**Серия «Математика»**
2014. Т. 10. С. 106—124

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
*Иркутского государственного университета*

УДК 517.95

# О разрешимости вырожденных линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти *

В. Е. Федоров
*Челябинский государственный университет*

Л. В. Борель
*Челябинский государственный университет*

**Аннотация.** Методами теории вырожденных полугрупп операторов вырожденное линейное эволюционное уравнение с памятью в банаховом пространстве сведено к системе двух уравнений, одно из которых разрешено относительно производной, а другое имеет при производной нильпотентный оператор. Задача с заданной историей для разрешенного относительно производной уравнения с памятью редуцирована к задаче Коши для стационарной системы уравнений в более широком пространстве. Это позволило получить методами классической теории полугрупп операторов условия существования единственного решения задачи, в том числе решения повышенной гладкости. В итоге была исследована однозначная разрешимость задачи с заданной историей для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью при некоторых ограничениях на ядро интегрального оператора памяти. Кроме того, была исследована аналогичная задача с условием типа обобщенного условия Шоуолтера – Сидорова на историю системы. Полученные результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для линеаризованной интегро-дифференциальной системы уравнений Осколкова, описывающей динамику жидкости Кельвина – Фойгта высокого порядка.

**Ключевые слова:** уравнение с памятью, вырожденное эволюционное уравнение, полугруппа операторов, начально-краевая задача, жидкость Кельвина – Фойгта.

## 1. Введение

Рассмотрим задачу с заданной историей для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью

$$u(t) = u_-(t), \quad t \leq 0, \tag{1.1}$$

* Работа выполнена при частичной поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{1.2}$$

с линейными операторами $L, M, \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, действующими из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$ и выполняется условие $(L,p)$-ограниченности оператора $M$ [18]. К таким задачам могут быть редуцированы начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику процессов с эффектами памяти, например, термомеханическое поведение полимеров [14], вязкоупругих жидкостей [3], и других процессов [13; 16].

Отметим близкие по предмету исследования работы. В [15] М. В. Фалалеевым исследована разрешимость в смысле обобщенных и классических решений вырожденных эволюционных уравнений с памятью первого порядка в банаховых пространствах методами теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов. В работах [6–9] М. В. Фалалеев и С. С. Орлов исследовали интегро-дифференциальные уравнения высокого порядка с эффектами памяти и вырожденным оператором при старшей производной в случаях интегральных ядер специального вида. При этом предполагается выполненным условие фредгольмовости оператора при старшей производной, либо спектральной ограниченности пучка операторов из уравнения. В статьях [5; 12] с использованием теоремы о сжимающем отображении доказана однозначная разрешимость задачи (1.1) для уравнения (1.2) в смысле классического решения при условиях порождения парой операторов $L, M$ аналитической полугруппы. Отметим также близкие по предмету исследования работы, в которых вырожденные эволюционные уравнения с запаздыванием на конечном промежутке исследуются методами теории полугрупп операторов [10] и с помощью теоремы о неподвижной точке [11].

В данной работе получены условия однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) при некотором ограничении на образы $\mathrm{im}\mathcal{K}(s)$ или при условии $\ker P \subset \ker \mathcal{K}(s)$ для $s \geq 0$, где $P$ — единица разрешающей полугруппы уравнения $\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t)$ [18]. Во втором случае рассмотрена не только задача с заданной историей, но и задача с условием типа обобщенного условия Шоуолтера – Сидорова [17; 4]

$$P(u(t) - u_{-}(t)) = 0, \quad t \leq 0. \tag{1.3}$$

Существенную роль в проведенных исследованиях играют методы классической теории полугрупп операторов и теории вырожденных полугрупп. Общие результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для линеаризованной интегро-дифференциальной системы уравнений в частных производных, моделирующей в линейном приближении динамику вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта высокого порядка [3].

## 2. Вырожденное эволюционное уравнение с памятью

Для банаховых пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{V}$, обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Если $\mathfrak{V}=\mathfrak{U}$, то сответствующие обозначения сократятся до $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ соответственно.

Через $D_M$ обозначается область определения оператора $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Снабженное нормой графика $\|\cdot\|_{D_M}=\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}+\|M\cdot\|_{\mathfrak{V}}$ это множество является банаховым пространством в силу замкнутости оператора $M$.

Обозначим также $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+=\{0\}\cup\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-=\{x\in\mathbb{R}:x<0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_-=\{0\}\cup\mathbb{R}_-$.

Рассмотрим задачу для уравнения с памятью

$$u(t)=u_-(t),\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_-,\tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}Lu(t)=Mu(t)+\int\limits_{-\infty}^{t}\mathcal{K}(t-s)u(s)ds+f(t),\quad t\in[0,T),\tag{2.2}$$

где $u_-\in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ ограниченная функция, $\mathcal{K}\in L_1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $f\in C([0,T);\mathfrak{V})$, $T\leq+\infty$. Существенным будет предпопложение о вырожденности оператора $L$, т. е. $\ker L\neq\{0\}$. Уравнения такого вида с вырожденным оператором под знаком производной будем называть вырожденными эволюционными уравнениями. Уравнения с интегральным по временно́й переменной слагаемым, как в (2.2), будем называть уравнениями с эффектами памяти. Интегральный оператор описывает в данном случае влияние истории системы на ее динамику в настоящий момент времени. История системы к начальному моменту времени $t=0$ задается условием (2.1).

