Серия «Математика»
2017. Т. 21. С. 77—88

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.64+512.55
MSC 15+16
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.77

Теорема поляризации и полиномиальные тождества для матричных функций

Г. П. Егорычев
Сибирский федеральный университет

Аннотация. В статье дано простое комбинаторное доказательство известной теоремы поляризации о восстановлении полиаддитивной симметрической функции по её значениям на диагонали. Приведено несколько известных и новых приложений этой теоремы для получения полиномиальных тождеств (вычисления) для некоторых матричных функций, включая случай некоммутативных переменных и детерминанта пространственной матрицы.

Ключевые слова: теорема поляризации, детерминанты, перманенты, полиномиальные тождества, некоммутативные переменные.

1. Теорема поляризации

Классическая теорема (формула) поляризации [11; 1] о восстановлении полиаддитивной симметрической функции по её значениям на диагонали имеет фундаментальное значение в алгебраической теории полиномов и часто применяется в теории колец, линейной и полилинейной алгебре, теории функций, геометрии смешанных объёмов и в других областях математики. Мы используем её в следующей простой и достаточно общей форме.

Теорема 1. *Теорема поляризации (Егорычев, [1], 1980). Пусть H — аддитивная коммутативная полугруппа, $H^{(n)} = H \times \ldots \times H$, а Φ — абелева группа с делением на целые числа. Тогда $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) : H^{(n)} \to \Phi$, симметрична и полиаддитивна тогда и только тогда, когда для произвольного γ из H она допускает следующее представление* *(формула поляризации):*

$$f(x_1,...,x_n)=\{(-1)^nF(\gamma)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}F(\gamma+\sum_{l=1}^{k}x_{j_l})\}/n!, \tag{1.1}$$

где положено, по определению,

$$F(x):=f(x,\dots,x):H\to\Phi. \tag{1.2}$$

Доказательство. Необходимость. Обозначая для унификации используемых здесь обозначений $\gamma=x_{j_o}\in H$, выпишем сумму (1.1) в следующем виде:

$$f(x_1,...,x_n)=\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}F(\gamma+\sum_{l=1}^{k}x_{j_l})\}/n!=$$

$$=\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{n!}\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}g_k\,(J_k)\}, \tag{1.3}$$

где при фиксированном k, $k=0,1,\dots,n$, и фиксированном наборе $J_k=(j_1,j_2,\dots,j_k)$, $1\le j_1<...<j_k\le n$, общий член этой суммы

$$g_k\,(J_k)=F(\gamma+\sum_{l=1}^{k}x_{j_l})=$$

$$=f(\gamma+\sum_{l=1}^{k}x_{j_l},\dots,\gamma+\sum_{l=1}^{k}x_{j_l})=f(\sum_{l=0}^{k}x_{j_l},\dots,\sum_{l=0}^{k}x_{j_l})/n!=$$

(в силу предположения теоремы о полиаддитивности и симметричности функции $f(x_1,...,x_n)$ относительно своих переменных)

$$=\{\sum_{l_0=0}^{k}...\sum_{l_n=0}^{k}f(x_{j_{l_1}},\dots,x_{j_{l_n}})\}/n!.$$

Для приведения подобных членов в последней формуле можно воспользоваться известной полиномиальной формулой о числе разбиений конечного множества (перестановок) заданной спецификации. Тогда

$$g_k\,(J_k)=\{\sum_{\substack{r_0,r_1,...,r_k=0\\ r_0+r_1+...+r_k=n}}^{n}\binom{n}{r_0,...,r_k}f\,(x_{j_0},r_0;...;x_{j_k},r_k)\}/n!, \tag{1.4}$$

где полиномиальный коэффициент $\binom{n}{r_0,\dots,r_k} := n!/r_0!\dots r_k!$, и

$$f(x_{j_0}, r_{j_0}; ...; x_{j_k}, r_{j_k}) := f(\underbrace{x_{j_0}, ..., x_{j_0}}_{r_0-\text{раз}}, ..., \underbrace{x_{j_k}, ..., x_{j_k}}_{r_k-\text{раз}}).$$

