Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 72—87

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 514.174.2:3

Аппроксимация многоугольников наилучшими наборами кругов *

П. Д. Лебедев
Институт математики и механики УрО РАН

Д. С. Бухаров
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Изучаются наилучшие аппроксимации многоугольников на плоскости наборами кругов. Основным компонентом их построения являются наилучшие сети, обобщение понятия чебышёвского центра и оптико-геометрический подход.

Ключевые слова: чебышёвский центр; наилучшая сеть; хаусдорфово отклонение; вычислительная геометрия.

Введение

В теории управления [11] часто требуется провести аппроксимацию множеств со сложной геометрией более удобными в работе фигурами [19, 20]. Одним из самых простых и одновременно информативных способов подмена плоского множества набором из конечного числа кругов равного радиуса [14]. Схожие задачи об аппроксимации множеств эллипсами рассматривались в работах А.Б. Куржанского и его учеников [21, 9]. Вопросы существования и единственности оптимальных покрытий множеств шарами в различных пространствах, в том числе и в $\mathbb{R}^2$, были изучены А.Л. Гаркави [3, 4, 5, 7, 6] и Е.Н. Сосовым [16, 17, 18].

В настоящей работе предлагаются методы построения набора кругов на плоскости, которые наилучшим образом в некотором смысле ап-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ: гранты 13–01–96055–р_урал_а, 12–07–13116_ОФИ_м_РЖД, 12–07–33045_мол_а_вед, 11–07–00245_а, 12–07–31080_мол_а, и проекта 12–С–1–1017/3 «Качественная теория и численные методы для задач динамики, управления и оптимизации», гранта президента РФ по поддержке ведущей научной школы №НШ–5927.2012.1, проекта молодых ученых и аспирантов УрО РАН «Оптимальные конструкции и аппроксимации в динамических игровых задачах»

проксимируют многоугольники. Важным практическим приложением данного исследования является решение задачи о наилучшем размещении логистических центров, и сегментации логистических зон обслуживания [10, 12]: размещение почтовых отделений на территории населенного пункта; размещение магазинов, предоставляющих товары первой необходимости; планирование мест размещения пунктов утилизации бытовых отходов; размещение центров захоронения радиоактивных (или токсичных) отходов; размещение спасательных пунктов (или пунктов скорой медицинской помощи) в местах, из которых обслуживание прилегающей территории производилось бы за время не превышающее минимально возможное.

С целью автоматизации решения подобных задач разработан модуль программного комплекса «ВИГОЛТ» [2], который применялся, например, при решении следующих задач: идентификация и сегментация зон утилизации старых автомобилей — определение границ зон утилизации, обслуживаемых определенным приемным пунктом; определение наилучшего места расположения социальных логистических объектов [12], к которым относятся аптечные пункты, школы, отделения банков, магазины и т.п.

1. Чебышёвский центр множества

Введем следующее определения.

Определение 1. *Чебышёвским центром ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется такая точка $\mathbf{c}(M)$, что*

$$\sup_{\mathbf{x}\in M} \|\mathbf{x}-\mathbf{c}(M)\| = \sup_{\mathbf{x}\in M}\inf_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|. \tag{1.1}$$

Здесь и далее норма вектора $\mathbf{x} = (x, y)$ понимается в евклидовой метрике $\|\mathbf{x}\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, расстояние между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ считается равным $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. В [4, 5] показано, что при этом чебышёвский центр всегда существует и единствен.

Определение 2. *Чебышёвским радиусом $R(M)$ компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется величина* (1.1).

Определение 3. *Хаусдорфовым отклонением множества A от множества B называется число*

$$h(A,B) = \sup_{\mathbf{x}\in A}\inf_{\mathbf{y}\in B} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

Чебышёвский центр множества является той точкой на плоскости, хаусдорфово отклонение $h(M, \{\mathbf{x}\})$ от которой множества M минимально. Для любого компактного множества он существует и является единственным [3].

Определение 4. *В пространстве* $\mathbb{R}^2$ n*-сетью называется непустое множество, состоящее не более чем из* n *точек в* $\mathbb{R}^2$ (*см.* [17, с. 14]).

Обозначим через Σ_n множество всех n-сетей пространства $\mathbb{R}^2$.

Определение 5. *Наилучшей* n*-сетью* [5, 16] *компактного множества* $M \subset \mathbb{R}^2$ *называется такая сеть* S^*, *для которой выполняется*

$$h(M, S^*) = \inf_{S \in \Sigma_n} h(M, S). \tag{1.2}$$

Задача 1. Пусть задано ограниченное замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей. Рассматриваются наборы кругов $O(\mathbf{x}_1, r)$, $O(\mathbf{x}_2, r), \ldots, O(\mathbf{x}_n, r)$ одинакового радиуса r с центрами в точках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ соответственно (будем обозначать далее такие наборы через X). Требуется найти такой набор кругов $\Xi(X, r) = \bigcup\limits_{i=\overline{1,n}} O(\mathbf{x}_i, r)$, который при наименьшем r удовлетворяет включению

$$M \subseteq \Xi(X, r).$$

Набор кругов Ξ, отвечающий условиям задачи 1 будем называть наилучшим для множества M при заданном n. В дальнейшем полагаем, что в задаче 1 целевое множество есть многоугольник с вершинами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Вообще под многоугольником понимаем замкнутое односвязное множество на плоскости, граница которого состоит из конечного числа отрезков. В работах [3, 4] показано, что наилучшая сеть в евклидовом пространстве существует для любого компактного множества, но не всегда единственна.

