейно зависят от предыдущих $w_0, ..., w_{k-1}$, и полиномиально зависят от τ. Учитывая граничное условие $y(1) = 0$ и (3.16) имеем:

$$w_{2k}(0) = -v_k(1) - \widetilde{\pi}_k(1),\ w_{2k+1}(0) = 0,\ k \in N_0. \tag{3.18}$$

Как нам известно [5], задачи (3.17)-(3.18) имеют единственные решения и экспоненциально убывают, когда $\tau \to \infty$, т.е. $w_k(\tau) = O(e^{-\tau})$, $\tau \to \infty$.

Таким образом, нами определены все члены формального асимптотического разложения (3.4).

Обоснование асимптотического решения. Для обоснования этого формального разложения оценим остаточный член

$$R_{\varepsilon,2m+1}(x) = y_\varepsilon(x) - y_{\varepsilon,2m+1}(x),$$

где

$$y_{\varepsilon,2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{2m+1} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=-1}^{10m+5} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{4m+2} \lambda^k w_k(\tau),\ 0 < m.$$

Для остаточного члена получим следующую задачу:

$$\varepsilon R''_{\varepsilon,2m+1}(x) - \sqrt{x} R_{\varepsilon,2m+1}(x) = O(\varepsilon^{2m+2}), \varepsilon \to 0, \quad 0 < x < 1, \tag{3.19}$$

$$R_{\varepsilon,2m+1}(0) = O(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}), \quad R_{\varepsilon,2m+1}(1) = O(\varepsilon^{2m+2}),\ \varepsilon \to 0. \tag{3.20}$$

Пусть $R_{\varepsilon,2m+1}(x) = (2-x^2)r_{\varepsilon,2m+1}(x)$, тогда задача (3.19)-(3.20) примет вид

$$\varepsilon r''_{\varepsilon,2m+1}(x) - \frac{4\varepsilon x}{2-x^2} r'_{\varepsilon,2m+1}(x) - \Big(\frac{2\varepsilon}{2-x^2} + \sqrt{x}\Big) r_{\varepsilon,2m+1}(x) = O(\varepsilon^{2m+2}), \varepsilon \to 0,$$

$$r_{\varepsilon,2m+1}(0) = O(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}), \quad r_{\varepsilon,2m+1}(1) = O(\varepsilon^{2m+2}),\ \varepsilon \to 0.$$

Для этой задачи применяя теорему 26.2, [6], получаем $r_{\varepsilon,2m+1}(x) = O(\varepsilon^{2m+1})$.

Отсюда, следует, что $R_{\varepsilon,2m+1}(x) = O(\varepsilon^{2m+1}),\ \varepsilon \to 0, \quad x \in [0,1]$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Асимптотическое решение задачи Дирихле (3.1)-(3.2) при* $\varepsilon \to 0,\ x \in [0,1]$, *представимо в виде (3.4).*

Замечание 2. Для простоты мы рассматривали простой случай, аналогично строится равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) - x^\alpha p(x) y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$y_\varepsilon(0) = 0, \quad y_\varepsilon(1) = 0,$$

где $0 < \alpha$ — рациональное число, $p, f \in C^\infty[0,1],\ f(0) \neq 0,\ 0 < p(x),\ x \in [0,1]$.

Заключение. Модифицированным методом погранчичных функций построили полные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений с дробными точками поворота. При этом доказано, что главные члены асимптотических разложений имеют отрицательные дробные степени по малому параметру, что свойственно бисингулярным задачам. Построенные разложения решений являются асимптотическими в смысле Эрдей, когда $\varepsilon \to 0$. Получены оценки для остаточных членов, т. е. асимптотические разложения обоснованы.

Список литературы

1. Алымкулов К. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач / К. Алымкулов, Д. А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 12. – С. 3–11. https://doi.org/10.3103/S1066369X1612001X
2. Бобочко В. Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений / В. Н. Бобочко // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 4. – С. 8–17.
3. Бобочко В. Н. Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота / В. Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем. – 2006. № 5. – С. 8–18.

4. Зимин А. Б. Задача Коши для линейного уравнения второго порядка с малым параметром, вырождающегося в пределе в уравнение с особыми точками / А. Б. Зимин // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 9. – С. 1583–1593.
5. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М. : Наука, 1989. – 336 с.
6. Ильин А. М. Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М. : Физматлит, 2009. - 248 с.
7. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М. : Наука, 1981. - 400 с.
8. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота / Д. А. Турсунов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 271–281.
9. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена / Д. А. Турсунов // Сиб. электрон. мат. изв. – 2017. - Т. 14. - С. 10–21. – DOI: 10.17377/semi.2017.14.002
10. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. — М. : Наука, 1977. - 352 с. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58016-1
11. Cole J. D. Perturbation Methods in Appled Mathematics /J. D. Cole. - Blaisdell, Waltham, MA, 1968.
12. Ekhaus V. Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbation / V. Ekhaus. – North-Holland, Amsterdam, 1973.
13. Fruchard A. Composite Asymptotic Expansions / A. Fruchard, R. Schafke. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34035-2
14. Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations / W. Wasow. – N. Y. : Dover publications, INC, Mineola, 1965.
15. Wasow W. Linear turning point theory / W. Wasow. – N. Y. : Springer-Verlag, 1985. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1090-0.
16. Watts A. M. A singular perturbation problem with a turning point / A. M. Watts // Bull. Austral. Math. Soc. – 1971. – Vol. 5. - P. 61–73.