Подставляя выражение (1.4) для $g_k(J_k)$ в сумму (1.3) получаем

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}$$

$$\{ \sum_{\substack{r_0,r_1,\dots,r_k=0\\ r_0+r_1+\dots+r_k=n}}^{k} \binom{n}{r_0,\dots,r_k} f(x_{j_0}, r_0; \dots; x_{j_k}, r_k)\}.$$

Выражение в правой части последней формулы для $f(x_1, \dots, x_n)$ есть конечная линейная комбинация членов типа $f(x_{j_0}, r_0; \dots; x_{j_k}, r_k)$, причём при $k = n$ коэффициент при $f(x_1, \dots, x_n)$ равен $\binom{n}{0,1,1,\dots,1}/n! = 1$. Остаётся показать, что все коэффициенты при остальных членах типа $f(x_{j_0}, r_0; \dots; x_{j_s}, r_s)$, $s < n$, равны нулю. Действительно, коэффициент при члене $f(x_{j_0}, r_0; \dots; x_{j_s}, r_s)$, $s < n$, с фиксированным наборами чисел $j_0, \dots, j_s$ и $r_0, \dots, r_s$ равен

$$\binom{n}{r_0,\dots,r_s} \sum_{k=s}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{n!} q_{k,n}^{(s)},$$

где $q_{k,n}^{(s)}$ есть число всех таких последовательностей $(j_1, j_2, \dots, j_k)$, $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$, которые содержат фиксированную подпоследовательность $j_1, \dots, j_s$. Поскольку $q_{k,n}^{(s)} = \binom{n-s}{k-s}$, то упомянутый выше коэффициент равен

$$\binom{n}{r_0,\dots,r_s} \sum_{k=s}^{n} \frac{(-1)^{n-k-s}}{n!} \binom{n-s}{k-s} =$$

$$= \binom{n}{r_0,\dots,r_s} \sum_{k=0}^{n-s} \frac{(-1)^{n-k+s}}{n!} \binom{n-s}{k} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+s}}{n!} \binom{n}{r_0,\dots,r_s} (1-1)^{n-s} = 0.$$

Достаточность.

Если обозначить выражение в правой части формулы (1.1) через $\Phi(\gamma; x)$, то $f(x) = \Phi(\gamma; x)$ и по допущению теоремы значение $\Phi(\gamma; x)$ не зависит от выбора элемента γ из H. Симметричность функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in H^{(n)}$, следует из вида формулы (1.1) для функции $\Phi(\gamma; x)$ и коммутативности полугруппы H. В силу симметричности $f(x_1, \ldots, x_n)$ для доказательства полиаддитивности этой функции достаточно доказать (аддитивное) равенство

$$f(x_1' + x_1'', x_2, \ldots, x_n) = f(x_1', x_2, \ldots, x_n) + f(x_1'', x_2, \ldots, x_n),$$

которое сразу следует из формулы (1.1), если за счёт свободы выбора γ из H положить в ней $\gamma = 0$. □

2. Приложения

Многие известные (комбинаторные) матричные функции, включая детерминанты, перманенты, смешанные дискриминанты (смешанные объёмы в $\mathbb{R}^n$), результанты и многие другие, являются полиаддитивными функциями различного типа. На нескольких примерах этого параграфа мы покажем, как это обстоятельство позволяет использовать теорему поляризации не только для их вычисления, но и для их определения (с сохранением основных свойств) над более общими алгебраическими системами.