Решением задачи (2.1), (2.2) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u\in C([0,T);D_M)\cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой выполняется равенство (2.1), $Lu\in C^1([0,T);\mathfrak{U})$ и при каждом $t\in[0,T)$ справедливо равенство (2.2).

Следуя [18, с. 89], оператор $M$ будем называть $(L,\sigma)$-ограниченным, если множество $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$ ограничено в $\mathbb{C}$. При условии $(L,\sigma)$-ограниченности оператора $M$ обозначим $\gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=r>a\}$. Рассмотрим интегралы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R^L_\mu(M)d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}),\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}L^L_\mu(M)d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{V})\,.$$

Нетрудо проверить, что операторы $P$ и $Q$ являются проекторами. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{V}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{V}^1 = \mathrm{im} Q$. Обозначим через $L_k$ ($M_k$) сужение оператора $L$ ($M$) на $\mathfrak{U}^k$ ($D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

**Теорема 1.** [18, с. 90, 91]. *Пусть оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен. Тогда*
(i) *$LP = QL$, $MPu = QMu$ при всех $u \in D_M$;*
(ii) *$M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{V}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;*
(iii) *существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$.*

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H = M_0^{-1}L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор $M$ называется $(L,p)$-ограниченным, если он $(L,\sigma)$-ограничен, $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

В случае $(L,p)$-ограниченного оператора $M$ предположим, что при всех $s \geq 0$ $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$. Подействуем на уравнение (2.2) оператором $M_0^{-1}(I-Q)$ и получим в силу теоремы 1 уравнение

$$\frac{d}{dt}Hw(t) = w(t) + h(t), \quad t \in [0,T), \tag{2.3}$$

где $w(t) = (I-P)u(t)$, $h(t) = M_0^{-1}(I-Q)f(t)$. Под его решением в данной ситуации естественно понимать функцию $w \in C([0,T);\mathfrak{U}^0)$, для которой $Hw \in C^1([0,T);\mathfrak{U}^0)$ и при всех $t \in [0,T)$ выполняется равенство (2.3). Рассуждая, как в [18, с. 121], нетрудно доказать следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени $p \in \mathbb{N}_0$, $T \leq +\infty$, $H^k h \in C^k([0,T);\mathfrak{U}^0)$, $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда существует единственное решение уравнения (2.3), при этом оно имеет вид*

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k h(t), \quad t \in [0,T). \tag{2.4}$$

Из леммы следует, что при рассмотрении задачи (2.1), (2.2) возникает необходимое условие согласования

$$w(0) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t)\Big|_{t=0} = (I-P)u_-(0)$$

с заданной функцией истории $u_-$.

Если же на уравнение (2.2) подействовать оператором $L_1^{-1}Q$, то будет получено уравнение

$$\frac{d}{dt}v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + \int_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)(v+w)(s)ds + L_1^{-1}Qf(t),\ t \in [0,T),$$

где $v(t) = Pu(t)$. Поскольку функция $w$ уже известна, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}v(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)v(s)ds + g(t), \quad t \in [0,T), \quad (2.5)$$

где $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)w(s)ds + L_1^{-1}Qf(t)$. Таким образом, исходная задача (2.1), (2.2) сведена к задаче

$$v(t) = Pu_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \quad (2.6)$$

для уравнения (2.5) с ограниченным оператором $L_1^{-1}M_1$ согласно теореме 1. Рассмотрим такую задачу более подробно.

## 3. Невырожденное уравнение с памятью

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, $C^{k,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ — банахово пространство $k$ раз дифференцируемых, непрерывных и ограниченных на положительной полуоси вместе с $k$ первыми производными функций $u = u(t)$, удовлетворяющих условию $u^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, 1, \dots, k$. Для краткости обозначим $C^{0,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \equiv C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

При заданном операторе $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ рассмотрим задачу

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \quad (3.2)$$

с известными функциями $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $f \in C([0,T);\mathfrak{U})$, $T \leq +\infty$. Решением задачи (3.1), (3.2) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой справедливо условие (3.1) и при каждом $t \in [0,T)$ выполняется равенство (3.2).

Введем в рассмотрение функцию

$$v(t,s) = \int\limits_0^s u(t-\tau)d\tau = \int\limits_{t-s}^{t} u(\tau)d\tau.$$

В силу того, что $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, она ограничена по $s$ на $\overline{\mathbb{R}}_+$ при фиксированном $t \geq 0$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{K}(s)\frac{\partial}{\partial s}v(t,s)ds =$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{0} u_-(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} u(\tau)d\tau \right) \lim_{s\to+\infty} \mathcal{K}(s) - \int_{0}^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds =$$

$$- \int_{0}^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds.$$

Вычислим частную производную

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\int_{0}^{s} \frac{\partial}{\partial \tau} u(t-\tau)d\tau = u(t) - u(t-s) = u(t) - \frac{\partial}{\partial s} v(t,s).$$

Таким образом, задача (3.1), (3.2) сведена к задаче Коши

$$u(0) = u_-(0), \quad v(0,s) = \int_{-s}^{0} u_-(\tau)d\tau, \ s \geq 0,$$

для системы уравнений

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) - \int_{0}^{+\infty} \mathcal{K}'(s)v(t,s)ds + f(t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s) = u(t) - \frac{\partial}{\partial s} v(t,s),$$