Соответственно в общем случае решение задачи 1 сводится к построению наилучшей n-сети S многоугольника M с границей $\partial M = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \cup [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \cup \ldots \cup [\mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_m] \cup [\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_1]$. Точки $\mathbf{x}_i \in S$ совпадают с центрами кругов из набора Ξ, а их радиус r равен хаусдорфовому отклонению множества M от S. В случае если наилучшая n-сеть содержит менее чем $n^* < n$ точек, то положение $(n - n^*)$ кругов может быть произвольным. Мы ограничимся рассмотрением задачи 1 при n равном двум и трём. Заметим, что её решение при $n = 1$ сводится к нахождению чебышёвского центра и чебышёвского радиуса множества.

Задача 1 имеет важное практическое применение. Пусть для заданной области $M \subset \mathbb{R}^2$ требуется найти оптимальное расположение n логистических центров. А именно расположение, при котором потребитель, находящийся в любой точке множества M, мог бы проехав минимально возможное расстояние, оказаться в ближайшем из них. Тогда точки $\mathbf{x}_i \in X$, $i = \overline{1, n}$ являются местами оптимального расположения логистических центров. Зоной обслуживания i-го центра (т.е. той частью области M, из которой ближе всего добираться именно до него) является $O(\mathbf{x}_i, r) \cap M$.

2. Аналитические выражения для наилучших сетей

Рассмотрим сначала самые простые многоугольники, т.е. треугольники.

Если M — остроугольный треугольник, то $\mathbf{c}(M)$ есть центр описанной вокруг него окружности. Чебышёвский центр тупоугольного треугольника совпадает с серединой наибольшей из его сторон. Если треугольник прямоугольный, то центр описанной вокруг него окружности совпадает с серединой его гипотенузы. Подробнее об отыскании чебышёвского центра для многоугольников см. в [14].

Для дальнейших рассуждений приведем одну оценку для наилучших n-сетей множества.

Лемма 1. *Пусть множество M содержит $n+1$ точек $\mathbf{v}_i, i = \overline{1, n+1}$, таких, что расстояние между любыми двумя из них не меньше R:*

$$\forall i = \overline{1, n+1}, \forall j = \overline{1, n+1}\ (i \neq j) \Rightarrow (\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\| \geqslant R). \tag{2.1}$$

Тогда для хаусдорфова отклонения M от любой n-сети S выполняется оценка

$$h(M, S) \geqslant R/2. \tag{2.2}$$

Доказательство. Допустим (2.2) не выполняется. найдётся n-сеть S^*, для которой $h(M, S^*) = r < R/2$. Поскольку точки $\mathbf{v}_i, i = \overline{1, n+1}$ лежат в M, то для каждой из них найдётся точка $\mathbf{x}_j^* \in S$, такая что $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}_j^*\| \leqslant r$. Из (2.1) следует, что одна точка не может находиться от двух различных элементов из набора $\mathbf{v}_{i=1}^{n+1}$ на расстоянии, не превышающем $r < R/2$. Следовательно сеть S^* должна содержать минимум $n+1$ точек (каждая из которых лежит в круге $O(\mathbf{v}_i, r)$, $i = \overline{1, n+1}$). Получилось противоречие. $\square$

Из леммы 1 следует простой критерий определения наилучшей сети. Пусть для множества M найдены $n+1$ точек, для которых выполняется оценка (2.2). Если для некоторой n-сети S имеет место

$$h(M, S) \leqslant R/2, \tag{2.3}$$

то эта сеть является наилучшей для M.

В общем случае задача о построении наилучшей n-сети даже при $n = 2$ решается только численно. Однако для одного класса треугольников можно указать аналитическое решение.

Теорема 1. *Пусть M — треугольник с вершинами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и длинами сторон $A_1 = \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|, A_2 = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|, A_3 = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|$. Если выполняется оценки*

$$A_1^2 \geqslant A_2^2 + A_3^2 \tag{2.4}$$

и

$$A_2 \geqslant A_3, \tag{2.5}$$

то

$$S = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^2 = \{(\mathbf{g} + \mathbf{a}_i)/2\}_{i=1}^2 \tag{2.6}$$

является наилучшей 2-сетью для M. Здесь $\mathbf{g}$ — пересечение прямой, содержащей отрезок $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$, со срединным перпендикуляром Ξ к отрезку $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$.

Доказательство. Заметим, что условие (2.4) означает, что треугольник тупоугольный либо прямоугольный, и угол при вершине $\mathbf{a}_1$ не меньше $\pi/2$. Условие (2.5) означает, что сторона $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$ не меньше, чем $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$, а следовательно срединный перпендикуляр Λ к отрезку $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ пересекает сторону $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$ в некоторой точке $\mathbf{g}$ (см. рис. 1). В случае равенства сторон A_1 и A_2 точка $\mathbf{g}$ совпадает с A_3.