2.1. Первое полиномиальное тождество для перманентов над коммутативным кольцом

Понятие перманента было введено впервые в 1812 г., независимо и практически одновременно, Джорджем Бине и Огюстом Коши. Тогда же Дж. Бине впервые ввёл и термин «перманент». Наиболее часто используется понятие перманента над коммутативным кольцом K (полями $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Определение 1. *Определение 1 перманента над коммутативным кольцом K.*

Если $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ матрица с элементами из кольца K, то полагаем

$$per(A) := \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n\sigma(n)} = \tag{2.1}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in S_n} a_{\tau(1),\sigma(1)} \times \ldots \times a_{\tau(n),\sigma(n)}, \tag{2.2}$$

где S_n – множество всех перестановок $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ множества $\{1, \ldots, n\}$.

В следующей теореме Г. П. Егорычев впервые получил формулу вычисления (полиномиальное тождество) для перманентов над K, содержащее до $n!$ свободных параметров. Этот результат был вначале получен им в 1979 г. с помощью аппарата степенных рядов. Для иллюстрации мы даём в следующей теореме краткое доказательство этого результата с помощью формулы поляризации.

Теорема 2. *Первое полиномиальное тождество для перманентов над коммутативным кольцом K (Егорычев, [2]).*

$$per(A) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} (\prod_{i=1}^{n} (\gamma_i - a_{ij_1} - \ldots - a_{ij_k})), \quad (2.3)$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — произвольные элементы из K.

Доказательство. Пусть $n \times n$ матрица $A = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n$ — её n-вектор-столбцы. Так как функция $per(A) = per(a_1, \ldots, a_n)$ — полиаддитивна и симметрична относительно своих n переменных $a_1, \ldots, a_n$, то по формуле поляризации (1.1) при любом $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ из K^n получаем

$$per(A) = per(a_1, \ldots, a_n) = \{per(\gamma, \ldots, \gamma) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} per(\gamma - \sum_{l=1}^{k} a_{j_l}, \ldots, \gamma - \sum_{l=1}^{k} a_{j_l})\}/n! =$$

(используя равенство $per(\gamma, \ldots, \gamma)/n! = \gamma_1 \ldots \gamma_n$ для произвольных элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ из K)

$$= \prod_{i=1}^{n} \gamma_i + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} \prod_{i=1}^{n} (\gamma_i - \sum_{l=1}^{k} a_{ij_l}).$$

□

Замечание 1. Формула (2.3) при частных значениях параметров $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ из K даёт хорошо известные формулы Дж. Риордана (1966) и Г. Вильфа (1968), которые сегодня признаны наиболее экономичными для подсчёта перманентов над коммутативным кольцом K (полями $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).

2.2. Полиномиальное тождество нового типа для детерминанта над коммутативным кольцом

Пусть $S_n^{(e)}$ и $S_n^{(o)}$, соответственно, подмножества чётных и нечётных перестановок из S_n. Последовательность элементов $a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ назовём диагональю $l(\sigma)$ $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$, а последовательность элементов $a_{i_1\sigma(i_1)}, \ldots, a_{i_k\sigma(i_k)}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, – поддиагональю l длины k этой матрицы. Через $L_{n-1}^{(e)}(L_{n-1}^{(o)})$ мы обозначим, множество всех поддиагоналей длины $n-1$ для множества чётных (нечётных) диагоналей $S_n^{(e)}(S_n^{(o)})$. Обозначим, как обычно, через $d(\sigma)$ – число инверсий в перестановке $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ множества $\{1, \ldots, n\}$. В [3] для "обычного"детерминанта Коши $\det(A)$ над кольцом K

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{d(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \times a_{2\sigma(2)} \ldots \times a_{n\sigma(n)} \tag{2.4}$$

была найдена серия полиномиальных тождеств нового типа. В их числе следующая формула для детерминанта, которая будет использована в дальнейшем изложении.