которую можно записать в виде задачи Коши для стационарного неоднородного уравнения

$$w(0) = w_0, \quad w'(t) = Bw(t) + g(t) \tag{3.3}$$

в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$. Здесь

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A_1 \\ J & A_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

при этом $A_1 : C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}) \to \mathfrak{U}$, $A_2 : C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}) \to C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$, $J : \mathfrak{U} \to C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ действуют по правилам

$$A_1 z = -\int_{0}^{+\infty} \mathcal{K}'(s)z(s)ds, \quad (A_2 z)(s) = -z'(s), \quad (Jz)(s) \equiv z, \ s \geq 0.$$

Очевидно, что $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}))$, $\|J\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}))} = 1$. При условии $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ имеем $A_1 \in \mathcal{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}); \mathfrak{U})$, при этом выполняется неравенство $\|A_1\|_{\mathcal{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}); \mathfrak{U})} \leq \|\mathcal{K}\|_{W_1^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))}$.

Полугруппа операторов $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ называется сжимающей, если $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq 1$ для всех $t \geq 0$.

**Лемма 2.** *Оператор* $A_2 \in \mathcal{C}l(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, $(A_2z)(s) = -z'(s)$, *с областью определения* $D_{A_2} = C^{1,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ *порождает сжимающую* $(C_0)$*-непрерывную полугруппу операторов.*

*Доказательство.* При $\mu > 0$ и $z_2 \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ уравнение $(\mu I - A_2)z_1 = z_2$ относительно $z_1 \in C^{1,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ является дифференциальным уравнением $\mu z_1 + z_1' = z_2$. Его решение будем искать методом вариации постоянной в виде $z_1(s) = C(s)e^{-\mu s}$. Тогда $z_1(s) = C_1 e^{-\mu s} + \int\limits_0^s e^{\mu(\tau - s)} z_2(\tau)d\tau$. Поскольку $z_1(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Таким образом,

$$[(\mu I - A_2)^{-1}z_2](s) = \int\limits_0^s e^{\mu(\tau-s)} z_2(\tau)d\tau,$$

$$\|(\mu I - A_2)^{-1}z_2\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})} \le \sup_{s\ge 0} \int\limits_0^s e^{\mu(\tau-s)} \|z_2(\tau)\|_{\mathfrak{U}}\, d\tau \le \frac{1}{\mu}\|z_2\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})},$$

$$||(\mu I - A_2)^{-1}||_{\mathcal{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))} \le \frac{1}{\mu}.$$

По теореме Хилле – Иосиды оператор $A_2$ является генератором сжимающей $(C_0)$-непрерывной полугруппы операторов. □

**Теорема 2.** *Пусть оператор* $A$ *порождает* $(C_0)$*-непрерывную полугруппу операторов в пространстве* $\mathfrak{U}$, $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. *Тогда определенный в (3.4) оператор* $B$ *порождает* $(C_0)$*-непрерывную полугруппу операторов в пространстве* $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

*Доказательство.* Нетрудно заметить, что оператор

$$B_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$$

порождает $(C_0)$-непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, поскольку операторы $A$ и $A_2$ являются генераторами $(C_0)$-непрерывных полугрупп на пространствах $\mathfrak{U}$ и $C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ соответственно. Оператор $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ J & 0 \end{pmatrix}$ непрерывен на пространстве $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ в силу того, что как замечено выше, $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, $A_1 \in \mathcal{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U});\mathfrak{U})$. Поэтому по теореме 2.1 [1] о возмущении генератора полугруппы оператор $B_0 + B_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$ является генератором $(C_0)$-непрерывной полугруппы на пространстве $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$. □

При получении условий существования решения класса

$$C^n([0,T);\mathfrak{U}) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$$

задачи (3.1), (3.2) понадобится описание множества $D_{B^n}$, которое получено в следующей лемме.

**Лемма 3.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для определенного в (3.4) оператора* $B$ $D_{B^n} = \mathfrak{U} \times D_{A_2^n}$.

*Доказательство.* Используя очевидное равенство $A_2 J = 0$, по индукции нетрудно доказать, что при всех $k \in \mathbb{N}$ степень $B^k$ оператора $B$ имеет вид

$$B^k = \begin{pmatrix} D_k & \sum\limits_{m=0}^{k-1} F_{k,m} A_2^m \\ JD_{k-1} & A_2^k + J \sum\limits_{m=0}^{k-2} G_{k,m} A_2^m \end{pmatrix},$$

где $D_0 = I$, $D_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $F_{k,m} \in \mathcal{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U});\mathfrak{U})$, $m = 0, 1, \ldots, k-1$, $G_{k,m} \in \mathcal{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, $m = 0, 1, \ldots, k-2$, $k \in \mathbb{N}$. В случае $k = 1$ нижний предел суммирования в последней сумме больше верхнего, по умолчанию это означает отсутствие суммы. Из полученного представления оператора $B^k$ следует утверждение леммы. $\square$

**Теорема 3.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $n \in \mathbb{N}$, $u_- \in C^{n-1,0}(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $f \in C^{n-1}([0,T);\mathfrak{U})$ *при* $T \leq +\infty$. *Тогда существует единственное решение задачи (3.1), (3.2) на промежутке* $[0,T)$, *при этом оно принадлежит классу* $C^n([0,T);\mathfrak{U}) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$.