Рассмотрим треугольник $\triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{g} \mathbf{a}_2$. Поскольку точка $\mathbf{g}$ лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$, то две его стороны, прилегающие к ней, равны. Обозначим $R = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{g}\| = \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{g}\|$.

Покажем, что отклонение множества M от любой 2-сети S^* не может быть меньше $R/2$. Для этого воспользуемся леммой 1. Расстояние между вершинами $\mathbf{a}_i, i = 1, 2$ треугольника M и точкой $\mathbf{g}$ не меньше R. Действительно, по построение в треугольнике $\triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{g} \mathbf{a}_2$ две стороны равны R, а третья, $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$, лежит против тупого (или прямого) угла, а значит не меньше их. Значит их можно взять в качестве точек $\{\mathbf{v}_i\}$ в условии (2.1). Поэтому для любой 2-сети S^* выполняется неравенство (2.2).

Следовательно для того чтобы доказать, что 2-сеть S, заданная выражением (2.6) является наилучшей, достаточно показать, что выполняется оценка (2.3).

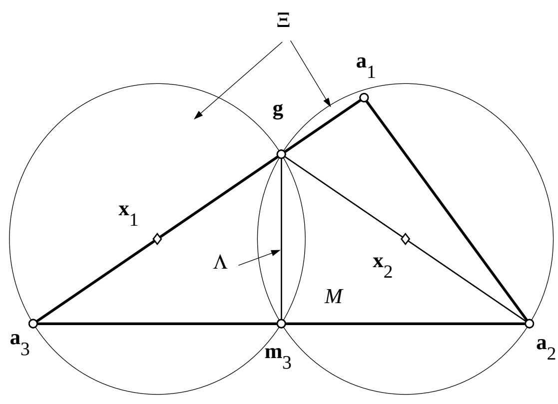

Рис. 1

Действительно, можно представить M в виде объединения трёх треугольников

$$M = \triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{g} \mathbf{m}_3 \cup \triangle \mathbf{a}_2 \mathbf{g} \mathbf{m}_3 \cup \triangle \mathbf{a}_2 \mathbf{g} \mathbf{a}_3, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{m}_3$ — середина стороны $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Треугольники $\triangle \mathbf{a}_1\mathbf{g}\mathbf{m}_3$ и $\triangle \mathbf{a}_2\mathbf{g}\mathbf{m}_3$ по построению является прямоугольными с длиной гипотенузы равной R. Точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ лежат на серединах гипотенуз, а значит совпадают с чебышёвскими центрам треугольников. Поэтому выполняются вложения

$$\triangle \mathbf{a}_1\mathbf{g}\mathbf{m}_3 \subset O(\mathbf{x}_1, R/2), \ \triangle \mathbf{a}_2\mathbf{g}\mathbf{m}_3 \subset O(\mathbf{x}_2, R/2). \tag{2.8}$$

Если $A_2 > A_3$, то треугольник $\triangle \mathbf{a}_2\mathbf{g}\mathbf{a}_3$ является либо тупоугольным, либо прямоугольным, при это его наибольшая сторона совпадает с отрезком $[\mathbf{g}, \mathbf{a}_2]$, равным по длине R. Если $A_2 = A_3$, то точки $\mathbf{g}$ и $\mathbf{a}_2$ совпадают, и треугольник вырождается в отрезок $[\mathbf{g}, \mathbf{a}_2]$. В обоих случаях точка $\mathbf{x}_2$ является чебышёвским центром и для $\triangle \mathbf{a}_2\mathbf{g}\mathbf{a}_3$, а значит

$$h(\triangle \mathbf{a}_2\mathbf{g}\mathbf{a}_3, \{\mathbf{x}_2\}) = R/2. \tag{2.9}$$

Из представления (2.7) и вложений (2.8) и равенства (2.9) следует, что для расположения треугольника M и сети S имеет место соотношение

$$M \subset O(\mathbf{x}_1, R/2) \cup O(\mathbf{x}_2, R/2) = S + O(\mathbf{0}, R/2).$$

Из него следует оценка (2.3). Значит 2-сеть, заданная в (2.6), — наилучшая для M (при этом $h(M, S) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{g}\|/2$, $i = 1, 2$). $\square$

Замечание. Под условие теоремы 1 попадает любой тупоугольный или прямоугольный треугольник. Для этого достаточно вершину, лежащую против наибольшей стороны обозначить $\mathbf{a}_1$, а против второй по длине — $\mathbf{a}_2$.

Задачу о построении наилучшей 3-сети треугольника естественно попытаться свести к более простой задаче о построении его чебышёвского центра. В некоторых случаях это возможно

Теорема 2. *Пусть M — треугольник с вершинами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и углами при них $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Если выполняется оценки*

$$\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \geqslant \pi/6 \tag{2.10}$$

и

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \leqslant \pi/2, \tag{2.11}$$

то

$$S = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^3 = \{(\mathbf{a}_i + \mathbf{c})/2\}_{i=1}^3, \tag{2.12}$$

где $\mathbf{c}$ — центр описанной вокруг треугольника окружности, является наилучшей 3-сетью для множества M.