Теорема 3. *Полиномиальное тождество для детерминанта над коммутативным кольцом K (Егорычев, [3]).*

$$\det(A) = \frac{1}{n!}\{[\sum_{l \in L_n^{(e)}} (\gamma + su(l))^n - \sum_{l \in L_n^{(o)}} (\gamma + su(l))^n] -$$
$$-[\sum_{l \in L_{n-1}^{(e)}} (\gamma + su(l))^n - \sum_{l \in L_{n-1}^{(o)}} (\gamma + su(l))^n]\}, \tag{2.5}$$

где γ — произвольный элемент из K, а функция $su(l)$ для последовательности l элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из K есть сумма этих элементов. При $\gamma = 0$ (2.5) даёт следующее равенство:

$$\det(A) = \frac{1}{n!}\{[\sum_{l \in L_n^{(e)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_n^{(o)}} su^n(l)] - [\sum_{l \in L_{n-1}^{(e)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_{n-1}^{(o)}} su^n(l)]\}. \tag{2.6}$$

Из (2.6), непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. *(Егорычев, [3]). Вектор-строки и вектор-столбцы $n \times n$ матрицы A с элементами из кольца K линейно независимы тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство:*

$$\sum_{l \in L_n^{(e)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_n^{(o)}} su^n(l) = \sum_{l \in L_{n-1}^{(e)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_{n-1}^{(o)}} su^n(l). \tag{2.7}$$

2.3. Новые формулы для перманента над некоммутативным ассоциативным кольцом Q

В 2000 г. А. Барвинок ввёл определение симметризованного определителя $sdet(A)$ над кольцом Q, и успешно применил его при построении алгоритма для вычисления функции перманента над K [10]. Аналогичное определение для симметризованного перманента $eper(A)$ над Q было введено нами в 2007 году.

Определение 2. *Определение симметризованного перманента $eper(A)$ над некоммутативным ассоциативным кольцом Q,* [4].

$$eper(A) := \sum_{\sigma \in S_n} Sym(a_{1\sigma(1)} \times a_{2\sigma(2)} \ldots \times a_{n\sigma(n)}), \tag{2.8}$$

где под оператором симметризации Sym для произведения элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q$, как обычно, понимается сумма

$$Sym(x_1 x_2 \ldots x_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}. \tag{2.9}$$

В [4] были изучены свойства $eper(A)$ над Q, многие из которых совпадают с характеристическими свойствами "обычного"$per(A)$ над K [1], включая полиаддитивность перманента по строкам и столбцам матрицы A. По аналогии с [1] ниже мы приведём вывод серии полиномиальных тождеств (формул вычисления) для $eper(A)$ над Q, которые порождают новое семейство симметрических тождеств для элементов произвольной $n \times n$ матрицы A над Q.

Пусть A – $n \times n$ матрица с элементами из Q.

Обозначим через $\Phi_{r,s}(A)$ множество всех собственных $r \times s$ подматриц $n \times n$ матрицы A, $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, а через $su(B)$— сумму элементов матрицы $B \in \Phi_{r,s}(A)$.

Теорема 4. *Если A – $n \times n$ матрица с элементами из Q, то следующая формула справедлива для $eper(A)$:*

$$eper(A) = \frac{1}{n!} \sum_{r,s=1}^{n} (-1)^{r+s} \sum_{B \in \Phi_{r,s}(A)} (\delta + su(B))^n, \tag{2.10}$$

где δ — произвольный элемент из Q. При $\delta = 0$ (2.10) даёт равенство

$$eper(A) = \frac{1}{n!} \sum_{r,s=1}^{n} (-1)^{r+s} \sum_{B \in \Phi_{r,s}(A)} su^n(B). \tag{2.11}$$

Из полиномиального тождества (2.10), используя известное разложение в ряд «по степеням» δ бинома Ньютона для некоммутативных переменных, непосредственно вытекает следующее

Следствие 2. *Если A – $n \times n$ матрица с элементами из Q, то следующие тождества справедливы для её элементов:*

$$\sum_{r,s=1}^{n} (-1)^{r+s} \sum_{B \in \Phi_{r,s}(A)} su^m(B) = 0, m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Перманент $eper(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\sum_{r,s=1}^{n}(-1)^{r+s}\prod_{B\in\Phi_{r,s}(A)} su^{n}(B) = 0.$$

