Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 2—24

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.95

Критерий универсальной разложимости замкнутых классов булевых функций *

Я. В. Акулов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. В работе рассматривается задача о реализации булевых функций формулами специального вида. Вводится понятие пополнения систем булевых функций. Получен критерий разложимости пополнений в пересечение более простых пополнений.

Ключевые слова: булева функция; формула; суперпозиция.

1. Введение

Э. Пост [21] получил описание семейства замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов функций двузначной логики и показал, что мощность этого семейства является счетной (см. также [19, 14, 7, 8, 15]). Многие результаты, имеющие место для двузначной логики, выполняются также и для многозначных логик. Между тем имеют место и существенные различия. Одно из таких различий состоит в том, что множество всех замкнутых классов функций k-значной логики при $k \geq 3$ имеет континуальную мощность [20]. В связи с этим в ряде работ стали рассматриваться другие операции, являющиеся расширением операции суперпозиции (см., например [5, 2, 11, 10, 9, 6, 12, 13]). Обзор результатов, полученных в этом направлении, приведен в [13]. Данная работа относится к этому направлению исследований.

В работе вводится понятие инвариантного класса — множества булевых функций, содержащего все селекторные функции и замкнутого относительно операций введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Для заданной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ и заданного инвариатного класса F вводится

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-00508.

понятие операции расширенной суперпозиции над системой $\mathfrak{A}$ относительно класса F, отличающееся от операции суперпозиции над системой $\mathfrak{A}$ тем, что в качестве тривиальных формул используются не символы переменных, а функции из F. Вводится понятие пополнения системы $\mathfrak{A}$ относительно класса F как множества всех булевых функций, реализуемых формулами расширенной суперпозиции над системой $\mathfrak{A}$ относительно класса F (обозначение $[\mathfrak{A}]_F$).

Как будет показано ниже, для любой системы $\mathfrak{A}$ булевых функций и любого инвариантного класса F выполнено равенство $[\mathfrak{A}]_F = [A]_F$, где $A = [\mathfrak{A}]$. Поэтому изучение свойств семейства пополнений множеств булевых функций относительно класса F сводится к исследованию семейства пополнений замкнутых классов. Такое исследование сопряжено с разбором большого числа случаев. В работе показывается, что изучение свойств семейства пополнений замкнутых классов сводится к изучению свойств некоторого подсемейства этого семейства.

Пусть A — замкнутый класс булевых функций. Будем называть A *разложимым*, если существуют такие отличные от A замкнутые классы $B_1, \ldots, B_k$, $k \geq 2$, что $A = B_1 \cap \ldots \cap B_k$. Будем называть A *универсально разложимым*, если существуют такие отличные от A замкнутые классы $C_1, \ldots, C_m$, $m \geq 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение $[A]_F = [C_1]_F \cap \ldots \cap [C_m]_F$.

Следующая теорема, доказательству которой посвящена данная работа, дает представление о множестве универсально разложимых классов.

Теорема. *Произвольный замкнутый класс булевых функций, отличный от класса*[1] MU, *универсально разложим тогда и только тогда, когда он разложим. Класс* MU *является разложимым, но не является универсально разложимым.*

В разделе 2 даются основные определения и доказываются простейшие свойства операции расширенной суперпозиции. В разделе 3 доказывается критерий выразимости функций формулами расширенной суперпозиции. В разделе 4 доказываются вспомогательные утверждения. В разделе 5 приводится доказательство теоремы. Необходимые определния можно найти в [16]. Обозначения для замкнутых классов взяты согласно работам [14, 7, 15].

[1] Через MU здесь обозначается множество всех монотонных функций, существенно зависящих не более, чем от одной переменной.

2. Определения и простейшие свойства расширенной суперпозиции

Обозначим через P_2 множество всех булевых функций. Пусть $F \subseteq P_2$. Обозначим через $F(n)$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из множества F, где $n \geq 1$. Положим $E = \{0, 1\}$. Обозначим через E^n множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, таких, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$, $n \geq 1$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E^n$, $n \geq 1$. Набор $\widetilde{\beta}$ не превосходит набора $\widetilde{\alpha}$ (обозначение $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\beta}$), если для любого i, $1 \leq i \leq n$, выполнено неравенство $\alpha_i \geq \beta_i$. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ будем называть *селекторной*, если существует такой номер i, $1 \leq i \leq n$, что для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из E^n выполняется равенство $f(\widetilde{\alpha}) = \alpha_i$. Будем обозначать эту функцию через x_i. Будем называть функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ *константой* 0 (соответственно *константой* 1), если она принимает значение 0 (соответственно 1) на всех наборах из E^n, $n \geq 1$, и обозначать через 0 (соответственно 1).

Функцию $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ будем называть *двойственной* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ (обозначение $f^*(x_1, \ldots, x_n)$). Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть самодвойственной, если $f = f^*$. Пусть $B \subseteq P_2$. Обозначим через B^* множество всех функций $g \in P_2$, таких, что $g^* \in B$, а через $\overline{B}$ — множество всех функций $g \in P_2$, таких, что $\overline{g} \in B$.

Пусть $m \geq 2$. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $< 0^m >$ (соответственно $< 1^m >$), если любые m наборов, на которых f равна 0 (соответственно 1), имеют общую нулевую (соответственно единичную) компоненту. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $< 0^\infty >$ (соответственно $< 1^\infty >$), если все наборы, на которых f равна 0 (соответственно 1), имеют общую нулевую (соответственно единичную) компоненту.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть линейной, если выполняется равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$, конъюнкцией, если $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \& (c_1 \vee x_1) \& \ldots \& (c_n \vee x_n)$, и дизъюнкцией, если $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \vee c_1 x_1 \vee \ldots \vee c_n x_n$, где $c_i \in \{0, 1\}, i = 0, \ldots, n$.

Следуя работам [14, 7, 15], перечислим некоторые множества булевых функций: T_c — множество всех функций, сохраняющих константу с, где $c \in \{0, 1\}$; S — множество всех самодвойственных функций; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; K — множество всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; O^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 0^m >$, $m = 2, \ldots, \infty$; I^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^m >$, $m = 2, \ldots, \infty$; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенных переменных. Нетрудно показать, что все перечисленные множества булевых функций являются замкнутыми классами относительно операций суперпозиции и введения несущественных переменных. Будем называеть замкнутый класс A *неконстантным*, если $A \not\subseteq C$.

Положим $T_{01} = T_0 \cap T_1$. Обозначим через M_1, L_1, K_1, D_1, U_1, C_1, I_1^m пересечения T_1 с классами M, L, K, D, U, C, I^m соответственно, через M_0, L_0, K_0, D_0, U_0, C_0, O_0^m пересечения T_0 с классами M, L, K, D, U, C, O^m соответственно, через S_{01}, M_{01}, L_{01}, K_{01}, D_{01}, U_{01} пересечения T_{01} с классами S, M, L, K, D, U соответственно, через MO^m, MI^m, MO_0^m, MI_1^m, MU пересечения M с классами O^m, I^m, O_0^m, I_1^m, U соответственно, $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Положим $SM = S \cap M$, $SL = S \cap L$, $SU = S \cap U$.

Пусть F — множество булевых функций, содержащее все селекторные функции и замкнутое относительно операций введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Будем называть такие множества *инвариантными классами.* Равенство функций будем понимать с точностью до несущественных переменных, а именно, функции равны, если они имеют один и тот же набор существенных переменных и для любого значения существенных переменных эти функции принимают одно и то же значение. Поэтому операцию введения несущественных переменных в определении инвариантного класса можно опустить. Очевидно, что всякий замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C, C_0 и C_1, является инвариантным. Необходимо подчеркнуть, что данное понятие инвариантного класса отличается от понятия инвариантного класса, введенного С. В. Яблонским [17, 18]. Отметим также, что инвариантный класс в описанном выше смысле является инвариантным классом в терминах, введенных в работах [4, 3].