Доказательство. Покажем, что отклонение множества M от любой 3-сети S^* не может быть меньше $R/2$, где R — радиус описанной вокруг M окружности. Для этого воспользуемся, как и при доказательстве предыдущей теоремы, леммой 1. Из условия (2.11) следует что треугольник M остроугольный (либо прямоугольный), а значит точка $\mathbf{c}$ принадлежит самому треугольнику (см. рис. 2). При этом

$$\|\mathbf{a}_i - \mathbf{c}\| = R, \ i = \overline{1,3}. \tag{2.13}$$

Из неравенств (2.10), (2.11) и того факта, что функция $\sin\alpha$ монотонно возрастает на отрезке $[0, \pi/2]$ следует, что для синусов углов выполняется оценка

$$\sin\alpha_i \in [\sin(\pi/6), \sin(\pi/2)] = [0.5, 1], \ i = \overline{1,3}. \tag{2.14}$$

Исходя из теоремы синусов для длин сторон треугольника выполняются равенства

$$A_i = 2R\sin\alpha_i, \ i = \overline{1,3}. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) вытекают оценки

$$A_i \geqslant R, \ i = \overline{1,3}. \tag{2.16}$$

Равенства (2.13) и неравенства (2.15) означают, что набор $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{c}\}$ можно взять в качестве точек $\{\mathbf{v}_i\}$ в условии (2.1). Поэтому для любой 3-сети S^* выполняется неравенство (2.2).

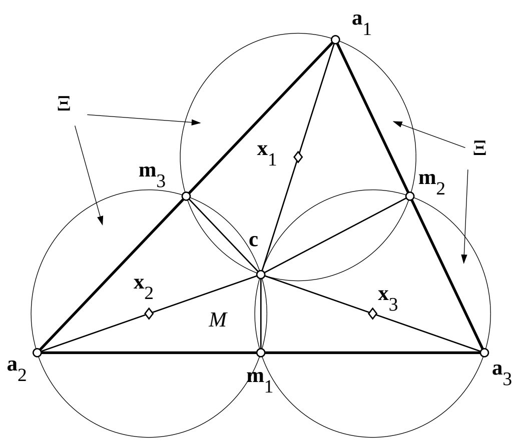

Рис. 2

Покажем, что выполняется оценка (2.3) для 3-сети (2.12).

Поскольку центр описанной окружности принадлежит треугольнику M, то его можно представить в виде объединения шести прямоугольных треугольников

$$M = \triangle\mathbf{a}_1\mathbf{c}\mathbf{m}_2 \cup \triangle\mathbf{a}_1\mathbf{c}\mathbf{m}_3 \cup \triangle\mathbf{a}_2\mathbf{c}\mathbf{m}_1 \cup \triangle\mathbf{a}_2\mathbf{c}\mathbf{m}_3 \cup \triangle\mathbf{a}_3\mathbf{c}\mathbf{m}_1 \cup \triangle\mathbf{a}_3\mathbf{c}\mathbf{m}_2. \tag{2.17}$$

Точка $\mathbf{x}_1$ является серединой гипотенузы $\mathbf{x}_1\mathbf{c}$ треугольников $\triangle\mathbf{a}_1\mathbf{c}\mathbf{m}_2$ и $\triangle\mathbf{a}_1\mathbf{c}\mathbf{m}_3$. Поэтому она является центром окружности, описанной вокруг этих треугольников. Поскольку длина гипотенузы $[\mathbf{x}_1, \mathbf{c}]$ равна

$|\mathbf{x}_1\mathbf{c}| = R$, радиус описанной окружности равен $R/2$, а значит выполняются вложения

$$\triangle \mathbf{a}_1\mathbf{c}\mathbf{m}_2 \subset O(\mathbf{x}_1, R/2),\ \triangle \mathbf{a}_1\mathbf{c}\mathbf{m}_3 \subset O(\mathbf{x}_1, R/2). \qquad (2.18)$$

Аналогичные рассуждения для точки $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$ показывают, что имеет место

$$\triangle \mathbf{a}_2\mathbf{c}\mathbf{m}_3 \subset O(\mathbf{x}_2, R/2),\ \triangle \mathbf{a}_2\mathbf{c}\mathbf{m}_3 \subset O(\mathbf{x}_2, R/2), \qquad (2.19)$$

$$\triangle \mathbf{a}_3\mathbf{c}\mathbf{m}_1 \subset O(\mathbf{x}_3, R/2),\ \triangle \mathbf{a}_3\mathbf{c}\mathbf{m}_2 \subset O(\mathbf{x}_3, R/2). \qquad (2.20)$$

соответственно.

Из (2.17)–(2.20) следует, что для расположения треугольника M и сети S имеет место соотношение

$$M \subset O(\mathbf{x}_1, R/2) \cup O(\mathbf{x}_2, R/2) \cup O(\mathbf{x}_3, R/2) = S + O(\mathbf{0}, R/2).$$

Из него в свою очередь следует оценка (2.3). Следовательно сеть , заданная в (2.12) является наилучшей. При этом $h(M,S) = \|\mathbf{c} - \mathbf{a}_i\|/2$, $i = \overline{1,3}$. □

С помощью теоремы 2 можно строить наилучшие 3-сети для ряда широко встречающихся в различных геометрических задачах треугольников. Под её условия подходит правильный треугольник и египетский треугольник (со сторонами равными $5r$, $4r$, $3r$, $r \in [0, +\infty)$). Углы при вершинах последнего равны $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 \approx 0.927$, $\alpha_3 \approx 0.644$, и все лежат на отрезке $[\pi/6, \pi/2]$.