*Доказательство.* Задача (3.1), (3.2) приведена к виду (3.3) в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$. В силу условий теоремы на $u_-$ и $f$

$$w_0 = \begin{pmatrix} u_-(0) \\ v(0,\cdot) \end{pmatrix} \in D_{B^n} = \mathfrak{U} \times D_{A_2^n}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in C^{n-1}([0,T);D_{B^n}).$$

В частности, функции

$$v(0,s) = \int\limits_{-s}^{0} u_-(\tau)d\tau, \quad [A_2^n v(0,\cdot)](s) = -u_-^{(n-1)}(-s), \ n \in \mathbb{N}, \ s \geq 0,$$

принадлежат $C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$. Поэтому по теореме 5.6 [2] и согласно теореме 2 существует единственное решение $w \in C^1([0,T);\mathfrak{W}) \cap C([0,T);D_B)$ задачи (3.3) на промежутке $[0,T)$, $w(t) = e^{tB}w_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}g(s)ds$, где $\{e^{tB} \in \mathcal{L}(\mathfrak{W}) : t \geq 0\}$ — полугруппа операторов, порождаемая оператором $B$. Понятно, что в условиях данной теоремы существует

$$w^{(n)}(t) = e^{tB}B^n w_0 + \sum_{k=0}^{n-1} B^k g^{(n-1-k)}(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)B}B^n g(s)ds.$$

Решением исходной задачи (3.1), (3.2) является первая компонента вектор-функции $w(t)$. □

## 4. Условия разрешимости вырожденного уравнения

Теперь есть возможность закончить исследование разрешимости задачи с заданной историей для вырожденного эволюционного уравнения с эффектами памяти.

**Теорема 4.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ ограниченная функция, $Pu_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ при $s \geq 0$, $T \leq +\infty$, $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $H^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k = 0,1,\ldots,p$,*

$$-\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t)\bigg|_{t=0} = (I-P)u_-(0).$$

*Тогда существует единственное решение задачи (2.1), (2.2) на промежутке $[0,T)$.*

*Доказательство.* В силу леммы 1 функция $w$ непрерывна, а согласно теореме вложения Соболева то же самое можно сказать про оператор-функцию $\mathcal{K}$. Используя ограниченность функции $(I-P)u_-$ на $\overline{\mathbb{R}}_-$ и принадлежность $\mathcal{K} \in L_1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, нетрудно показать равномерную сходимость по $t$ на произвольном отрезке $[t_0,t_1] \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ интеграла

$$\int_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)w(s)ds = \int_{0}^{+\infty} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(s)w(t-s)ds,$$

а значит, и непрерывность функции $g$ из уравнения (2.5). По теореме 3 задача (2.5), (2.6) однозначно рарешима. Учитывая рассуждения из §1 и лемму 1, получим требуемое. □

Вместо условия $\mathrm{im}\mathcal{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ рассмотрим теперь ограничение

$$\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s), \quad s \geq 0. \tag{4.1}$$

Пусть по определению $C^{-n}([0,T);\mathfrak{V}) = C([0,T);\mathfrak{V})$, $C^{-n,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) = C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ при $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 5.** *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, функция $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ ограничена, $Pu_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, оператор-функция $\mathcal{K} \in L_1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K} \in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$ при*

$s \geq 0$, $H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K} \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U})) \cap C^{k-1,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, *оператор-функции* $\frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}$ *ограничены на* $\overline{\mathbb{R}}_+$, $k = 0,1,\dots,p$, $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $H^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k = 0,1,\dots,p$,

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} \int_{-\infty}^{0} (H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K})^{(k)}(-s)Pu_-(s)ds -$$

$$-\sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k} H^k M_0^{-1}(I-Q)f\Big|_{t=0}. \tag{4.2}$$

*Тогда существует единственное решение задачи (2.1), (2.2) на промежутке* $[0,T)$.

*Доказательство.* Действуя, как в §1, из уравнения с памятью получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt}Hw(t) = w(t) + \int_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t-s)v(s)ds + M_0^{-1}(I-Q)f(t), \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + \int_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathcal{K}(t-s)v(s)ds + L_1^{-1}Qf(t). \tag{4.4}$$

Учитывая, что задача (2.6) для уравнения (4.4) по теореме 3 однозначно разрешима, перепишем уравнение (4.3) в виде

$$\frac{d}{dt}Hw(t) = w(t) + g(t), \tag{4.5}$$

где $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t-s)v(s)ds + M_0^{-1}(I-Q)f(t)$ — заданная функция. Тем самым, исходная задача (2.1), (2.2) сведена к задаче $w(t) = (I-P)u_-(t)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_-$, для уравнения (4.5), условия разрешимости которого сформулированы в лемме 1.

Покажем существование $k$-й производной у функции $H^k g$. Обозначим при $k \in \mathbb{N}_0$ $G_k(t) = H^k M_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}(t)$, тогда, поскольку $G_k^{(l)}(0) = 0$ при $l = 0,1,\dots,k-1$, то

$$\frac{d^n}{dt^n}H^k g(t) = \int_{-\infty}^{t} G_k^{(n)}(t-s)v(s)ds + \frac{d^n}{dt^n}H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t),$$

$k = 0,1,\dots,p$, $n = 0,1,\dots,k$, при условии дифференцируемости соответствующего несобственного интеграла, докажем ее. Действительно, так как $Pu_- \in L_1(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое достаточно большое $A>0$, что при всех $A'>A$, $t\geq 0$

$$\left\|\int\limits_{-\infty}^{-A'} G_k^{(n)}(t-s)v(s)ds\right\|_{\mathfrak{U}} \leq \sup_{\tau\geq 0}\|G_k^{(n)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\int\limits_{-\infty}^{-A'}\|Pu_-(s)\|_{\mathfrak{U}}\,ds<\varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная сходимость по $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ соответствующих интегралов, а значит, и их дифференцируемость.