Пусть F — инвариантный класс булевых функций, $\mathfrak{A} \subseteq P_2$. Пару таких множеств $(F, \mathfrak{A})$ будем называть *типом* булевых функций. Определим понятие *формулы над типом* $U = (F, \mathfrak{A})$ индуктивно.

1. Выражение $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $g \in F$; $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — символы переменных, $n \geq 1$, является формулой над U. Такие формулы будем называть *тривиальными.*

2. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над U, $n \geq 1$, а $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$. Выражение Φ вида $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над U. Будем называть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ подформулами формулы Φ. Формулу Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ будем также называть подформулами формулы Φ.

Заметим, что всякая формула над типом $(F, \mathfrak{A})$ является формулой над множеством $F \cup \mathfrak{A}$ и поэтому реализует некоторую булеву функцию. Способ реализации булевых функций нетривиальными формулами указанного вида будем называть *операцией расширенной суперпозиции.*

Пусть $(F, \mathfrak{A})$ — тип булевых функций. *Пополнением* системы $\mathfrak{A}$ относительно F назовем множество всех булевых функций, реализуемых нетривиальными формулами над $(F,\mathfrak{A})$ (обозначение $[\mathfrak{A}]_F$). Отметим, что, если F состоит только из селекторных функций, то $[\mathfrak{A}]_F = [\mathfrak{A}]$. Будем называть тип (F, A) *полным* (в P_2), если $[A]_F = P_2$. В работе [1] получен критерий полноты для произвольного типа булевых функций.

Отметим следующие свойства операции расширенной суперпозиции.

Лемма 1. *Для любого типа $(F,\mathfrak{A})$ выполнено равенство $[\mathfrak{A}]_F = [A]_F$, где $A = [\mathfrak{A}]$.*

Доказательство. Соотношение $[\mathfrak{A}]_F \subseteq [A]_F$ очевидно. Докажем соотношение $[\mathfrak{A}]_F \supseteq [A]_F$. Рассмотрим некоторую формулу Θ над типом (F, A). Построим формулу над типом $(F,\mathfrak{A})$, эквивалентную формуле Θ. Будем преобразовывать Θ следующим образом. Тривиальные формулы над (F, A) являются также тривиальными формулами над $(F,\mathfrak{A})$. Пусть в Θ есть подформула вида $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_n), n \geq 1$, такая, что $g \in A$, $g \notin \mathfrak{A}$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над $(F,\mathfrak{A})$. Докажем, что можно заменить эту подформулу на эквивалентную ей формулу над типом $(F,\mathfrak{A})$. Пусть $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что формула $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ эквивалентна формуле $\Psi(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, причем формула $\Psi(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над типом $(F,\mathfrak{A})$. Таким образом, начиная от тривиальных формул, будем заменять в формуле Θ подформулы над типом (F, A) на эквивалентные им подформулы над типом $(F,\mathfrak{A})$. В конце этого процесса получим некоторую формулу Θ' над $(F,\mathfrak{A})$, эквивалентную формуле Θ. Следовательно, любая функция из $[A]_F$ может быть реализована формулой над типом $(F,\mathfrak{A})$. Значит, $[\mathfrak{A}]_F \supseteq [A]_F$. □

Из леммы 1 следует, что, при исследовании пополнений систем булевых функций достаточно рассматривать только пополнения замкнутых классов. В дальнейшем при рассмотрении какого-либо типа (F, A) будем подразумевать, что A — замкнутый класс.

Лемма 2. *Пусть $(F,\mathfrak{A})$ — произвольный тип булевых функций, и $A = [\mathfrak{A}]$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [\mathfrak{A}]_F, n \geq 1$. Тогда существуют функция $g(y_1, \ldots, y_k)$, $k \geq 1$, принадлежащая классу A, и попарно различные функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ из F, такие, что*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу Θ над типом $(F,\mathfrak{A})$, реализующую функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ — некоторая тривиальная подформула формулы Θ, где $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть она реализует функцию $f'(x_1, \ldots, x_n)$ из $F(n)$ (с точностью до несущественных переменных). Обозначим через T множество всех функций, реализуемых тривиальными подформулами формулы Θ. Пусть

$$T = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)\},$$

где $k \geq 1$. Сопоставим каждой функции $f_i \in T$ переменную y_i, $1 \leq i \leq k$. Заменим в формуле Θ каждое вхождение тривиальной подформулы, реализующей функцию f_i, на переменную y_i для всех $i = 1, \ldots, k$. Обозначим полученную формулу через $\Theta'(y_1, \ldots, y_k)$. Очевидно, что Θ' — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая некоторую функцию $g(y_1, \ldots, y_k)$ из A. Подставим в g вместо каждой переменной y_i соответствующую ей функцию f_i для всех $i = 1, \ldots, k$. Получим формулу

$$g(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Очевидно, что эта формула эквивалентна формуле Θ. □

Лемма 3. *Для произвольного типа $(F, \mathfrak{A})$ выполняется равенство $[\mathfrak{A}]_F = ([\mathfrak{A}^*]_{F^*})^*$.*

Доказательство. Пусть F — инвариантный класс, $\mathfrak{A}$ — множество булевых функций. Заметим, что F^* является инвариантным классом. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [A]_F$. Согласно лемме 2 функция h реализуется некоторой формулой над типом $(F, \mathfrak{A})$ вида $g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$, $k \geq 1$. Тогда формула

$$g^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k^*(x_1, \ldots, x_n)) = \overline{g}(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, f_k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)),$$

над (F^*, A^*) реализует функцию, двойственную к $h(x_1, \ldots, x_n)$. Поэтому $[\mathfrak{A}]_F \subseteq ([\mathfrak{A}^*]_{F^*})^*$. Обратное включение доказывается аналогично. □

Лемма 4. *Пусть A и B — замкнутые классы, такие, что $A = B \cup \widetilde{C}$, где $\widetilde{C} \in \{C, C_0, C_1\}$, а F — инвариантный класс. Тогда выполняется равенство $[A]_F = [B]_F \cup \widetilde{C}$.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [A]_F, n \geq 1$. Тогда из леммы 2 следует, что существуют функция $g(y_1, \ldots, y_k) \in A$, $k \geq 1$, и функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $f_k(x_1, \ldots, x_n) \in F$, такие, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Тогда либо $g \in B$, либо $g \in \widetilde{C}$. Если $g \in B$, то $h \in [B]_F$. Если $g \in \widetilde{C}$, то и $h \in \widetilde{C}$. Таким образом, $[A]_F \subseteq [B]_F \cup \widetilde{C}$. С другой стороны, $[B]_F \subseteq [A]_F$ и $\widetilde{C} \subseteq [A]_F$, то есть $[B]_F \cup \widetilde{C} \subseteq [A]_F$. □

Лемма 5. *Пусть A — замкнутый класс, F — инвариантный класс, $\widetilde{C} \in \{C, C_0, C_1\}$. Тогда $[A]_{F \cup \widetilde{C}} = [A \cup \widetilde{C}]_{F \cup \widetilde{C}} = [A \cup \widetilde{C}]_F$.*

Доказательство. Заметим, что $F \cup \widetilde{C}$ — инвариантный класс. Очевидно, что любая формула над $(F \cup \widetilde{C}, \mathfrak{A})$ эквивалентна некоторой формуле над $(F, A \cup \widetilde{C})$ и наоборот. Отсюда следует утверждение леммы. □

3. Критерий выразимости функций в терминах расширенной суперпозиции

Пусть $R \subseteq E^n, n \geq 1$, $r^{(n)}$ — отображение из множества R в E. Пусть функция $r^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, задает это отображение. Здесь R — область определения, E — область значений функции $r^{(n)}$. Функцию $r^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *n-местной частичной булевой функцией*, определенной на множестве R. Если набор $\widetilde{\alpha}$ таков, что $\widetilde{\alpha} \in E^n$ и $\widetilde{\alpha} \notin R$, то будем говорить, что функция $r^{(n)}$ не определена на наборе $\widetilde{\alpha}$.