3. Численные алгоритмы построения наилучших сетей

В общем случае задачу о построении наилучшей n-сети нельзя решить аналитически. Её можно свести к более простой задаче о разбиении множества M на подмножества [8, 1] и отыскании их чебышёвских центров. В случае небольших n данный метод оптимален с точки зрения вычислительных операций.

Лемма 2. *Пусть хаусдорфово отклонение множества M от его наилучшей n-сети равно r. Тогда найдутся такие m множеств M_i, $i = \overline{1,m}$, $m \leqslant n$, что*

$$M = \bigcup_{i=\overline{1,m}} M_i, \qquad (3.1)$$

и сеть

$$S = \{\mathbf{c}(M_i)\}_{i=1}^{m}, \qquad (3.2)$$

состоящая из их чебышёвских центров, является наилучшей n-сетью для множества M.

Доказательство. Рассмотрим некоторую наилучшую n-сеть $S^* = \{\mathbf{x}_i^*\}_{i=1}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ множества M. Обозначим

$$P_i = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\colon \forall j = \overline{1,k}\ (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^*\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^*\|)\right\}$$

множество точек плоскости, которые лежат от точки $\mathbf{x}_i^*$ не дальше, чем от других точек сети S^*. Далее обозначим через I множество тех номеров i, для которых

$$P_i \cap M \neq \varnothing.$$

Покажем, что имеет место вложение

$$M \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i. \tag{3.3}$$

Действительно, рассмотрим произвольную точку $\mathbf{m} \in M$. К ней среди точек сети S^* найдётся минимум одна ближайшая $\mathbf{x}_l$. Следовательно $\mathbf{m} \in P_l$, а значит $P_l \cap M \neq \varnothing$ и $l \in I$. Поскольку любая точка $\mathbf{m} \in M$ лежит в $\bigcup\limits_{i\in I} P_i$, то выполняется вложение (3.3).

Пусть через m число номеров в I, через $I(i)$. Обозначим

$$M_i = P_j \cap M, j = I(i), i = \overline{1,m}.$$

Набор $\{M_i\}_{i=1}^m$ в силу (3.3) удовлетворяет условию (3.1). Из построения множества M_i и наилучшей сети S^* видно, что найдётся точка $\mathbf{x}_l^* \in S^*$, для которой

$$h(M_i, \{\mathbf{x}_l^*\}) \leqslant r.$$

Из определения чебышёвского центра $\mathbf{c}(M_i)$ следует, что хаусдорфово отклонение M_i от него не больше, чем от любой точки на плоскости, в том числе и $\mathbf{x}_l^*$:

$$h(M_i, \{\mathbf{c}(M_i)\}) \leqslant r. \tag{3.4}$$

Получаем оценку из вложения (3.3) и неравенства (3.4).

$$h(M_i, \{S\}) \leqslant \max_{i=\overline{1,m}} h(M_i, \{\mathbf{c}(M_i)\}) \leqslant r. \tag{3.5}$$

Выражение (3.3) означает, что для набора множеств $\{M_i\}_{i=1}^m$ выполняется условие (3.1). А оценка хаусдорфова отклонения (3.5) доказывает, что сеть S, заданная выражением (3.2), является наилучшей n-сетью для множества M. $\square$

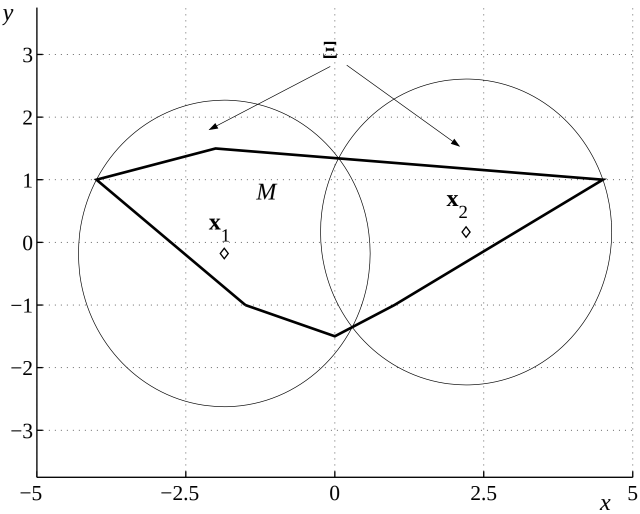

Рис. 3

4. Примеры решения задачи 1

На базе методов, описанных в пункте §3, разработаны численные методы построения наилучших n-сетей S при $n = 2$ и $n = 3$. Первоначальные оценки сетей получается при переборе составляющих многоугольники треугольников с использованием теорем 1 и 2. Строится решение задачи 1 в набора кругов Ξ, центры которых с точками сети S.

Пример 1. Задан выпуклый шестиугольник M с вершинами:

$$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{6} = \{(-1.5, -1), (0, -1.5), (1, -1), (4.5, 1), (-2, 1.5), (-4, 1)\}. \quad (4.1)$$

Требуется построить для M решение задачи 1 при $n = 2$.