Необходимость условия согласования данных (4.2) следует из вида решения уравнения (4.5), приведенного в лемме 1. □

При выполнении ограничения (4.1) можно рассматривать модифицированное условие заданной истории системы — условие типа Шоуолтера - Сидорова

$$P(u(t)-u_-(t))=0,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_-, \tag{4.6}$$

когда задана лишь история проекции состояния системы на подпространство $\mathfrak{U}^1$. Для задачи (2.2), (4.6) будет справедлив результат, аналогичный теореме 5, лишь условие согласования (4.2) в этом случае становится лишним. Рассмотрим другой вариант теоремы об однозначной разрешимости задачи (2.2), (4.6), в котором ослабим требования на функции $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}$, добившись большей гладкости функции $v$.

**Теорема 6.** *Пусть $p\in\mathbb{N}_0$, оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, функция $u_-\in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ ограничена, $Pu_-\in C^{p-2,0}(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})\cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, оператор-функция $\mathcal{K}\in L_1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K}\in W_1^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0\subset\ker\mathcal{K}(s)$, $s\geq 0$, оператор-функции $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}\in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ ограничены на $\mathbb{R}_+$ вместе со своими производными до порядка $k$ включительно, $k=0,1,\dots,p$, $Qf\in C^{p-2}([0,T);\mathfrak{V})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f\in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k=0,1,\dots,p$. Тогда существует единственное решение задачи (2.1), (2.2) на промежутке $[0,T)$.*

*Доказательство.* Отличие от доказательства предыдущей теоремы состоит лишь в том, что теперь решение $v$ уравнения (4.4) принадлежит классу $C^{p-1}([0,T);\mathfrak{V})\cap C^1([0,T);\mathfrak{V})$ по теореме 3, при этом

$$\frac{d^n}{dt^n}H^kg(t)=\sum_{l=0}^{n-1}G_k^{(l)}(0)v^{(n-1-l)}(t)+\int\limits_{-\infty}^{t}G_k^{(n)}(t-s)v(s)ds+$$

$$+\frac{d^n}{dt^n}H^kM_0^{-1}(I-Q)f(t),\quad k=0,1,\dots,p,\ n=0,1,\dots,k,$$

и выполнение условия согласования (4.2) не требуется. □

## 5. Линеаризованная система уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта высокого порядка

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$y(x,t) = y_-(x,t), \quad z(x,t) = z_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{5.1}$$

$$y(x,t) = 0, \quad z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{5.2}$$

для линеаризованной системы уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта порядка 2, 3, ... (система (0.55) в [3])

$$(1 - \chi\Delta)y_t(x,t) = \nu\Delta y(x,t) - (\tilde{y} \cdot \nabla)y(x,t) - (y \cdot \nabla)\tilde{y}(x,t) +$$

$$+\Delta z(x,t) - r(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{5.3}$$

$$z_t(x,t) = \alpha y(x,t) + \beta z(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)z(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{5.4}$$

$$\nabla \cdot y = 0, \quad \nabla \cdot z = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{5.5}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi, \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, заданы функции $y_-$, $z_-$, $\tilde{y}$, $K$. Функция $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$ соответствует стационарному решению системы, параметр $\chi$ характеризует упругие свойства жидкости, $\nu$ – ее вязкие свойства. Вектор-функции $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (вектор скорости жидкости), $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ (свертка по временно́й переменной скорости и некоторой весовой функции) и $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathcal{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot w = 0\}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Кроме того, будем использовать обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Имеем представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ ортопроектор вдоль $\mathbb{H}_\sigma$, $\Sigma = I - \Pi$.

Обозначим через $A = \Sigma\,\mathrm{diag}\{\Delta, \ldots, \Delta\}$ оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathbb{H}_\sigma)$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$. Известно, что этот оператор имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр $\sigma(A)$, сгущающийся только на $-\infty$. Пусть $\tilde{y} \in \mathbb{H}^1$, тогда формулой $Dw = \nu\Delta w - (\tilde{y} \cdot \nabla)w - (w \cdot \nabla)\tilde{y}$ задан оператор $D \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2; \mathbb{L}_2)$.

Учитывая уравнения (5.5) и тот факт, что градиент давления $r$ ищется как функция от $t$ со значениями в подпространстве градиентных функций $\mathbb{H}_\pi$, положим

$$\mathfrak{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_\sigma^2, \quad \mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 \times \mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_\sigma^2. \tag{5.6}$$

Здесь также используется тот факт, что при фиксированном $t$ все слагаемые в уравнении (5.4) являются элементами $\mathbb{H}^2_\sigma$. Тогда операторы, задающие систему (5.1)–(5.5) в виде уравнения (2.2), имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} I-\chi A & 0 & 0 \\ -\chi\Pi\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \Sigma D & 0 & A \\ \Pi D & -I & \Pi\Delta \\ \alpha I & 0 & \beta I \end{pmatrix}, \mathcal{K}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(s) \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

и лежат в $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$.