Пусть $n \geq 1$, $R \subseteq E^n$, $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная булева функция, определенная на множестве R. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, такая, что для любого набора $\widetilde{\alpha} \in R$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\alpha})$. Будем говорить, что функция f *доопределяет* частичную функцию r. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *доопределяющей функцией* или *доопределением* частичной функции $r(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть A — замкнутый класс булевых функций, $n, k \geq 1$, пусть $R \subseteq E^n$. Пусть $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная булева функция, определенная на R. Функцию r будем называть *согласованной* с классом A, если существует такое доопределение $f(x_1, \ldots, x_n)$ функции r, что $f \in A$. Функцию f будем называть *доопределением* r в классе A.

Пусть $n \geq 1$, $h(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, F — инвариантный класс булевых функций, и $F(n) = \{f_1, \ldots, f_l\}$, $l \geq 1$. Рассмотрим множества $E^n = \{\widetilde{\gamma}^1, \widetilde{\gamma}^2, \ldots, \widetilde{\gamma}^{2^n}\}$, $R = \{\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^{2^n}\}$, где $\widetilde{\delta}^i = (f_1(\widetilde{\gamma}^i), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma}^i)) \in E^l$, $i = 1, \ldots, 2^n$, и частичную функцию $r(x_1, \ldots, x_l)$, определенную на R, и такую, что $r(\widetilde{\delta}^i) = h(\widetilde{\gamma}^i)$ для всех $i = 1, \ldots, 2^n$. Назовем функцию r *декомпозицией* функции h относительно класса F.

В следующей лемме формулируется критерий выразимости функций в терминах операции расширенной суперпозиции.

Лемма 6. *Пусть A — замкнутый класс булевых функций, F — инвариантный класс, $h(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $n \geq 1$. Тогда $h \in [A]_F$, если и только если декомпозиция функции h относительно F является согласованной с классом A.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [A]_F$, $F(n) = \{f_1, \ldots, f_l\}$, $l \geq 1$. Пусть частичная функция $r(x_1, \ldots, x_l)$ является декомпозицией функции h относительно F. Из леммы 2 следует, что существует функция $g(y_1, \ldots, y_k) \in A$, $k \geq 1$, и функции $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k} \in F(n)$, такие, что формула $g(f_{i_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{i_k}(x_1, \ldots, x_n))$, реализует h. Рассмотрим булеву функцию $\lambda(z_1, \ldots, z_l)$, такую, что для любых наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in E^l$, $(\beta_1 \ldots \beta_k) \in E^k$, таких, что $\alpha_{i_1} = \beta_1, \ldots, \alpha_{i_k} = \beta_k$, имеет место равенство $\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = g(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Эта функция получается из g переименованием переменных и, если $k < l$, введением $l - k$ фиктивных переменных. Отсюда следует, что $\lambda \in A$. Рассмотрим формулу

$\lambda(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n))$. Она реализует функцию h и является формулой над типом (F, A). Пусть $\widetilde{\delta} = (f_1(\widetilde{\gamma}), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma}))$ — произвольный набор из области определения функции r, где $\widetilde{\gamma} \in E^n$. Согласно определению декомпозиции функции h относительно F выполняются равенства $\lambda(\widetilde{\delta}) = \lambda(f_1(\widetilde{\gamma}), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma})) = h(\widetilde{\gamma}) = r(\widetilde{\delta})$. Следовательно, λ является доопределением частичной функции r в классе A, то есть функция r согласована с классом A.

Пусть теперь частичная функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является декомпозицией функции h и согласована с классом A. Пусть $g(x_1, \ldots, x_l)$ — доопределение функции r в классе A. Согласно определению декомпозиции формула $g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n))$ над типом (F, A) реализует функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$. □

4. Вспомогательные утверждения

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 7. *Пусть A и B — замкнутые классы, $C = A \cap B$, $n \geq 1$. Если частичная булева функция r согласована с классом C, то она согласована с классами A и B.*

Рассмотрим следующие критерии согласованности частичных функций с замкнутыми классами булевых функций.

Утверждение 1. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом M тогда и только тогда, когда для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$, таких, что $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha}) \geq r(\widetilde{\beta})$.*

Доказательство. Пусть частичная функция r удовлетворяет условию. Построим функцию, доопределяющую функцию r в классе M. Пусть $\widetilde{\alpha} \in R$, $\widetilde{\alpha} \neq (0, \ldots, 0)$, и $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}$ — все единичные компоненты набора $\widetilde{\alpha}$, $p \geq 1$. Сопоставим каждому ненулевому набору $\widetilde{\alpha} \in R$ функцию $g^{\widetilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_n) = x_{j_1} \& \ldots \& x_{j_p}$. Набору $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$ длины n сопоставим функцию $g^{\widetilde{0}} = 1$. Рассмотрим функцию

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\widetilde{\alpha} \in R | r(\widetilde{\alpha}) = 1} g^{\widetilde{\alpha}}.$$

Очевидно, что $h \in M$. На каждом наборе $\widetilde{\alpha} \in R$, таком, что $r(\widetilde{\alpha}) = 1$, h принимает единичное значение, так как $g^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\alpha}) = 1$. Предположим, что на некотором наборе $\widetilde{\alpha} \in R$, таком, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$, функция h принимает единичное значение. Тогда найдется набор $\widetilde{\beta} \in R$, такой, что $g^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Очевидно, что $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\beta}$. Это неравенство противоречит условию. Следовательно, h является доопределением частичной функции r в классе M. Поэтому функция r согласована с классом M.

Пусть частичная функция r согласована с классом M. Предположим, что r не удовлетворяет условию утверждения, то есть существуют наборы $\widetilde{\alpha}^i$ и $\widetilde{\alpha}^j$, $1 \leq i, j \leq k$, такие, что $\widetilde{\alpha}^i \geq \widetilde{\alpha}^j$ и $r(\widetilde{\alpha}^i) < r(\widetilde{\alpha}^j)$. Тогда по определению монотонной функции любое доопределение частной функции r не будет являться монотонным, откуда следует, что не существует доопределения r в классе M. Противоречие. $\square$

Лемма 8. *Пусть F — инвариантный класс, такой, что $\overline{x} \in [M]_F$. Тогда выполняется соотношение $\overline{x} \in F$.*

Доказательство. Пусть $F(1) = \{f_1(x), \ldots, f_l(x)\}$, $l \geq 1$. Рассмотрим функцию $h(x) = \overline{x}$, $h \in [M]_F$. Рассмотрим декомпозицию $r(y_1, \ldots, y_l)$ функции h относительно F. Согласно лемме 6 частичная функция r согласована с классом M. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ и $\widetilde{\beta} = (f_1(1), f_2(1), \ldots, f_l(1))$ из области определения функции r. Тогда $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 1$, $r(\widetilde{\beta}) = h(1) = 0$. Следовательно, согласно утверждению 1 не выполняется соотношение $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$. Поэтому существует такое k, $1 \leq k \leq l$, что $f_k(0) = 1$ и $f_k(1) = 0$, а значит $f_k(x) = \overline{x}$. $\square$

Утверждение 2. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом S тогда и только тогда, когда для любых двух противоположных наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ выполняется равенство $r(\widetilde{\alpha}) = \overline{r}(\widetilde{\beta})$.*

Доказательство. Пусть частичная функция r удовлетворяет условию. Построим доопределение функции r в классе S. Рассмотрим множество F_1 доопределяющих функций частичной функции r. Рассмотрим подмножество F_2 множества F_1, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1$, удовлетворяющие условию: если для некоторого набора $\widetilde{\alpha}^i \in R$ набор $\overline{\widetilde{\alpha}^i}$ не принадлежит R, то $f(\overline{\widetilde{\alpha}^i}) = \overline{r}(\widetilde{\alpha}^i)$. Очевидно, что $F_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество F_3 множества F_2, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_2$, удовлетворяющие условию: для любой пары наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$, таких, что $\widetilde{\gamma} = \overline{\widetilde{\delta}}$, и ни один из них не лежит в R, выполняется равенство $f(\widetilde{\gamma}) = \overline{f}(\widetilde{\delta})$. Заметим, что $F_3 \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную функцию из F_3. Эта функция, очевидно, будет самодвойственной и, следовательно, искомым доопределением функции r в классе S.