Доказательство. Поскольку функция $eper(A)$ полиаддитивна и симметрична по векторам-столбцам матрицы A, то в силу формулы поляризации при нулевых значениях произвольных элементов имеем

$$eper(A) = \frac{1}{n!}\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} eper(\sum_{l=1}^{k}\alpha_{j_k},\ldots,\sum_{l=1}^{k}\alpha_{j_l})\} :=$$

$(eper(\alpha,\alpha,\ldots,\alpha) := n!Sym(\alpha_1\times\alpha_2\times\ldots\times\alpha_n)$ для любого n-столбца $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^T$ из $Q^n)$

$$= \{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} Sym(\prod_{i=1}^{n}(\sum_{l=1}^{k}a_{ij_l})\}. \tag{2.12}$$

Далее, если применить формулу поляризации к каждому симметризованному произведению в правой части (2.12), полагая в качестве произвольного элемента один и тот же свободный элемент δ из Q, то получим

$$Sym\{\prod_{i=1}^{n}(\sum_{l=1}^{k}a_{ij_l})\} = \frac{1}{n!}\{(-1)^{n}Sym(\delta^{n})+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n-s}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n} Sym((\delta+\sum_{t=1}^{s}\sum_{l=1}^{k}a_{ij_l})^{n})\}.$$

$(Sym(x^n) = x^n$ для любого x из $Q)$

$$= \frac{1}{n!}\{(-1)^{n}\delta^{n}+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n-s}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n}(\delta+\sum_{t=1}^{s}\sum_{l=1}^{k}a_{ij_l})^{n}\}. \tag{2.13}$$

Для окончания доказательства формулы (2.10) достаточно подставить в (2.12) выражение (2.13) для симметризованного произведения $Sym\{\prod\limits_{i=1}^{n}(\sum_{l=1}^{k}a_{ij_l})\}$, замечая, что коэффициент при δ^n будет равен нулю. □

Замечание 2. (a) При выводе формулы (2.10) с использованием формулы поляризации для упрощения мы положили значения произвольных элементов из Q равными нулю либо одному и тому же элементу δ из Q. В противном случае, за счёт усложнения мы получим семейство формул с большим числом произвольных элементов из Q. Каждая из этих формул может быть взята за определение функции $eper(A)$, и, подобно следствию 2, порождает соответствующее (новое) семейство симметрических тождеств для элементов матрицы A.

(b) Просматривая вывод теоремы 4 можно заметить, что проведённые выкладки и формула (2.10) справедливы при более общих предположениях, когда Q — коммутативное кольцо с ассоциативными n-степенями (одномономиальная ассоциативность).

2.4. Детерминант определённого типа от пространственной матрицы

Определение 3. *Пусть $\widetilde{A} = (a_{ij}^{(k)})$ — пространственная матрица с элементами из коммутативного кольца K, и $\widetilde{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, где $n \times n$ матрицы $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, – сечения матрицы $\widetilde{A}$ по индексу k. В свою очередь, пусть $A_k = (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)})$, где $\alpha_j^{(k)} = (a_{1j}^{(k)}, a_{2j}^{(k)}, \ldots, a_{nj}^{(k)})^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — вектор-столбцы матрицы A_k.*

Определим матричную функцию $Det_p(\widetilde{A})$ следующим образом (ср. [8], с. 11–25):

$$Det_p(\widetilde{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{d(\sigma)} per(\alpha_{\sigma(1)}^{(1)}, \alpha_{\sigma(2)}^{(2)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}^{(n)}), \tag{2.14}$$

где $d(\sigma)$ – число инверсий в перестановке $\sigma =(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ множества $\{1, \ldots, n\}$.