**Теорема 7.** *Пусть пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ определены в (5.6), а операторы $L$ и $M$ заданы формулами (5.7), $\nu, \chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$. Тогда оператор $M$ $(L,0)$-ограничен, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \chi\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}\Sigma D & 0 & \Pi\Delta(I-\chi A)^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

*Доказательство.* Обозначим $\chi_\mu = \chi + \frac{\alpha}{\mu(\mu-\beta)}$. Так как, $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} \chi_\mu = \chi \neq 0$, а спектр оператора $A$ дискретен, то при достаточно больших $|\mu|$ существует оператор $(I-\chi_\mu A)^{-1} = \chi_\mu^{-1}(\chi_\mu^{-1}I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$. В силу свойств резольвенты $\lim\limits_{|\mu|\to\infty}(I-\chi_\mu A)^{-1} = (I-\chi A)^{-1}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$.

Для любого $v \in \mathbb{H}_\sigma$ имеем

$$\|(I-\chi_\mu A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|1-\chi_\mu\lambda_k|^2} \leq C_\mu \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v,\varphi_k\rangle|^2 = C_\mu\|v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma},$$

поэтому $(I-\chi_\mu A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}^2_\sigma)$. Оценим константу $C_\mu = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1+\lambda_k^2}{(1-\chi_\mu\lambda_k)^2}$ при достаточно больших $|\mu|$. Если $\chi > 0$, то в силу отрицательности спектра $\sigma(A)$ $C_\mu$ не превосходит максимума значений функции $h_\mu(x) = (1+x^2)(1-\chi_\mu x)^{-2}$ в точке 0 и на $-\infty$: $C_\mu \leq \max\{1, \chi_\mu^{-2}\} \leq C(\varepsilon) \equiv \max\{1, (\chi-\varepsilon)^{-2}\}$ при некотором малом $\varepsilon > 0$. В случае же $\chi < 0$ имеем

$$C_\mu \leq C(\varepsilon) \equiv \frac{\chi^2 + (1-d\chi)^2}{d^2\chi^4} + \varepsilon, \quad d = \inf_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k - \chi^{-1}| > |\chi_\mu^{-1} - \chi^{-1}|.$$

В этом случае взят максимум значений функции $h(x) = (1+x^2)(1-\chi x)^{-2}$ в точках $\chi^{-1} \pm d$ с поправкой на то, что $\chi_\mu \neq \chi$.

Таким образом, обратный оператор

$$D_\mu \equiv (I-\chi_\mu A - \mu^{-1}\Sigma D)^{-1} = (I-\chi_\mu A)^{-1}\left(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}\right)^{-1}$$

существует и непрерывно действует из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{H}_\sigma^2$ при достаточно большом $|\mu|$, в том числе при условии $|\mu| > C(\varepsilon)\|\Sigma D\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2;\mathbb{H}_\sigma)}$. При таких $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu(I-\chi A) - \Sigma D & 0 & -A \\ -\mu\chi\Pi\Delta - \Pi D & I & -\Pi\Delta \\ -\alpha I & 0 & (\mu-\beta)I \end{pmatrix},$$

$(\mu L - M)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \mu^{-1}D_\mu & 0 & \frac{D_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ \Pi\frac{(\mu-\beta)(\mu\chi\Delta+D)+\alpha\Delta}{\mu(\mu-\beta)}D_\mu & I & \Pi\frac{\Delta D_\mu[\mu(I-\chi A)-\Sigma D]+(\mu\chi\Delta+D)D_\mu A}{\mu(\mu-\beta)} \\ \frac{\alpha}{\mu(\mu-\beta)}D_\mu & 0 & D_\mu\frac{\mu(I-\chi A)-\Sigma D}{\mu(\mu-\beta)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что при достаточно больших $|\mu|$ оператор $(\mu L - M)^{-1} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ непрерывен, что означает $(L,\sigma)$-ограниченность оператора $M$.

При $v \in \mathbb{H}_\sigma$ и достаточно больших $|\mu|$

$$\|(I-\chi_\mu A)^{-1}v - (I-\chi A)^{-1}v\|_{\mathbb{H}_\sigma^2}^2 = (\chi_\mu - \chi)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{(1-\chi_\mu\lambda_k)^2(1-\chi\lambda_k)^2} \le$$

$$\le \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{[(1-\chi\lambda_k)^2-\delta](1-\chi\lambda_k)^2} \le C\varepsilon^2\|v\|_{\mathbb{H}_\sigma}^2,$$

поэтому $\lim\limits_{|\mu|\to\infty}(I-\chi_\mu A)^{-1} = (I-\chi A)^{-1}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}_\sigma^2)$. Кроме того,

$$\lim_{|\mu|\to\infty}\left\|\left(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}\right)^{-1} - I\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} \le$$

$$\le \lim_{|\mu|\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\|\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}+\delta\right)^k}{|\mu|^k} = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} D_\mu = (I-\chi A)^{-1}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}_\sigma^2)$.