Пусть частичная функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с классом S. Предположим, что она не удовлетворяет условию утверждения, то есть существуют такие противоположные наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$, что $r(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\beta})$. Тогда любое доопределение функции r не является самодвойственной функцией, что противоречит согласованности r с классом S. $\square$

Лемма 9. *Пусть F — инвариантный класс, и $1 \in [S]_F$. Тогда F содержит по крайней мере одну из функций* 0, 1.

Доказательство. Пусть $F(1) = \{f_1(x), \dots, f_l(x)\}$, $l \geq 1$. Рассмотрим функцию $h(x) = 1$, $h \in [S]_F$. Рассмотрим декомпозицию $r(y_1, \dots, y_l)$ функции h относительно F. Согласно лемме 6 частичная функция r согласована с классом S. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), f_2(0), \dots, f_l(0))$ и $\widetilde{\beta} = (f_1(1), f_2(1), \dots, f_l(1))$ из области определения функции r. Тогда $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 1$ и $r(\widetilde{\beta}) = h(1) = 1$. Следовательно, согласно утверждению 2 наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ не являются противоположными. Поэтому существует такое k, $1 \leq k \leq l$, что $f_k(0) = f_k(1)$, а значит, $f_k(x) \in \{0, 1\}$. $\square$

Утверждение 3. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, $2 \leq m \leq \infty$, а $r(x_1, \dots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом O^m тогда и только тогда, когда для любого q, $1 \leq q \leq m$, и любых q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \dots, \widetilde{\alpha}^q \in R$, таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = \dots = r(\widetilde{\alpha}^q) = 0$, найдется такое j, $1 \leq j \leq n$, что $\alpha_j^1 = \dots = \alpha_j^q = 0$.*

Доказательство. Пусть для любого $q \leq m$ и любых таких q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \dots, \widetilde{\alpha}^q \in R$, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = \dots = r(\widetilde{\alpha}^q) = 0$, найдется такое j $(1 \leq j \leq n)$, что $\alpha_j^1 = \dots = \alpha_j^q = 0$. Построим доопределение функции r в классе O^m. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, доопределяющую функцию r и такую, что для любого набора $\widetilde{\gamma} \notin R$ выполняется соотношение $f(\widetilde{\gamma}) = 1$. Тогда $f \in O^m$, и, следовательно, f является искомым доопределением в классе O^m.

Пусть функция r является согласованной с классом O^m. Обозначим через $f(x_1, \dots, x_n)$ доопределение функции r в этом классе. Тогда $f \in O^m$. Поэтому для любого $q \leq m$ и любых q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \dots, \widetilde{\alpha}^q \in R$, таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = \dots = r(\widetilde{\alpha}^q) = 0$, найдется такое j, $1 \leq j \leq n$, что $\alpha_j^1 = \dots = \alpha_j^q = 0$. $\square$

Аналогично доказываются следующие утверждения.

Утверждение 4. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, а $r(x_1, \dots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом T_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие: если $\widetilde{\alpha} \in R$ и $\widetilde{\alpha}^i$ является нулевым набором, то $r(\widetilde{\alpha}) = 0$.*

Утверждение 5. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, а $r(x_1, \dots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом T_1 тогда и только тогда, когда выполняется условие: если $\widetilde{\alpha} \in R$ и $\widetilde{\alpha}^i$ является единичным набором, то $r(\widetilde{\alpha}) = 1$.*

Утверждение 6. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом T_{01} тогда и только тогда, когда выполняется условие: если $\widetilde{\alpha} \in R$ и $\widetilde{\alpha} = (c, c, \ldots, c)$, где $c \in \{0, 1\}$, то $r(\widetilde{\alpha}) = c$*

Следствие 1. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[T_{01}]_F = [T_1]_F \cap [T_0]_F$.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $n \geq 1$. Из утверждений 4, 5, 6 следует, что условие согласованности декомпозиции функции h относительно F с классом T_{01} эквивалентно одновременному выполнению условий согласованности с классами T_0 и T_1. Применяя лемму 6, получаем, что функция принадлежит $[T_{01}]_F$ тогда и только тогда, когда она принадлежит одновременно $[T_1]_F$ и $[T_0]_F$. □

Лемма 10. *Пусть F — инвариантный класс, такой, что $1 \in [T_0]_F$. Тогда F содержит по крайней мере одну из функций 1, $\overline{x}$.*

Доказательство. Пусть $F(1) = \{f_1(x), \ldots, f_l(x)\}$, $l \geq 1$. Рассмотрим функцию $h(x) = 1$, $h \in [T_0]_F$. Пусть $r(y_1, \ldots, y_l)$ — декомпозиция функции h относительно F. Согласно лемме 6 функция r согласована с классом T_0. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ из области определения функции r. Тогда $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 1$. Следовательно, согласно утверждению 4 набор $\widetilde{\alpha}$ отличен от нулевого. Поэтому существует такое k, $1 \leq k \leq l$, что $f_k(0) = 1$. Следовательно, $f_k(x) \in \{1, \overline{x}\}$. □

Лемма 11. *Пусть F — инвариантный класс, $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Пусть выполняется соотношение $0 \in [O^m]_F$. Тогда $0 \in F$.*

Доказательство. Пусть $F(1) = \{f_1(x), \ldots, f_l(x)\}$, $l \geq 1$. Рассмотрим функцию $h(x) = 0$, $h \in [O^m]_F$. Рассмотрим декомпозицию $r(y_1, \ldots, y_l)$ функции h относительно F. Согласно лемме 6 частичная функция r согласована с классом O^m. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ и $\widetilde{\beta} = (f_1(1), f_2(1), \ldots, f_l(1))$ из области определения функции r. Тогда $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 0$, $r(\widetilde{\beta}) = h(1) = 0$. Согласно утверждению 3 наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ имеют общую нулевую компоненту. Поэтому существует такое k, $1 \leq k \leq l$, что $f_k(0) = f_k(1) = 0$. □

Утверждение 7. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом M_1 тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами M и T_1.*

Доказательство. Пусть функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с классами M и T_1, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе M_1. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ —

доопределение функции r в классе M. Если $h(1,\ldots,1)=1$, то h является искомым доопределением в классе T_1. Пусть $h(1,\ldots,1)=0$. Согласно утверждению 5 единичный набор не входит в область определения функции r. Поскольку $h \in M$, то $h=0$. Рассмотрим функцию $g(x_1,\ldots,x_n)=x_1\&\ldots\&x_n$. Она принимает те же значения, что и функция h, на всех наборах, кроме единичного. Поскольку единичный набор не входит в область определения функции r, то g является ее доопределением в классе M_1. Следовательно, r согласована с классом M_1. В обратную сторону утверждение следует из леммы 7. $\square$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Утверждение 8. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, а $r(x_1,\ldots,x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом M_{01} тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами M, T_0 и T_1.*

Следствие 2. *Для любого инвариантного класса F выполнены равенства $[M_1]_F=[M]_F\cap[T_1]_F, [M_{01}]_F=[M]_F\cap[T_1]_F\cap[T_0]_F$.*

Утверждение 9. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, $2 \leq m \leq \infty$, а $r(x_1,\ldots,x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом O_0^m тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами O^m и T_0.*

Доказательство. Пусть частичная функция $r(x_1,\ldots,x_n)$ согласована с классами O^m и T_0, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе O_0^m. Рассмотрим множество F_1 доопределяющих функций частичной функции r. Рассмотрим подмножество F_2 множества F_1, содержащее все функции $f \in F_1$, такие, что $f(0,\ldots,0)=0$. Из утверждения 4 следует, что, если существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$, такой, что $\widetilde{\alpha}=(0,\ldots,0)$, то $r(\widetilde{\alpha})=0$. Следовательно, $F_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество F_3 множества F_2, содержащее все функции $f \in F_2$, принимающие на всех наборах, отличных от нулевого и не принадлежащих множеству R, единичное значение. Заметим, что существует ровно одно доопределение, удовлетворяющее этим свойствам, то есть множество F_3 состоит из одной функции. Обозначим эту функцию через $f(x_1,\ldots,x_n)$. Согласно лемме 3 любые q наборов, где $q \leq m$, на которых f принимает нулевое значение, имеют общую нулевую компоненту. Следовательно, $f \in O_0^m$, то есть f является искомым доопределением в классе O_0^m.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 7. $\square$

Следствие 3. *Пусть $2 \leq m \leq \infty$. Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[O_0^m]_F=[O^m]_F\cap[T_0]_F$.*

Утверждение 10. *Пусть* $R \subseteq E^n$, $n \geq 1$, $2 \leq m \leq \infty$, *а* $r(x_1, \ldots, x_n)$ — *частичная функция, определенная на множестве* R. *Функция* r *является согласованной с классом* MO^m *тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами* O^m *и* M.