Теорема 5. *Справедлива следующая формула*

$$Det_p(\widetilde{A}) = \{[\sum_{\sigma \in S_n^{(e)}} \prod_{t=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{t\sigma(i)}^{(i)}) - \sum_{\sigma \in S_n^{(o)}} \prod_{t=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{t\sigma(i)}^{(i)})] -$$

$$-[\sum_{\sigma \in S_n^{(e)}} (\sum_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{n} (-a_{t\sigma(s)}^{(s)} + \sum_{i=1}^{n} a_{t\sigma(i)}^{(i)})) - \sum_{\sigma \in S_n^{(o)}} (\sum_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{n} (-a_{t\sigma(s)}^{(s)} + \sum_{i=1}^{n} a_{t\sigma(i)}^{(i)}))]. \tag{2.15}$$

Доказательство. Воспользуемся здесь той же схемой доказательства, что и в [3], где формула поляризации была применена для произведения $a_{1\sigma(1)} \times a_{2\sigma(2)} \ldots \times a_{n\sigma(n)}$, как общего члена детерминантной суммы (2.4).

Общий член детерминантной суммы (2.14) вида

$$per(\alpha_{\sigma(1)}^{(1)}, \alpha_{\sigma(2)}^{(2)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}^{(n)}),$$

как функция перманента, есть полиаддитивная и симметрическая функция своих аргументов.

По аналогии с работой [3] применим к каждой такой функции в (2.14) формулу поляризации с нулевыми свободными переменными, и получим, соответственно:

$$Det_p(\widetilde{A}) = \frac{1}{n!}\{[\sum_{l\in L_n^{(e)}} per(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)},\ldots,\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)})-$$

$$-\sum_{l\in L_n^{(o)}} per(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)},\ldots,\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)})]-$$

$$-[\sum_{s=1}^{n}\sum_{l\in L_n^{(e)}} per(-\alpha_{\sigma(s)}^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)},\ldots,(-\alpha_{\sigma(s)}^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)})-$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\sum_{l\in L_n^{(o)}} per(-\alpha_{\sigma(s)}^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)},\ldots,-\alpha_{\sigma(s)}^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)}^{(i)})]\}=$$

(используя равенство $per(\gamma,\ldots,\gamma)/n! = \gamma_1\ldots\gamma_n$, для любых значений переменных $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ из K)

$$=\{[\sum_{\sigma\in S_n^{(e)}}\prod_{t=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{t\sigma(i)}^{(i)})-\sum_{\sigma\in S_n^{(o)}}\prod_{t=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{t\sigma(i)}^{(i)})]-$$

$$-[\sum_{\sigma\in S_n^{(e)}}(\sum_{s=1}^{n}\prod_{t=1}^{n}(-a_{t\sigma(s)}^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}a_{t\sigma(i)}^{(i)}))-\sum_{\sigma\in S_n^{(o)}}(\sum_{s=1}^{n}\prod_{t=1}^{n}(-a_{t\sigma(s)}^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}a_{t\sigma(i)}^{(i)}))].$$

□

В [5] автором было продолжено изучение свойств функции детерминанта над широким классом колец. Представляет интерес получение аналогичных результатов для функций Шура, смешанных дискриминантов и других функций от плоской и пространственных матриц, родственных детерминанту и перманенту. Непосредственное приложение полученных здесь результатов может быть найдено в теории перманентов [6], тензорной алгебре и её приложениях, и теории n-лиевых алгебр [9; 7].