Далее, для $v \in \mathbb{H}_\sigma^2$ и достаточно больших $|\mu|$

$$\|(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)v - v\|_{\mathbb{H}_\sigma^2}^2 \le$$

$$\le 2(\chi_\mu-\chi)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{(1-\chi_\mu\lambda_k)^2} \le \frac{C^2\|v\|_{\mathbb{H}_\sigma^2}^2}{|\mu|^2|\mu-\beta|^2},$$

$$\|\mu D_\mu(I-\chi A) - \mu I - (I-\chi A)^{-1}\Sigma D\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2)} \le$$

$$\le |\mu|\,\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A) - I\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2)} +$$

$$+\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\|\frac{((I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D)^k}{\mu^{k-1}}(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}\le\frac{C}{|\mu-\beta|}+$$

$$+\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D(I-\chi_\mu A)^{-1}(I-\chi A)-(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+$$

$$+\left\|(I-\chi_\mu A)^{-1}\Sigma D-(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[\|(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}+\delta]^k}{|\mu|^{k-1}}(1+\delta).$$

Последнее выражение стремится к нулю при $|\mu|\to\infty$, следовательно, $\lim\limits_{|\mu|\to\infty}\mu(D_\mu(I-\chi A)-I)=(I-\chi A)^{-1}\Sigma D$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)$. Таким образом, обозначив $A_{21}=\mu\chi\Pi\Delta(D_\mu(I-\chi A)-I)+\frac{\alpha\Pi\Delta}{\mu-\beta}D_\mu(I-\chi A)$, получим существование предела

$$\tilde{P}=\lim_{|\mu|\to\infty}\mu R^L_\mu(M)=\lim_{|\mu|\to\infty}\begin{pmatrix} D_\mu(I-\chi A) & 0 & \frac{D_\mu A}{\mu-\beta}\\ A_{21} & 0 & \Pi\frac{\Delta D_\mu(\mu I-\Sigma D)+DD_\mu A}{\mu-\beta}\\ \frac{\alpha}{\mu-\beta}D_\mu(I-\chi A) & 0 & D_\mu\frac{\mu(I-\chi A)-\Sigma D}{\mu-\beta}\end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$. Аналогичным образом вычисляется предел $\tilde{Q}=\lim\limits_{|\mu|\to\infty}\mu L^L_\mu(M)$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{V})$. Из существования этих пределов следует $(L,0)$-секториальность оператора $M$, а значит, и его сильная $(L,0)$-секториальность справа и слева в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$. Поэтому проектор удовлетворяет равенству $P=\tilde{P}$ (это следует из теоремы 3.4.2, замечания 3.5.3 и теоремы 2.5.2 из [18]). Вычислив предел, получим оператор (5.8). Поскольку $\ker L=\ker P$, то оператор $M$ $(L,0)$-ограничен. □

Из вида проектора $P$ следует, что $\mathfrak{U}^0=\{0\}\times\mathbb{H}_\pi\times\{0\}$, $\mathfrak{U}^1=\{(y,r,z)\in\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times\mathbb{H}^2_\sigma : r=\chi\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}\Sigma Dy+\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}z\}$. Это означает, в частности, что равенства (5.1) образуют условие Шоуолтер – Сидорова и выполняются условия теоремы 6.

**Теорема 8.** *Пусть $\nu,\chi\neq 0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $y_-,z_-\in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathbb{H}^2_\sigma)\cap L_1(\mathbb{R}_-;\mathbb{H}^2_\sigma)$, $K\in W^1_1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$, $g\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$. Тогда существует единственное решение $y,z\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{H}^2_\sigma)\cap C(\mathbb{R};\mathbb{H}^2_\sigma)$, $r\in C(\mathbb{R};\mathbb{H}_\pi)$ задачи (5.1)–(5.5).*

*Доказательство.* По теореме 6 при $p=0$ получим требуемое. Заметим лишь, что $\ker P=\mathfrak{U}^0\subset\ker\mathcal{K}(s)$ при всех $s\geq 0$. □

## Список литературы


1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.
2. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. – М. : Мир, 1977. – 504 с.
3. Осколков А. П. Начально краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.
4. Сидоров Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. – 1984. – Т. 25, № 4. – С. 569–578.
5. Стахеева О. А. Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью / О. А. Стахеева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Вып. 11, № 20 (158). – С. 70–76.
6. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 90–102.
7. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 10. – С. 68–79.
8. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2010. – Вып. 6, № 35 (211). – С. 104–109.
9. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 118–134.
10. Федоров В. Е. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т.53, № 2. – С. 418–429.
11. Федоров В. Е. Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Изв. вузов. Математика. – 2014. – № 1. – С. 71–81.
12. Федоров В. Е. О разрешимости линейных уравнений соболевского типа с эффектом памяти / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. – С. 245–261.
13. Giorgi C. Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory / C. Giorgi, A. Marzocchi // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 1998. – Vol. 5. – P. 333–354.
14. Gurtin M. E. A general theory of heat conduction with finite wave speeds / M. E. Gurtin, A. C. Pipkin // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – Vol. 31. – P. 113–126.
15. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2002. — 548 p.
16. Robust exponential attractors for a family of nonconserved phase-field systems with memory / S. Gatti, M. Grasselli, V. Pata, M. Squassina // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2005. – Vol. 12, N 5. – P. 1019–1029.

17. Showalter R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differentialequations of mixed type / R. E. Showalter // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – Vol. 6, N 1. – P. 25–42.
18. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht ; Boston : VSP, 2003. – 216+vii p.