Доказательство. Пусть частичная функция r является согласованной с классами O^m и M, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе MO^m. Рассмотрим множество F_1 доопределяющих функций частичной функции r. Рассмотрим множество Γ всех наборов $\widetilde{\gamma}$ длины n, удовлетворяющих условию: существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$, такой, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $\widetilde{\gamma} \leq \widetilde{\alpha}$. Рассмотрим подмножество F_2 множества F_1, содержащее все функции $f \in F_1$, такие, что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$ для всех наборов $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. Согласно условию согласованности с классом M для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$, таких, что $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\beta}$, выполняется соотношение $r(\widetilde{\alpha}) \geq r(\widetilde{\beta})$. Отсюда следует, что множество Γ не содержит набора $\widetilde{\delta} \in R$, такого, что $r(\widetilde{\delta}) = 1$. Следовательно, $F_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество F_3 множества F_2, содержащее все функции $f \in F_2$, принимающие на всех наборах, не принадлежащих множеству $R \cup \Gamma$, единичное значение. Заметим, что существует ровно одно доопределение, удовлетворяющее этим свойствам, то есть множество F_3 состоит из одной функции. Обозначим эту функцию через $f(x_1, \ldots, x_n)$. Докажем, что $f \in MO^m$.

Докажем, что $f \in M$. Пусть $\widetilde{\delta}^1$ и $\widetilde{\delta}^2$ — различные наборы длины n, такие, что $\widetilde{\delta}^1 > \widetilde{\delta}^2$. Докажем, что $f(\widetilde{\delta}^1) \geq f(\widetilde{\delta}^2)$. Предположим противное. Пусть $f(\widetilde{\delta}^1) = 0$, $f(\widetilde{\delta}^2) = 1$. Тогда в силу согласованности функции r с классом M хотя бы один из этих наборов не принадлежит множеству R. Возможны три различных случая.

Пусть $\widetilde{\delta}^1 \in R$, $\widetilde{\delta}^2 \notin R$. Тогда $\widetilde{\delta}^2 \notin \Gamma$, поскольку $f(\widetilde{\gamma}) = 0$ для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. Набор $\widetilde{\delta}^2$ принадлежит множеству Γ по определению этого множества, поскольку $\widetilde{\delta}^1 \in R$, $\widetilde{\delta}^1 > \widetilde{\delta}^2$, $f(\widetilde{\delta}^1) = 0$. Противоречие.

Пусть $\widetilde{\delta}^1 \notin R$, $\widetilde{\delta}^2 \in R$. Тогда $\widetilde{\delta}^1 \in \Gamma$, поскольку $f(\widetilde{\gamma}) = 1$ для любого набора $\widetilde{\gamma} \notin R \cup \Gamma$. Поскольку $\widetilde{\delta}^1 \in \Gamma$, то существует такое $\widetilde{\alpha} \in R$, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $\widetilde{\delta}^1 \leq \widetilde{\alpha}$. Заметим, что $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\delta}^1 \geq \widetilde{\delta}^2$, $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\delta}^2) = 1$. Поэтому согласно утверждению 1 функция r не согласована с классом M, поскольку $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^2 \in R$. Противоречие.

Пусть $\widetilde{\delta}^1 \notin R$, $\widetilde{\delta}^2 \notin R$. Тогда $\widetilde{\delta}^1 \in \Gamma$, поскольку $f(\widetilde{\gamma}) = 1$ для любого набора $\widetilde{\gamma} \notin R \cup \Gamma$, а $\widetilde{\delta}^2 \notin \Gamma$, поскольку $f(\widetilde{\gamma}) = 0$ для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} \in R$, такой, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $\widetilde{\delta}^1 \leq \widetilde{\alpha}$. Такой набор существует, поскольку $\delta^1 \in \Gamma$. Тогда $\delta^2 \leq \delta^1 \leq \alpha$. Поэтому $\delta^2 \in \Gamma$. Противоречие.

Следовательно, предположение не верно, и $f \in M$.

Докажем, что $f \in O^m$. Пусть $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^q$ — различные наборы длины n, такие, что $f(\widetilde{\delta}^1) = \ldots = f(\widetilde{\delta}^q) = 0$, $q \leq m$. Заметим, что $\widetilde{\delta}^i \in R \cup \Gamma$

для любого i, $1 \le i \le q$. Тогда по определению множества Γ существуют такие наборы $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q \in R$, что для любого i, $1 \le i \le q$, выполняются соотношения $\widetilde{\alpha}^i \ge \widetilde{\delta}^i$ и $f(\widetilde{\alpha}^i) = r(\widetilde{\alpha}^i) = 0$. Тогда согласно критерию согласованности с классом O^m наборы $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q$ имеют общую нулевую компоненту. Поскольку $\widetilde{\alpha}^i \ge \widetilde{\delta}^i$ для любого i, $1 \le i \le q$, то наборы $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^q$ также имеют общую нулевую компоненту. Следовательно, $f \in O^m$.

Итак, $f \in MO^m$, то есть f является искомым доопределением.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 7. □

Следствие 4. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[MO^m]_F = [O^m]_F \cap [M]_F$.*

Утверждение 11. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \ge 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом S_{01} тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами S и T_{01}.*

Доказательство. Пусть частичная функция r является согласованной с классами S и T_{01}, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе S_{01}. Рассмотрим множество F_1 доопределяющих функций частичной функции r. Очевидно, что $F_1 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество F_2 множества F_1, содержащее все функции $f \in F_1$, принимающие на нулевом и единичном наборах нулевое и единичное значения соответственно. Заметим, что согласно утверждению 6, если существует такой набор $\widetilde{\alpha} \in R$, что $\widetilde{\alpha} = (c, \ldots, c) \in R$, $c \in \{0, 1\}$, то $r(\widetilde{\alpha}) = c$. Поэтому $F_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество F_3 множества F_2, содержащее все функции $f \in F_2$, удовлетворяющие условиям: если для набора $\widetilde{\gamma}$ длины n, отличного от нулевого и единичного, выполняются соотношения $\widetilde{\gamma} \in R$ и $\overline{\widetilde{\gamma}} \notin R$, то $f(\overline{\widetilde{\gamma}}) = \overline{f}(\widetilde{\gamma})$, и, если для набора $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, отличного от нулевого и единичного, выполняются соотношения $\widetilde{\delta} \notin R$ и $\overline{\widetilde{\delta}} \notin R$, то $f(\widetilde{\delta}) = \delta_1$. Очевидно, что $F_3 \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_3$. Несложно видеть, что $f \in S_{01}$, то есть f является искомым доопределением в классе S_{01}.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 7. □

Следствие 5. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[S_{01}]_F = [S]_F \cap [T_0]_F \cap [T_1]_F$.*

Утверждение 12. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \ge 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом SM тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами M, O^2 и I^2.*

