Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 117—123

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.97

Принцип максимума для задачи оптимального управления тепловым процессом *

В. П. Поплевко
Иркутский государственный университет

Е. А. Лутковская
Иркутский государственный университет

Е. В. Тучнолобова
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом. Правая часть дифференциального уравнения нелинейна по совокупности своих аргументов, в набор аргументов входят независимые переменные (пространственная и временная), управление и состояние. Для данной задачи получено необходимое условие оптимальности типа классического принципа максимума.

Ключевые слова: тепловой процесс; оптимальное управление; необходимое условие оптимальности; принцип максимума.

Введение

Задачи оптимального управления, в которых связь между состоянием и управлением определяется параболическими уравнениями, имеют многочисленные приложения при изучении процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации и др. В данной статье под управлением тепловым процессом понимается управление процессом теплопроводности.

Существует значительное число работ, посвященных разнообразным аспектам задач оптимального управления процессами, описываемыми параболическими уравнениями и системами. Однако их подавляющая

* Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (Соглашение № 14.B37.21.1124)

часть посвящена либо построению математических моделей в форме задач оптимального управления, либо в них изучаются задачи оптимального управления более частного характера. Так, в работе [1] изучаются линейные по состоянию и управлению задачи. В [2] рассматриваются хотя и многомерные задачи, но также в основном в их линейном варианте и для функционала в виде среднеквадратической невязки.

Существенной особенностью нашего исследования является значительная общность постановки задачи оптимального управления: нелинейная правая часть дифференциального уравнения по совокупности своих аргументов, в набор аргументов входят независимые переменные (пространственная и временная), управление и состояние.

Можно отметить чисто теоретическую направленность многих работ в области оптимального управления дифференциальными уравнениями с частными производными. Многие авторы ограничиваются только получением условий оптимальности того или иного вида и, в общем случае, теоретическими схемами методов.

Цель нашего исследования — получение принципа максимума Понтрягина и его следствий для задачи оптимального управления тепловым процессом для дальнейшей разработки конструктивных методов решения, основанных на этих условиях оптимальности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующее уравнение

$$x_t - x_{ss} = f(x, u, s, t), \tag{1.1}$$

$$(s,t) \in \Pi,\ \Pi = S \times T,\ S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1],$$

где $x = x(s,t)$ – функция состояния, $u = u(s,t)$ – управляющая функция.

Начально-краевые условия

$$x(s,t_0) = x^0(s),\ \ s \in S;\ \ x(s_0,t) = q^0(t),\ \ x(s_1,t) = q^1(t), t \in T. \tag{1.2}$$

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на Π функций, удовлетворяющих почти всюду ограничениям

$$u(s,t) \in U,\ (s,t) \in \Pi, \tag{1.3}$$

где множество U компактное. Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1), s)\, ds + \iint\limits_\Pi F(x, u, s, t)\, ds\, dt \to \min_{u \in U}. \tag{1.4}$$

Задача (1.1)-(1.4) рассматривается при следующих предположениях:
1) функции $x^0(s)$ и $q^0(t)$, $q^1(t)$ — непрерывны на S и T соответственно;
2) функции $f(x,u,s,t)$, $F(x,u,s,t)$ и $\varphi(x(s,t_1),s)$ — непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x.

На основании результатов работ [3, 4, 5, 6] о свойствах обобщенного решения, будем считать, что x_t, x_s, x_{ss} являются измеримыми существенно ограниченными в Π функциями.

2. Формула приращения

Рассмотрим формулу приращения целевого функционала на двух допустимых процессах: исходном — $\{u,x\}$ и проварьированном $\{\widetilde{u}=u+\Delta u, \widetilde{x}=x+\Delta x\}$. Обозначим $Dx=x_t-x_{ss}$. Тогда задача в приращениях имеет вид:

$$D\Delta x=\Delta f(x,u,s,t),$$
$$\Delta x(s,t_0)=0, \quad s\in S; \quad \Delta x(s_0,t)=0, \quad \Delta x(s_1,t)=0, t\in T, \tag{2.1}$$

а приращение функционала $\Delta J(u)=J(\widetilde{u})-J(u)$ вычисляется по правилу

$$\Delta J(u)=\int\limits_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)\,ds+\iint\limits_\Pi \Delta F(x,u,s,t)\,ds\,dt.$$