**Федоров Владимир Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Челябинский государственный университет, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, тел.: (351)7997235 (e-mail: kar@csu.ru)

**Борель Лидия Викторовна**, аспирант, Челябинский государственный университет, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, тел.: (351)7997235 (e-mail: lidiya904@mail.ru)

---

**V. E. Fedorov, L. V. Borel**

## On Solvability of Degenerate Linear Evolution Equations with Memory Effects

**Abstract**. By the methods of the operators semigroups theory a degenerate linear evolution equation with memory in a Banach space is reduced to a system of two equations. One of them is resolved with respect to the derivative, another has a nilpotent operator at the derivative. A problem with a given history for the first of the equations with memory is brought to the Cauchy problem for stationary equations system in a wider space. It allowed to obtain conditions of the unique solution existence for the problem, including solutions with a greater smoothness, by the methods of the classical operators semigroups theory. Thus unique solvability of the problem with a given history for a degenerate linear evolution equation with memory was researched with using some restrictions for the kernel of the memory integral operator. Besides, an analogous problem with generalized Showalter – Sidorov type condition on the history of the system was studied. General results were used for investigation of an initial boundary value problem for the linearized Oskolkov integro-differential system of equations, descibing the dynamics of the high order Kelvin – Voight fluid.

**Keywords:** equation with memory, degenerate evolution equation, operator semigroup, initial boundary value problem, Kelvin –Voight fluid.

## References

1. Falaleev M. V. Integro-differentsial'nye uravneniya s fredgol'movym operatorom pri starshey proizvodnoy v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya (in Russian) [Integro-Differential Equations with Fredholm Operator at Highest Derivative in Banach Spaces and Their Applications]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika* [News of Irkutsk State University, Ser. Mathematics], 2012, vol. 5, no. 2, pp. 90-102.
2. Falaleev M. V., Orlov S. S. Degenerate Integro-Differential Operators in Banach Spaces and Their Applications. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 10, pp. 59-69.

3. Falaleev M. V., Orlov S. S. Vyrozhdennye integro-differentsial'nye uravneniya spetsial'nogo vida v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya (in Russian) [Degenerate Integro-Differential Equations of Special Form in Banach Spaces and Their Applications]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Herald of South Ural State University, Ser. Mathematical Modeling and Programming], 2010, issue 6, no. 35 (211), pp. 104-109.
4. Falaleev M. V., Orlov S. S. Integro-differentsial'nye uravneniya s vyrozhdeniem v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya v matematicheskoy teorii uprugosti (in Russian) [Integro-Differential Equations with Degeneration in Banach Spaces and Their Applications in Mathematical Elasticity Theory]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika* [News of Irkutsk State University], 2011, vol. 4, no. 1, pp. 118-134.
5. Fedorov V. E., Omelchenko O. A. Inhomogeneous Degenerate Sobolev Type Equations with Delay. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 418-429.
6. Fedorov V. E., Omelchenko O. A. Linear Equations of the Sobolev Type with Integral Delay Operator. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 1, pp. 60-69.
7. Fedorov V. E., Stakheeva O. A. O razreshimosti lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa s effektom pamyati (in Russian) [On Solvability of Linear Sobolev Type Equations with Memory Effect]. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki* [Nonclassical Mathematical Physics Equations], Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, 2010, pp. 245-261.
8. Gatti S., Grasselli M., Pata V., Squassina M. Robust exponential attractors for a family of nonconserved phase-field systems with memory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2005, vol. 12, no. 5, pp. 1019-1029.
9. Giorgi C., Marzocchi A. Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 1998, vol. 5, pp. 333-354.
10. Gurtin M. E., Pipkin A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1968, vol. 31, pp. 113-126.
11. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1966.
12. Mizokhata S. Teoriya uravneniy s chastnymi proizvodnymi (in Russian) [Theory of Partial Differential Equations], Moscow, Mir, 1977, 504 p.
13. Oskolkov A. P. Nachal'no-kraevye zadachi dlya uravneniy dvizheniya zhidkostey Kelvina – Voighta i zhidkostey Oldroyda (in Russian) [Initial Boundary Value Problems for Motion Equations of Kelvin–Voight and Oldroyd Fluids]. *Trudy Mat. Instituta AN SSSR* [Proceedings of Steklov Mathematics Institute of USSR Academy of Sciences], 1988, vol. 179, pp. 126-164.
14. Showalter R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differentialequations of mixed type. *SIAM J. Math. Anal.*, 1975, vol. 6, no. 1, pp. 25-42.
15. Sidorov N. A. A Class of Degenerate Differential Equations with Convergence. *Mathematical Notes*, 1984, vol. 35, no. 4, p. 300-305.
16. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002, 548 p.
17. Stakheeva O. A. Local'naya razreshimost' odnogo klassa lineynykh uravneniy s pamyat'yu (in Russian) [Local Solvability of a Class of Linear Equations with Memory]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Herald of Chelyabinsk State University. Ser. Mathematics, Mechanics, Informatics], 2009, issue 11, no. 20 (158), pp. 70-76.

18. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, Utrecht–Boston, VSP, 2003, 216+vii p.

**Fedorov Vladimir Evgenyevich**, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Chelyabinsk State University, 129, Kashirin Brothers st., Chelyabinsk, 454001, tel.: (351)7997235 (e-mail: kar@csu.ru)

**Borel Lidiya Viktorovna**, Postgraduate, Chelyabinsk State University, 129, Kashirin Brothers st., Chelyabinsk, 454001, tel.: (351)7997235 (e-mail: lidiya904@mail.ru)