Доказательство. Пусть частичная функция r является согласованной с классами M, O^2 и I^2, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе SM. Рассмотрим множество F_1 доопределяющих функций частичной функции r. Очевидно, что $F_1 \neq \varnothing$. Пусть $\widetilde{\gamma}$ — набор длины n, такой, что существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$, такой, что $\widetilde{\gamma} \geq \widetilde{\alpha}$, $r(\widetilde{\alpha}) = 1$. Множество всех таких наборов обозначим через Γ_1. Заметим, что Γ_1 может быть пустым множеством. Рассмотрим подмножество F_2 множества F_1, содержащее все функции $f \in F_1$, такие, что для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_1$ выполняется соотношение $f(\widetilde{\gamma}) = 1$. В силу согласованности функции r с классом M, для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1$ и для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$, таких, что $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\beta}$, выполняется соотношение $f(\widetilde{\alpha}) \geq f(\widetilde{\beta})$. Следовательно, $F_2 \neq \varnothing$. Пусть $\widetilde{\gamma}$ — набор длины n, такой, что существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$, такой, что $\widetilde{\gamma} \leq \widetilde{\alpha}$, $r(\widetilde{\alpha}) = 0$. Множество всех таких наборов обозначим через Γ_0. Рассмотрим подмножество F_3 множества F_2, содержащее все функции $f \in F_2$, такие, что для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0$ выполняется равенство $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Аналогично доказывается, что $F_3 \neq \varnothing$. Несложно видеть, что $R \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$.

Докажем, что множество Γ_0 не содержит двух противоположных наборов. Предположим противное. Пусть существует такой набор $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0$, что $\widetilde{\theta} = \overline{\widetilde{\gamma}} \in \Gamma_0$. Согласно определению множества Γ_0 существуют такие наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$, что $\widetilde{\alpha} \geq \widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta} \geq \widetilde{\theta}, r(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\beta}) = 0$. Поскольку наборы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\theta}$ не имеют общей нулевой компоненты, то и наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ не имеют общей нулевой компоненты. Следовательно, функция r не согласована с классом O^2. Противоречие. Значит, в множестве Γ_0 нет двух противоположных наборов. Аналогично доказывается, что в множестве Γ_1 нет двух противоположных наборов.

Пусть $\overline{\Gamma}_0$ — множество всех таких наборов $\widetilde{\delta}$, что существует набор $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0$, такой, что $\widetilde{\delta} = \overline{\widetilde{\gamma}}$. Аналогично определим множество $\overline{\Gamma}_1$. Из доказанного ранее следует, что $\overline{\Gamma}_0 \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \Gamma_1 = \varnothing$. Поскольку $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, то $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$.

Рассмотрим подмножество F_4 множества F_3, содержащее все функции $f \in F_3$, такие, что на всех наборах из $\overline{\Gamma}_0$ функция f принимает единичное значение, а на всех наборах из $\overline{\Gamma}_1$ — нулевое значение. Из соотношений $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \Gamma_1 = \varnothing$ следует, что $F_4 \neq \varnothing$.

Докажем, что для любых наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$, таких, что $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\delta} \geq \widetilde{\gamma}$, выполняется соотношение $\widetilde{\delta} \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$. Действительно, если $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_1$, то это утверждение выполняеся по определению множества Γ_1. Если же $\widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}_0$, то $\overline{\widetilde{\gamma}} \in \Gamma_0$, $\overline{\widetilde{\delta}} \leq \overline{\widetilde{\gamma}}$, откуда по определению класса Γ_0 следует, что $\overline{\widetilde{\delta}} \in \Gamma_0$, то есть $\widetilde{\delta} \in \overline{\Gamma}_0$. Аналогично доказывается, что, для любых наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$, таких, что $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$ и $\widetilde{\delta} \leq \widetilde{\gamma}$, выполняется соотношение $\widetilde{\delta} \in \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$.

Рассмотрим множество $\Lambda = E^n \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_0)$. Несложно видеть, что для любого набора $\widetilde{\alpha} \in \Lambda$ выполняется соотношение $\overline{\widetilde{\alpha}} \in \Lambda$. Обозначим, через Λ_1 множество всех наборов из множества Λ, в которых более $\frac{n}{2}$ единичных компонент либо ровно $\frac{n}{2}$ единичных компонент и первая компонента равна 1. Положим $\Lambda_0 = \Lambda \setminus \Lambda_1$. Очевидно, что если $\widetilde{\alpha} \in \Lambda_0$, то $\overline{\widetilde{\alpha}} \in \Lambda_1$.

Рассмотрим подмножество F_5 множества F_4, содержащее все функции $f \in F_4$, такие, что на каждом наборе из Λ_1 функция f принимает единичное значение, а на каждом наборе из Λ_0 — нулевое. Очевидно, что F_5 содержит ровно одну функцию. Обозначим ее через $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Докажем, что $f \in M$. Предположим противное. Тогда существуют такие два набора $\widetilde{\gamma}^0$ и $\widetilde{\gamma}^1$, что $\widetilde{\gamma}_0 > \widetilde{\gamma}_1$, $f(\widetilde{\gamma}_0) = 0$, $f(\widetilde{\gamma}_1) = 1$. Согласно доказанному ранее выполняется соотношение $\widetilde{\gamma}_1 \notin \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$, поскольку иначе бы выполнялось соотношение $\widetilde{\gamma}_0 \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$, то есть $f(\widetilde{\gamma}_0) = 1$ (т. к. $f \in F_4$). Аналогично доказывается, что $\widetilde{\gamma}_0 \notin \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$. Отсюда следует, что $\widetilde{\gamma}_0 \in \Lambda_0$, $\widetilde{\gamma}_1 \in \Lambda_1$. Но тогда либо $\widetilde{\gamma}_1$ содержит больше единичных компонент, чем $\widetilde{\gamma}_0$, либо у $\widetilde{\gamma}_1$ единичная первая компонента, а у $\widetilde{\gamma}_0$ нулевая. Следовательно, соотношение $\widetilde{\gamma}_0 > \widetilde{\gamma}_1$ не верно. Противоречие. Следовательно, $f \in M$.

Докажем, что $f \in S$. Предположим противное. Тогда существуют такие два набора $\widetilde{\gamma}^0$ и $\widetilde{\gamma}^1$, что $\widetilde{\gamma}^0 = \overline{\widetilde{\gamma}^1}$, $f(\widetilde{\gamma}^0) = f(\widetilde{\gamma}^1)$. Не умаляя общности, будем полагать, что $f(\widetilde{\gamma}^0) = f(\widetilde{\gamma}^1) = 1$. Тогда либо $\widetilde{\gamma}^1 \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$, либо $\widetilde{\gamma}^1 \in \Lambda_1$. Отсюда следует, что либо $\widetilde{\gamma}^0 \in \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$, либо $\widetilde{\gamma}^0 \in \Lambda_0$. Следовательно, $f(\widetilde{\gamma}^1) = 0$. Противоречие. Следовательно, $f \in S$.

Таким образом, $f \in SM$, то есть f является искомым дополнением.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 7. ☐

Следствие 6. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[SM]_F = [M]_F \cap [O^2]_F \cap [I^2]_F$.*

Дальнейшие утверждения об универсальной разложимости замкнутых классов доказываются без привлечения понятия согласованности.

Утверждение 13. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[L_0]_F = [L]_F \cap [T_0]_F$.*

Доказательство. Соотношение $[L_0]_F \subseteq [L]_F \cap [T_0]_F$ следует из лемм 6 и 7.

Пусть $F \subseteq T_0$. Очевидно, что $[T_0]_F = T_0$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, из $[L]_F \cap [T_0]_F$. Заметим, что $h \in [T_0]_F = T_0$. Поскольку $h \in [L]_F$, то согласно лемме 2 существуют такие функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $k \geq 1$, что $h = f_1 + \ldots + f_k + c$, где $c \in \{0, 1\}$. Поскольку $h, f_1, \ldots, f_k \in T_0$, то $c = 0$. Поэтому $h \in [L_0]_F$.