Заметим, что в силу (2.1) справедливо равенство

$$\iint\limits_\Pi \psi(s,t)[D\Delta x-\Delta f(x,u,s,t)]\,ds\,dt=0$$

при произвольном выборе функции ψ. Далее применим формулу интегрирования по частям:

$$\iint\limits_\Pi \psi(s,t)D\Delta x\,ds\,dt=\iint\limits_\Pi [\psi(s,t)\Delta x_t]-[\psi(s,t)\Delta x_{ss}]\,ds\,dt=$$

$$=\int\limits_S [\psi(s,t_1)\Delta x(s,t_1)-\psi(s,t_0)\Delta x(s,t_0)]\,ds-\iint\limits_\Pi \psi_t\Delta x\,ds\,dt-$$

$$-\int\limits_T [\psi(s_1,t)\Delta x_s(s_1,t)-\psi(s_0,t)\Delta x_s(s_0,t)-\psi_s\Delta x(s_1,t)+$$

$$+\psi_s\Delta x(s_0,t)]\,dt-\iint\limits_\Pi \psi_{ss}\Delta x\,dsdt.$$

Учитывая условия (2.1), получаем

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \int\limits_S \psi(s,t_1)\Delta x(s,t_1)\,ds -$$

$$-\iint\limits_\Pi D^*\psi\Delta x\,dsdt - \iint\limits_\Pi \psi(s,t)\Delta f(x,u,s,t)\,dsdt -$$

$$-\iint\limits_\Pi \Delta F(x,u,s,t)dsdt,$$

где $D^*\psi = \psi_t + (\psi)_{ss}$.

Приращение $\Delta\varphi$ разложим по формуле Тейлора первого порядка

$$\Delta\varphi(x(s,t_1),s) = \frac{\partial\varphi(x(s,t_1),s)}{\partial x}\Delta x(s,t_1) + o_\varphi(|\Delta x(s,t_1)|).$$

Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi,x,u,s,t) = \psi(s,t), f(x,u,s,t) - F(x,u,s,t).$$

Тогда

$$\Delta H(\psi,x,u,s,t) = \Delta_{\widetilde{u}}H(\psi,x,u,s,t) + \Delta_{\widetilde{x}}H(\psi,x,\widetilde{u},s,t).$$

Приращение $\Delta_{\widetilde{x}}H(\psi,x,\widetilde{u},s,t)$ разложим по формуле Тейлора первого порядка, выделив линейную часть относительно Δx

$$\Delta_{\widetilde{x}}H(\psi,x,\widetilde{u},s,t) = \frac{\partial H(\psi,x,\widetilde{u},s,t)}{\partial x}\Delta x(s,t) + o_H(|\Delta x(s,t)|).$$

Потребуем, чтобы функция $\psi(s,t)$ являлась решением следующей сопряженной задачи

$$D^*\psi = -H_x(\psi,x,u,s,t), \quad \psi(s,t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(s,t_1),s)}{\partial x}, \tag{2.2}$$

$$\psi(s_0,t) = \psi(s_1,t) = 0.$$

Теперь, формула приращения функционала примет вид:

$$\Delta J(u) = -\iint\limits_\Pi \Delta_{\widetilde{u}}H(\psi(s,t),x(s,t),u(s,t),s,t)\,dsdt + \eta. \tag{2.3}$$

Здесь

$$\eta = \int_S o_\varphi(|\Delta x(s,t_1)|)\,ds - \iint_\Pi (o_H(|\Delta x(s,t)|) -$$
$$-\Delta_{\widetilde{u}} H_x(\psi(s,t), x(s,t), u(s,t), s, t)\Delta x(s,t))\,dsdt.$$

3. Принцип максимума

Рассмотрим игольчатую вариацию допустимого управления

$$\Delta u(s,t) = \begin{cases} v - u(s,t), & (s,t) \in \Pi_\varepsilon, \\ 0, & (s,t) \in \Pi \backslash \Pi_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\Pi_\varepsilon = (\xi - \sqrt{\varepsilon}, \xi) \times (\tau - \sqrt{\varepsilon}, \tau)$, $\xi \in (s_0, s_1]$, $\tau \in (t_0, t_1]$, числа $\varepsilon > 0$, $v \in U$.