Решение задачи сводится к нахождению наилучшей 2-сети $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ множества M и его хаусдорфова отклонения от S. Построенный численными методами результат: $\mathbf{x}_1 \approx (-1.857, -0.178)$, $\mathbf{x}_2 \approx (2.202, 0.163)$, $r = h(M, S) \approx 2.45$. Множество M, система кругов $\Xi = O(\mathbf{x}_1, r) \cup O(\mathbf{x}_2, r)$ и наилучшая 2-сеть $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ показаны на рис. 3.

Пример 2. Пусть в задаче 1 множество M — выпуклый шестиугольник с набором вершин (4.1), количество кругов задано $n = 3$.

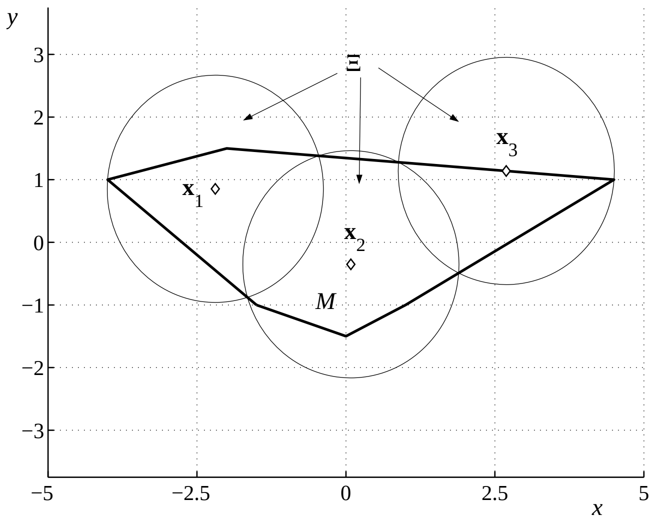

Рис. 4

Наилучшая 3-сети M, построенная численными методами, состоит из точек: $\mathbf{x}_1 \approx (-2.192, 0.854)$, $\mathbf{x}_2 \approx (0.084, -0.351)$, $\mathbf{x}_3 \approx (2.691, 1.139)$, $r = h(M, S) \approx 1.81$. Множество M, система кругов $\Xi = O(\mathbf{x}_1, r) \cup O(\mathbf{x}_2, r) \cup O(\mathbf{x}_3, r)$ и наилучшая 3-сеть $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ показаны на рис. 4.

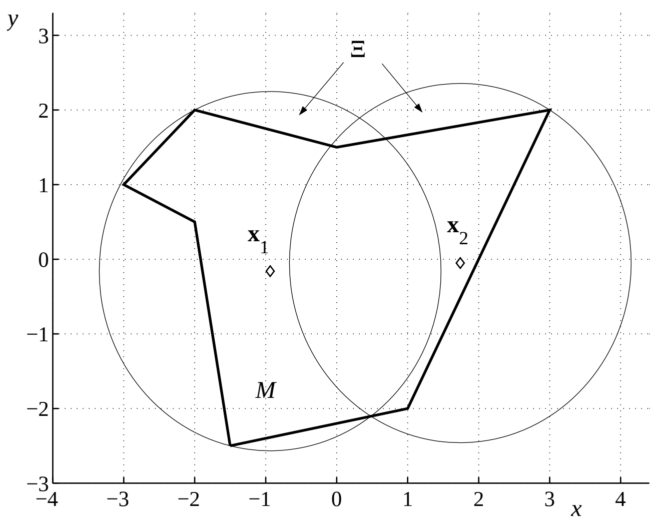

Рис. 5

Пример 3. Задан невыпуклый семиугольник M с вершинами:

$$\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{7} = \{(-1.5, -2.5), (1, -2), (3, 2), (0, 1.5), (-2, 2), (-3, 1), (-2, 0.5)\}. \tag{4.2}$$

Требуется для M найти решение задачи 1 при $n = 2$.

Решение задачи сводится к нахождению наилучшей 2-сети $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ множества M и хаусдорфова отклонения M от S. Построенный численными методами результат: $\mathbf{x}_1 \approx (-0.937, -0.16)$, $\mathbf{x}_2 \approx (1.741, -0.052)$, $r = h(M, S) \approx 2.41$. Множество M, система кругов $\Xi = O(\mathbf{x}_1, r) \cup O(\mathbf{x}_2, r)$ и наилучшая 2-сеть $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ показаны на рис. 5.

Пример 4. Пусть в задаче 1 множество M — выпуклый шестиугольник с набором вершин (4.1), количество кругов задано $n = 3$.

Наилучшая 3-сети M, построенная численными методами, состоит из точек: $\mathbf{x}_1 \approx (-1.38, 0.356)$, $\mathbf{x}_2 \approx (1.6, 0.937)$, $\mathbf{x}_3 \approx (0.045, -1.66)$, $r = h(M, S) \approx 1.76$. Множество M, система кругов $\Xi = O(\mathbf{x}_1, r) \cup O(\mathbf{x}_2, r) \cup O(\mathbf{x}_3, r)$ и наилучшая 3-сеть $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ показаны на рис 6.