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, доктор физико-математических наук, доцент, Ошский государственный университет, 723500, Ош, ул. Ленина, 331, тел.: (+996)770513813 (e-mail: tdaosh@gmail.com)

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Ошский государственный университет, 723500, Ош, ул. Ленина, 331, тел.: (+996)770513813
(e-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru)

D. A. Tursunov, K. G. Kozhobekov

The Asymptotics of Solutions of a Singularly Perturbed Equation with a of Fractional Turning Point

Abstract. We develop the classical Vishik – Lyusternik – Vasil'eva – Imanaliev boundary-value method for constructing uniform asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations with singular points. In this paper, by modernizing the classical method of boundary functions, uniform asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations with a fractional turning point are constructed. As we know, problems with turning points are encountered in the Schrodinger equation for the tunnel junction, problems with a classical oscillator, problems of continuum mechanics, the problem of hydrodynamic stability, the Orr – Sommerfeld equation, and also in the determination of heat to a pipe, etc. Determination of the behavior of solving similar problems with aspiration small (large) parameter to zero (to infinity) is an actual problem. We study the Cauchy and Dirichlet problems for singularly perturbed linear inhomogeneous ordinary differential equations of the first and second order, respectively. Here it is proved that the principal terms of the asymptotic expansions have negative fractional powers with respect to a small parameter. As practice shows, solutions to most singularly perturbed equations with singular points have this property. The constructed decompositions of the solutions are asymptotic in the sense of Erdey, when the small parameter tends to zero. Estimates for the remainder terms of the asymptotic expansions are obtained. The asymptotic expansions are justified. The idea of modifying the method of boundary functions is realized for ordinary differential equations, but it can also be used in constructing the asymptotic of the solution of singularly perturbed partial differential equations with singularities.

Keywords: singularly perturbed, turning point, bisingular problem, Cauchy problem, Dirichlet problem.

References

1. Alymkulov K., Tursunov D.A. On a method of construction of asymptotic decompositions of bisingular perturbed problems. *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no 12, pp. 1–8. https://doi.org/10.3103/S1066369X1612001X
2. Bobochko V.N. An Unstable Differential Turning Point in the Theory of Singular Perturbations. *Russian Mathematics*, 2005, vol. 49, no 4, pp. 6–14. MR2180679
3. Bobochko V.N. Uniform Asymptotics of a Solution of an Inhomogeneous System of Two Differential Equations with a Turning Point. *Russian Mathematics*, 2006, vol. 50, no 5, pp. 6–16. MR2280688
4. Zimin A. B. Zadacha Koshi dlja linejnogo uravnenija vtorogo porjadka s malym parametrom, vyrozhdajushhegosja v predele v uravnenie s osobymi tochkami [The Cauchy problem for a second order linear equation with small parameter which degenerates in the limit to an equation with singular points]. *Differ. Uravn.* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no 9, pp. 1583–1593. (in Russian)
5. Ilin A.M. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. AMS, Providence, Rhode Island, 1992. 296 p.
6. Ilin A.M., Danilin A.R. Asimptoticheskie metody v analize [Asymptotic Methods in Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 248 p. (in Russian).
7. Lomov S.A. Introduction to the General Theory of Singular Perturbations. AMS, Providence, Rhode Island, 1992.
8. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenija obyknovennogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka s tremja tochkami povorota [Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points] *Tr. IMM UrO RAN*, 2016, vol. 22, no 1, pp. 271-281. (in Russian)
9. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe reshenie bisinguljarnoj zadachi Robena [The asymptotic solution of the bisingular Robin problem]. *Sib. Elektron. Mat. Izv. [Sib. Electron. Mat. Reports]*, 2017, vol. 14, pp. 10-21. (in Russian) DOI: 10.17377/semi.2017.14.002
10. Fedoryuk M.V. Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations. Berlin, Springer-Verlag, 1993. 363 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58016-1

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 21. Серия «Математика». С. 108–121

11. Cole J. D. Perturbation Methods in Appled Mathematics. Blaisdell, Waltham, MA, 1968.
12. Ekhaus V. Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbation. North-Holland, Amsterdam, 1973.
13. Fruchard A., Schafke R. Composite Asymptotic Expansions. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34035-2
14. Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations,*Dover publications, INC, Mineola*, New York, 1965.
15. Wasow W. Linear turning point theory. Springer-Verlag, New York, 1985. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1090-0
16. Watts A.M. A singular perturbation problem with a turning point, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1971, vol. 5, pp. 61-73.

Tursunov Dilmurat Abdillajanovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Osh State University, 331, Lenin st., Osh, 723500, tel.: (+996)770513813 (e-mail: `tdaosh@gmail.com`)

Kozhobekov Kudayberdi Gaparalievich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Osh State University, 331, Lenin st., Osh, 723500, tel.: (+996)770513813 (e-mail: `kudayberdi.kozhobekov@mail.ru`)