Результаты работы [5] позволяют считать, что на игольчатой вариации для данной задачи оптимального управления будет справедлива следующая оценка

$$|\Delta x(s,t)| \sim \varepsilon.$$

Тогда остаточный член в формуле (2.3) имеет больший порядок малости, то есть

$$\eta \sim o(\varepsilon).$$

Формула приращения функционала на игольчатой вариации управления имеет вид

$$\Delta J(u) = -\int_{\xi-\sqrt{\varepsilon}}^{\xi} \int_{\tau-\sqrt{\varepsilon}}^{\tau} \Delta_{\widetilde{u}} H(\psi(s,t), x(s,t), u(s,t), s, t)\,dsdt + o(\varepsilon). \quad (3.1)$$

Для почти всех т. (ξ, τ) (т. Лебега функции $\Delta_{\widetilde{u}} H$) будет справедлива теорема о среднем. Получим

$$\Delta J(u) = -\Delta_{\widetilde{u}} H(\psi(\xi,\tau), x(\xi,\tau), u(\xi,\tau), \xi, \tau) \cdot \varepsilon + o(\varepsilon), \;\; \varepsilon > 0. \quad (3.2)$$

Из формулы (3.2) следуют теоремы

Теорема 1. *Пусть $u^*(s,t)$, $(s,t) \in \Pi$ – оптимальное управление в задаче (1.1)-(1.4), $x^*(s,t)$, $\psi^*(s,t)$ решения соответственно исходной (1.1) и сопряженной задач (2.2) при $u = u^*(s,t)$. Тогда управление $u^*(s,t)$ удовлетворяет почти всюду на Π условию максимума*

$$H(\psi^*(s,t), x^*(s,t), u^*(s,t), s, t) = \max_{u \in U} H(\psi^*(s,t), x^*(s,t), u, s, t). \quad (3.3)$$

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям задачи (1.1)—(1.4) функции f и F дифференцируемы по управлению u, а множество U – выпуклое. Тогда оптимальный процесс $\{u^*, x^*\}$ удовлетворяет линеаризованному принципу максимума:*

$$H_u(\psi^*, x^*, u^*, s, t) \cdot u^* = \max_{v \in U} H_u(\psi^*, x^*, u^*, s, t) \cdot v, \quad (s, t) \in \Pi.$$

Теорема 3. *Если в рассматриваемой задаче (1.1)–(1.4) функции f и F имеют вид*

$$f(x, u, s, t) = B(s, t)x + d(u, s, t),$$
$$F(x, u, s, t) = G(x, s, t) + g(u, s, t),$$

а функции $\varphi(x)$, $G(x, s, t)$ выпуклы, тогда поточечный принцип максимума (3.3) будет необходимым и достаточным условием оптимальности.

Аналогично результатам [6], полученные необходимые условия оптимальности носят конструктивный характер, так как позволяют построить серию методов последовательных приближений, основанных на приведенных условиях оптимальности.

Список литературы

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1965. – 474 с.
2. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск : Науч. кн., 1999. – 352 с.
3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М. : Наука, 1983. – 424 с.
4. Годунов С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. – М. : Наука, 1979. – 392 с.
5. Терлецкий В. А. Метод последовательных приближений в параболической начально-краевой задаче / В. А. Терлецкий, Е. В. Тучнолобова, Н. Ю. Ульянова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 77–83.
6. Васильев О. В. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление / О. В. Васильев, В. А. Срочко, В. А. Терлецкий. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 151 с.

V. P. Poplevko, E. A. Lutkovskaya, E. V. Tuchnolobova

Maximum principle for optimal control problem by thermal process

Abstract. An optimal control problem by thermal process is considered. Function of the right side of differential equation is non-linear and contains independent variables, control function and phase state. A classic necessary optimality condition is given for the optimal control problem.

Keywords: thermal process; optimal control; necessary optimality condition; maximum principle.

Поплевко Василиса Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)20-13-07
(vasilisa@math.isu.ru)

Лутковская Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)52-12-82
(elut@math.isu.ru)

Тучнолобова Екатерина Владимировна, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)52-12-82
(tuchnokaterina@mail.ru)

Poplevko Vasilisa, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952)20-13-07 (vasilisa@math.isu.ru)

Lutkovskaya Ekaterina, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952)52-12-82 (elut@math.isu.ru)

Tuchnolobova Ekaterina, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952)52-12-82 (tuchnokaterina@mail.ru)