Как видно из примеров расположение кругов из набора $\Xi(X, r)$, содержащего три элемента может быть существенно различным. Для шестиугольника с набором вершин (4.1) двое кругов не имеет общих точек между собой (но пересекаются с третьим). Для шестиугольника с набором вершин (4.2) все три круга имеют общее множество.

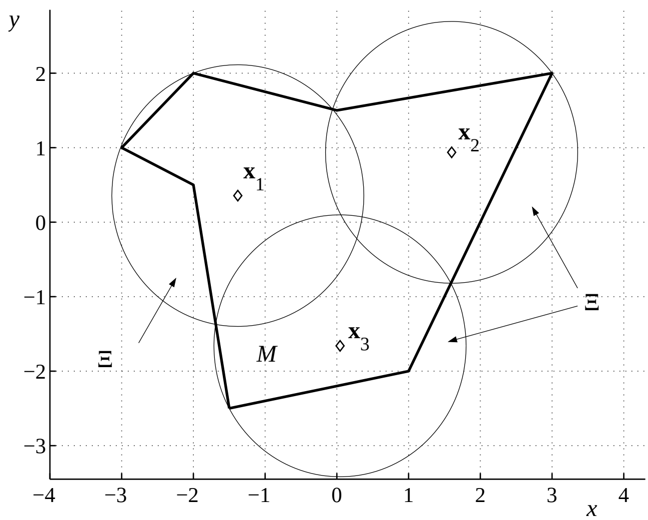

Рис. 6

5. О наилучшей сегментации на основе оптико-геометрического подхода

Как отмечалось ранее, важным практическим приложением настоящего исследования является решение задачи о наилучшем размещении логистических центров и сегментации логистических зон обслуживания. Существуют различные подходы к исследованию задач сегментирования, рассмотрение которых возможно как в виде задачи 1, так и в нижепредставленной постановке.

Задача 2. Пусть задана ограниченная область $M \subseteq \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей, заданы функция среды $f(x,y)$, определяющая мгновенную скорость «света» $c(x,y) = 1/f(x,y)$ в точке $(x,y) \in M$, и m объектов $A_k(x_k,y_k)$, $k = \overline{1,m}$, расположение которых заранее неизвестно. Требуется найти такое расположение объектов A_k, сегментировав область M на m зон, чтобы суммарное время достижения каждой точки области M «световыми» волнами было минимально возможным.

Известным способом определяется минимальное время перемещения из точки $K(x,y) \in M$ в точку A_k

$$T_{KA_k} = \min_{\Gamma_k} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{d\Gamma_k}{f(x,y)}. \tag{5.1}$$

Требуется найти оптимальные расположения объектов (x_k^*, y_k^*), $k = \overline{1,m}$, и такое разбиение области M на m сегментов, чтобы достигался минимум целевой функции

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{M_k} T_{KA_k} dK \to \min_{A_k \in M_k}. \tag{5.2}$$

В основу алгоритма решения вышеописанной задачи (5.1) – (5.2) положена оптико-геометрическая аналогия, основанная на фундаментальных вариационных принципах механики, идея которой заключается в следующем: на исследуемой ограниченной области $M \subset \mathbb{R}^2$ задаются места расположения двух точек.

Одна из них определяется как источник «света» и из нее производится распространение световой волны, т.е. строятся фронты волны через некоторые промежутки времени Δt. Каждая точка $(x,y) \in M$, достигнутая фронтом волны, принимается за вторичный источник света, что соответствует принципу Гюйгенса. Построение фронтов продолжается до тех пор, пока не будет достигнута вторая заданная точка.

Так как для каждой точки известно время ее достижения из источника света (исходного или вторичного), то можно, двигаясь в обратном направлении по времени, восстановить кривую, которая согласно принципу Ферма является оптимальным по времени передвижения маршрутом (что на плоскости соответствует прямой линии). Поскольку область M ограниченная, то за конечное число итераций будет либо найдено решение, либо показано, что решения нет (область M «заполнена» фронтами волны, но заданная конечная точка не достигнута).

Для решения задачи о наилучшем размещении логистических центров и сегментации логистических зон обслуживания используется алгоритм, идея которого заключается в следующем:

1. Генерация начального расположения. Определяются начальные координаты объектов A_k ($k = \overline{1,m}$) методом случайной генерации положений, так чтобы $A_k \in M$.

2. Сегментация области. Производится разбиение области M на m сегментов, например методом, представленным в работе [10], или строим диаграмму Вороного [15]. Для каждого сегмента $M_k \in M$ ($k = \overline{1,m}$) определяется граница.

3. Переопределение координат центров. Определяется новое расположение объектов A_k относительно выделенных сегментов M_k ($k = \overline{1,m}$). Производится конструирование фронтов волны с границы сегментов M_k внутрь области и определяется точка, в которой суммарное время ее достижения минимально. Данная точка и определяет новое расположение центра A_k. Если координаты A_k изменяются, то переходим к сегментации. В противном случае определяется процесс сегментирования завершен.

Если значение функции среды $f(x, y) = \mathrm{const}$, то вышеописанный алгоритм позволяет построить решение задачи о наилучшем размещении заданного количества непересекающихся равных кругов с максимально возможным радиусом (задача об упаковке, рис. 7).