Пусть $F \not\subseteq T_0$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1,\dots,x_n)$, $n \geq 1$, из $[L]_F \cap [T_0]_F$. Докажем соотношение $h \in [L_0]_F$. Предположим противное. Пусть $h \notin [L_0]_F$. Из соотношения $h \in [L]_F$ следует, что существуют функции $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n) \in F$, $k \geq 1$, такие, что $h(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + f_k(x_1,\dots,x_n) + 1$. Поскольку $F \not\subseteq T_0$, то существует такая функция $f(x_1,\dots,x_n) \in F$, что $f(0,\dots,0) = 1$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x,\dots,x)$. Заметим, что $g \in F$ и $g(0) = 1$. Поэтому либо $1 \in F$, либо $\overline{x} \in F$.

Пусть $1 \in F$. Тогда существует такая функция $f_{k+1}(x_1,\dots,x_n) \in F$, что $f_{k+1} = 1$, откуда следует равенство $h = f_1 + \dots + f_k + f_{k+1}$. Поэтому $h \in [L_0]_F$. Противоречие. Пусть теперь $\overline{x} \in F$. Тогда существуют такие функции $f_{k+1}(x_1,\dots,x_n)$, $f_{k+2}(x_1,\dots,x_n) \in F$, что $f_{k+1} = \overline{x_1}$, $f_{k+2} = x_1$, откуда следует равенство $h = f_1 + \dots + f_k + f_{k+1} + f_{k+2}$. Поэтому $h \in [L_0]_F$. Противоречие. Следовательно, предположение неверно, и $h \in [L_0]_F$. Таким образом, имеет место соотношение $[L]_F \cap [T_0]_F \subseteq [L_0]_F$. $\square$

Утверждение 14. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[SL]_F = [L]_F \cap [S]_F$.*

Доказательство. Соотношение $[SL]_F \subseteq [L]_F \cap [S]_F$ следует из лемм 6 и 7.

Пусть $h(x_1,\dots,x_n) \in [L]_F \cap [S]_F$, $n \geq 1$. Докажем, что $h \in [SL]_F$. Пусть $h \notin [SL]_F$. Поскольку $h \in [L]_F$ и $h \notin [SL]_F$, то существуют такие функции $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots, f_{2k}(x_1,\dots,x_n) \in F$, $k \geq 0$, что

$$h(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + f_{2k}(x_1,\dots,x_n) + c,\ c \in \{0,1\}.$$

Рассмотрим следующие два случая.

Пусть существует такая функция $f(x_1,\dots,x_n) \in F$, что верно равенство $f(0,\dots,0) = f(1,\dots,1)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x,\dots,x)$. Заметим, что $g \in F$ и $g \in \{0,1\}$. Значит, существует такая функция $f_{2k+1}(x_1,\dots,x_n) \in F$, что $f_{2k+1} = c'$, где $c' \in \{0,1\}$. Следовательно, $h = f_1 + \dots + f_{2k} + f_{2k+1} + (c + c')$. Поэтому $h \in [SL]_F$. Противоречие.

Пусть теперь для любой функции $f(x_1,\dots,x_n) \in F$ выполняется равенство $f(0,\dots,0) = \overline{f}(1,\dots,1)$. Тогда

$$\begin{aligned} h(0,\dots,0) &= f_1(0,\dots,0) + \dots + f_{2k}(0,\dots,0) + c = \\ &= (f_1(1,\dots,1) + 1) + \dots + (f_{2k}(1,\dots,1) + 1) + c = \\ &= f_1(1,\dots,1) + \dots + f_{2k}(1,\dots,1) + c = h(1,\dots,1). \end{aligned}$$

Таким образом, $h(0,\dots,0) = h(1,\dots,1)$. Из соотношения $h \in [S]_F$ и леммы 2 следует, что существуют такая функция $g(x_1,\dots,x_m) \in S$, $m \geq 1$, и такие функции $r_1(x_1,\dots,x_n),\dots,r_m(x_1,\dots,x_n) \in F$, что $h =$

$g(r_1, \ldots, r_m)$. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} h(0, \ldots, 0) = g(r_1(0, \ldots, 0), \ldots, r_m(0, \ldots, 0)) = \\ = g(\overline{r}_1(1, \ldots, 1), \ldots, \overline{r}_m(1, \ldots, 1)) = \\ = \overline{g}(r_1(1, \ldots, 1), \ldots, r_m(1, \ldots, 1)) = \overline{h}(1, \ldots, 1), \end{aligned}$$

что противоречит доказанному ранее равенству.

В обоих случаях получено противоречие предположению о том, что $h \notin [SL]_F$. Следовательно, предположение не верно, и выполняется соотношение $h \in [SL]_F$. □

Утверждение 15. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство* $[L_{01}]_F = [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F$.

Доказательство. Соотношение $[L_{01}]_F \subseteq [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F$ следует из лемм 6 и 7.

Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F$, $n \geq 1$. Докажем, что имеет место соотношение $h \in [L_{01}]_F$. Пусть $h \notin [L_{01}]_F$. Тогда из соотношений $h \in [L_0]_F$ и $h \notin [L_{01}]_F$ следует существование таких функций $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{2k}(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $k \geq 0$, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f_{2k}(x_1, \ldots, x_n).$$

Из соотношений $h \in [L_1]_F$, $h \notin [L_{01}]_F$ и леммы 2 следует существование таких функций $f'_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f'_{2m}(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $m \geq 0$, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f'_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f'_{2m}(x_1, \ldots, x_n) + 1.$$

Рассмотрим следующие два случая.

Пусть существует такая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, что верно равенство $f(0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x, \ldots, x)$. Заметим, что $g \in F$ и $g \in \{0, 1\}$. Значит, F содержит либо функцию $f_{2k+1}(x_1, \ldots, x_n)$, такую, что $f_{2k+1} = 0$, либо функцию $f'_{2m+1}(x_1, \ldots, x_n)$, такую, что $f'_{2m+1} = 1$. Поэтому либо $h = f_1 + \ldots + f_{2k} + f_{2k+1}$, либо $h = f'_1 + \ldots + f'_{2m} + f'_{2m+1}$. Следовательно, $h \in [L_{01}]_F$. Противоречие.

Пусть теперь для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ выполняется равенство $f(0, \ldots, 0) = \overline{f}(1, \ldots, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} h(0, \ldots, 0) = f_1(0, \ldots, 0) + \ldots + f_{2k}(0, \ldots, 0) = \\ = (f_1(1, \ldots, 1) + 1) + \ldots + (f_{2k}(1, \ldots, 1) + 1) = \\ = f_1(1, \ldots, 1) + \ldots + f_{2k}(1, \ldots, 1) = h(1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Таким образом, $h(0, \ldots, 0) = h(1, \ldots, 1)$. Из соотношения $h \in [S]_F$ следует, что существуют такая функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in S$, $m \geq 1$, и такие функции $r_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, r_m(x_1, \ldots, x_n) \in F$, что $h = g(r_1, \ldots, r_m)$.

Тогда

$$h(0,\dots,0) = g(r_1(0,\dots,0),\dots,r_m(0,\dots,0)) = \\ = g(\overline{r}_1(1,\dots,1),\dots,\overline{r}_m(1,\dots,1)) = \\ = \overline{g}(r_1(1,\dots,1),\dots,r_m(1,\dots,1)) = \overline{h}(1,\dots,1),$$

что противоречит доказанному ранее равенству.

В обоих случаях получено противоречие предположению о том, что $h \notin [L_{01}]_F$. Следовательно, предположение не верно, и выполняется соотношение $h \in [L_{01}]_F$. □

Утверждение 16. *Для любого инвариантного класса F выполнены равенства* $[D_0]_F = [T_0]_F \cap [D]_F$.

Доказательство. Соотношение $[D_0]_F \subseteq [T_0]_F \cap [D]_F$ следует из лемм 6 и 7.