Автор признателен своим коллегам С. Г. Колесникову, В. М. Копытову, В. П. Кривоколеско, А. П. Пожидаеву, В. М. Левчуку, Я. Н. Нужину за обсуждение основных результатов этой работы и ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Егорычев Г. П. Новые формулы для перманента / Г. П. Егорычев // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 265, № 4. - С. 784–787.
2. Егорычев Г. П. Полиномиальное тождество для перманентов / Г. П. Егорычев // Мат. заметки. – 1979. – Т. 26, № 6. – С. 961–964. https://doi.org/10.1007/BF01142089
3. Егорычев Г. П. Новые полиномиальные тождества для детерминантов над коммутативными кольцам / Г. П. Егорычев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. - Т. 5, № 4. - С. 16–20.
4. Егорычев Г. П. Новое полиномиальное тождество для вычисления перманентов / Г. П. Егорычев, З. В. Егорычева ; Сиб. федер. ун-т. - Деп. в ВИНИТИ 13.06.2007. – № 627. - B2007. - С. 1-32.
5. Егорычев Г. П. Новое семейство полиномиальных тождеств для вычисления детерминантов / Г. П. Егорычев // Докл. АН. - 2013. - Т. 452, № 1. – С. 14–16.
6. Егорычев Г. П. Дискретная математика. Перманенты / Г.П. Егорычев. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2007. – 272 с.
7. Пожидаев А. П. Простые фактор-алгебры и подалгебры алгебр якобианов / А.П. Пожидаев // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 593–599.
8. Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения / Н. П. Соколов. – М. : Физматлит, 1960. – 300 с.
9. Филиппов В. Т. Об n-лиевой алгебре якобианов / В. Т. Филиппов // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 660–669.
10. Barvinok A. New permanent estimators via non-commutative determinants / A. Barvinok // Arxiv preprint math/0007153, 2000, arXiv:math/0007153. – 2000. – P. 1-13.
11. Cartan H. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables / H. Cartan. – N. Y. : Dover Publ., 1995. – 300 p.

Егорычев Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, тел.: (391)2461609 (e-mail: gegorych@mail.ru)

G. P. Egorychev

The Polarization Theorem and Polynomial Identities for Matrix Functions

Abstract. In this article the simple combinatorial proof of the known polarization theorem (about the restoration of a polyadditive symmetric function over its values on a diagonal) is given. Known and new applications of this theorem for the reception of polynomial identities (the calculation) of several matrix functions is given, including a case of noncommutative variables and (first) the determinant of a space matrix are resulted.

Keywords: polarization theorem, determinants, permanents, polynomial identities, noncommutative variables.

References

1. Egorychev G.P. New formulas for the permanent. *Soviet Math. Dokl.* 1980, vol. 265, no 4, pp. 784–787. (in Russian)
2. Egorychev G.P. A polynomial identity for the permanent. *Math. Zametki.*, 1979, vol. 26, no 6, pp. 961–964. (in Russian) https://doi.org/10.1007/BF01142089
3. Egorychev G.P. New polynomial identities for determinants over commutative rings. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.*, 2012, vol. 5, no 4, pp. 16–20. (in Russian)
4. Egorychev G.P., Egorycheva Z.V. New polynomial identity for computing permanents. *Sibirian Federal University.* Dep. in VINITI 13.06.2007, no 627-B2007, pp. 1–32.
5. Egorychev G.P. A new family of polynomial identities for computing determinats. *Dokl. Acad. Nauk*, 2013, vol. 452, no 1, pp. 14–16. (in Russian)
6. Egorychev G.P. *Diskretnaya matematika. Permanenty* [Discrete mathematics. Permanents]. Krasnoyarsk, Siberian Federal University Publ., 2007. 272 p.
7. Pozhidaev A.P. A simple factor-algebras and subalgebras of Jacobians algebras. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1998, vol. 39, no 3, pp. 593–599. (in Russian)
8. Sokolov N.P. *Prostranstvennye matritsy i ikh prilozheniya* [Space matrices and its applications]. Moscow, PhyzMathLit Publ., 1960. 300 p.
9. Filippov V.T. On the n-Lie algebras of Jacobians. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1998, vol. 39, no 3, pp. 660–669.(in Russian)
10. Barvinok A. New permanent estimators via non-commutative determinants. Arxiv preprint math/0007153, 2000, arXiv:math/0007153, 2000, pp. 1–13.
11. Cartan H. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables. N. Y., Dover Publ., 1995. 300 p.

Egorychev Georgy Petrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Siberian Federal University, 26, Kirenskii st., Krasnoyarsk, 660074, tel.: 8(391)2461609, (e-mail: gegorych@mail.ru).