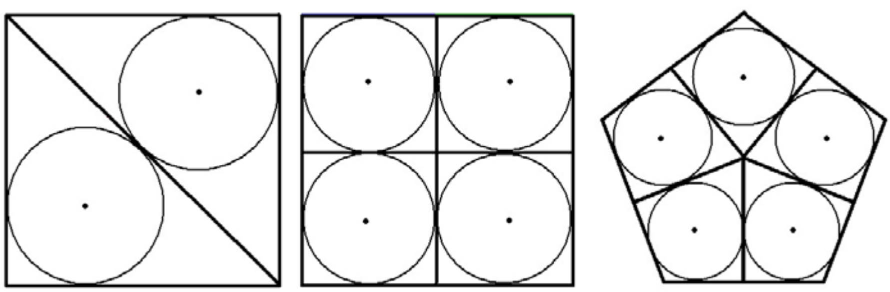

Рис. 7

Представленный выше метод носит универсальный характер, так как позволяет решать задачу, когда область M является невыпуклой, что существенно затрудняет процесс сегментации и определения расположения логистических объектов.

Использование многократной генерации необходимо для выявления глобального минимума в задаче (5.1) – (5.2), без применения которой, как правило, возможно нахождение только локального минимума, при этом вписанные круги будут иметь меньший радиус, чем при оптимальной конфигурации.

Список литературы

1. Болтянский В. Г. Разбиение фигур на меньшие части / В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. – М. : Наука, 1971. – 88 с. – (Популярные лекции по математике ; вып. 50).
2. Бухаров Д. С. Программная система «ВИГОЛТ» для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / Д. С. Бухаров, А. Л. Казаков // Вычисл. методы и программирование. – 2012. – Разд. 2. – С. 65—74.
3. Гаркави А. Л. О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве / А. Л. Гаркави // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 2. – С. 210–211.
4. Гаркави А. Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве / А. Л. Гаркави // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – Т. 26, №1. – С. 87–106.
5. Гаркави А. Л. О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества / А. Л. Гаркави // Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19, вып. 6. – С. 139–145.
6. Гаркави А. Л. О методе циклического спуска в задаче наилучшего приближения / А. Л. Гаркави // Мат. заметки. – 1980. – Т. 27, №4. – С. 549—558.
7. Гаркави А. Л. Об условном чебышёвском центре компактного множества непрерывных функций / А. Л. Гаркави // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 4. – С. 469–478.
8. Гервер М. Л. О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры // М. Л. Гервер // Математическое просвещение. Сер. 3. – 1999. – Вып. 3. – С. 168–183.
9. Гусев М. И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрёстными связями / М. И.Гусев // Тр. ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 82–94.
10. Казаков А. Л. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 50–57.
11. Красовский Н. Н. Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский , А. И. Субботин. – М. : Наука, 1974. – 456 с.
12. Лемперт А. А. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов / А. А. Лемперт, А. Л. Казаков, Д. С. Бухаров // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 41. – С. 270–284.
13. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. – М. : Наука, 1985. – 335 с.
14. Лебедев П. Д. Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов / П. Д. Лебедев В. Н. Ушаков // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 3. – С. 79–90.
15. Препарата Ф. Вычислительная геометрия / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М. : Мир, 1989. – 478 с.
16. Сосов Е. Н. Об аппроксимативных свойствах множеств в специальном метрическом пространстве / Е. Н. Сосов // Изв. вузов. Математика. – 1999. – №6. – С. 81–84.
17. Сосов Е. Н. Введение в метрическую геометрию. Ч. 2 : учеб. пособие / Е. Н. Сосов. – Казань : Казан. гос. ун-т, 2008. – 29 с.
18. Сосов Е. Н. Метрическое пространство всех N-сетей геодезического пространства / Е. Н. Сосов // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 15, вып. 4. – С. 136–149.

19. Ушаков В. Н. Об одном дополнении к свойству стабильности в дифференциальных играх / В. Н. Ушаков, А. А. Успенский // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова. – 2010. – Т. 271. – С. 299–318.
20. Ушаков В. Н. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент / В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, П. Д. Лебедев // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика, механика, компьютер. науки. – 2010. – Вып. 3. – С. 87–103.
21. Kurzhanski A. B. Ellipsoidal calculus for estimation and control / A. B. Kurzhanski, I. Valyi. – Boston : Birkhauser, 1997. – 220 p.

P. D. Lebedev, D. S. Bukharov

Approximation of polygons with the best set of circles

Abstract. The best approximations of flat polygons with circles are considered. The main component of their construction is the best net. It is the generalized case of the Chebyshev center. About the best segmentation based on the optics-geometrical approach.

Keywords: Chebyshev center; best net; Hausdorff distance; computational geometry.

Лебедев Павел Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, тел.: (343)3753438 (`pleb@yandex.ru`).

Бухаров Дмитрий Сергеевич, программист, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134, тел.: (3952)453030, (`bukharovds@gmail.com`).

Lebedev Pavel, Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16, S.Kovalevskaja st., Ekaterinburg, 620219, researcher, Phone: (343)3753438 (`pleb@yandex.ru`).

Bukharov Dmitry, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, Phone: (3952)453030, programmer, (`bukharovds@gmail.com`).