Докажем соотношение $[T_0]_F \cap [D]_F \subseteq [D_0]_F$. Пусть $1 \in F$. Тогда согласно лемме 5 выполняются равенства $[D_0]_F = [D_0 \cup C_1]_F = [D]_F$, откуда следует требуемое соотношение.

Пусть $1 \notin F$. Предположим, что $[T_0]_F \cap [D]_F \not\subseteq [D_0]_F$. Следовательно, $[D_0]_F \neq [D]_F$. Из леммы 4 следует равенство $[D]_F = [D_0]_F \cup C_1$. Поскольку $[D_0]_F \neq [D]_F$, то $C_1 \not\subseteq [D_0]_F$. Значит, $C_1 \subseteq [T_0]_F$. Отсюда и из соотношения $1 \notin F$ согласно лемме 10 следует, что $\overline{x} \in F$. Несложно видеть, что $x \vee \overline{x} = 1 \in [D_0]_F$. Противоречие. Следовательно, $[T_0]_F \cap [D]_F \subseteq [D_0]_F$. □

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Утверждение 17. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство* $[MO_0^m]_F = [T_0]_F \cap [MO^m]_F$.

Утверждение 18. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство* $[SU]_F = [S]_F \cap [U]_F$.

Доказательство. Соотношение $[SU]_F \subseteq [S]_F \cap [U]_F$ следует из лемм 6 и 7.

Докажем соотношение $[S]_F \cap [U]_F \subseteq [SU]_F$. Пусть $\widetilde{C} \in \{C_0, C_1\}$ и $\widetilde{C} \subseteq F$. Заметим, что в этом случае согласно лемме 5 выполняется равенство $[SU]_F = [SU \cup \widetilde{C}]_F$. Значит, $[SU]_F = [U]_F$, откуда следует требуемое соотношение.

Пусть $1 \notin F$, $0 \notin F$. Предположим, что $[S]_F \cap [U]_F \not\subseteq [SU]_F$. Тогда $[SU]_F \neq [U]_F$. Из леммы 4 следует равенство $[U]_F = [SU]_F \cup C$. Поскольку $[S]_F \cap [U]_F \not\subseteq [SU]_F$, то либо $0 \notin [SU]_F$ и $0 \in [S]_F \cap [U]_F$, либо $1 \notin [SU]_F$ и $1 \in [S]_F \cap [U]_F$. Не умаляя общности будем считать, что $1 \notin [SU]_F$ и $1 \in [S]_F \cap [U]_F$. Значит, $1 \in [S]_F$. Отсюда согласно лемме 9 следует, что $0 \in F$ или $1 \in F$. Противоречие. Следовательно, $[S]_F \cap [U]_F \subseteq [SU]_F$. □

Утверждение 19. *Пусть* A *и* B *— замкнутые классы, такие, что* $A \neq B$, $A = B \cap O^m$, $B = A \cup C_0$, $m \in \{2, \ldots, \infty\}$. *Тогда для любого инвариантного класса* F *выполнено равенство* $[A]_F = [B]_F \cap [O^m]_F$.

Доказательство. Соотношение $[A]_F \subseteq [O^m]_F \cap [B]_F$ следует из лемм 6 и 7.

Докажем соотношение $[O^m]_F \cap [B]_F \subseteq [A]_F$. Пусть $0 \in F$. Тогда согласно лемме 5 выполняются равенства $[A]_F = [A \cup C_0]_F = [B]_F$, откуда следует требуемое соотношение.

Пусть $0 \notin F$. Предположим, что $[O^m]_F \cap [B]_F \not\subseteq [A]_F$. Следовательно, $[A]_F \neq [B]_F$. Из леммы 4 следует равенство $[B]_F = [A]_F \cup C_0$. Поскольку $[A]_F \neq [B]_F$, то $0 \notin [A]_F$. Значит, $0 \in [O^m]_F$. Отсюда согласно лемме 11 следует, что $0 \in F$. Противоречие. Следовательно, $[O^m]_F \cap [B]_F \subseteq [A]_F$. □

Следствие 7. *Для любого инвариантного класса* F *выполнены равенства*

$$[D_1]_F = [D]_F \cap [O^2]_F, \quad [D_{01}]_F = [D_0]_F \cap [O^2]_F,$$
$$[U_1]_F = [MU]_F \cap [O^2]_F, \quad [U_{01}]_F = [U_0]_F \cap [O^2]_F,$$
$$[C_1]_F = [C]_F \cap [O^2]_F.$$

Доказательство. Заметим, что имеют место соотношения $D_1 = D \cap O^2$, $D = D_1 \cup C_0$. Из утверждения 19 следует, что $[D_1]_F = [D]_F \cap [O^2]_F$. Остальные равенства доказываются аналогично. □

5. Доказательство критерия универсальной разложимости

В приведенных выше утверждениях критерий универсальной разложимости доказан для большинства случаев. Опираясь на эти утверждения докажем теперь сформулированную в разделе 1 теорему.

Пусть A — универсально разложимый замкнутый класс булевых функций. Тогда существуют такие отличные от A замкнутые классы $C_1, \ldots, C_m$, $m \geq 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение $[A]_F = [C_1]_F \cap \ldots \cap [C_m]_F$. Из этого соотношения следует равенство $A = C_1 \cap \ldots \cap C_m$, откуда следует, что любой универсально разложимый класс является разложимым.

Докажем, что любой разложимый класс является универсально разложимый. Пусть A — разложимый замкнутый класс. Нетрудно показать (см., например, [21, 19, 15]), что множество разложимых замкнутых классов булевых функций, отличных от класса MU, исчерпывается следующим списком:

1) M_1, M_{01}, T_{01};

2) MO^m, O_0^m, MO_0^m, $m = 2, 3, \ldots, \infty$;
3) S_{01}, SM;
4) L_0, L_{01}, SL;
5) D_1, D_0, D_{01}, U_1, U_{01}, C_1, SU;
6) M_0, MI^m, I_1^m, MI_1^m, K_1, K_0, K_{01}, L_1, U_0, C_0, $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Пусть A — один из классов первой группы. Если $A = T_{01}$, то утверждение теоремы следует из следствия 1; если $A = M_1$ или $A = M_{01}$, то из следствия 2.

Пусть A — один из классов второй группы. Если $A = O_0^m$, то утверждение теоремы следует из следствия 3; если $A = MO^m$, то из следствия 4; если $A = MO_0^m$, то из утверждения 17 ($2 \leq m \leq \infty$).

Пусть A — один из классов третьей группы. Если $A = S_{01}$, то утверждение теоремы следует из следствия 5; если $A = SM$, то из следствия 6.

Пусть A — один из классов четвертой группы. Если $A = L_0$, то утверждение теоремы следует из утверждения 13; если $A = SL$, то из утверждения 14; если $A = L_{01}$, то из утверждения 15.

Пусть A — один из классов пятой группы. Если $A = D_0$, то утверждение теоремы следует из утверждения 16; если $A = SU$, то из утверждения 18; если $A \in \{D_1, D_{01}, U_1, U_{01}, C_1\}$, то из следствия 7.

Пусть A — один из классов шестой группы. Тогда утверждение теоремы следует из доказанных ранее случаев и принципа двойственности.

Докажем теперь, что класс MU не является универсально разложимым. Пусть F — множество всех булевых функций, получаемых из функций 0, 1, x, $x+1$, $x \to y$, $x+y$, $x\&y$, $\overline{x}\&\overline{y}$ операциями введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Очевидно, что F является инвариантным классом. Пусть $h(x,y) = x+y+1$. Заметим, что $[MU]_F = F$. Поэтому $h \notin [MU]_F$. Докажем, что для любого замкнутого класса A, такого, что $MU \subset A$, имеет место соотношение $h \in [A]_F$. Докажем это утверждение для классов U, K и D. Заметим, что имеют место соотношения

$$h(x,y) = (x+y)+1 = (x \to y)\&(y \to x) = (x\&y) \vee (\overline{x}\&\overline{y}).$$

Поэтому $h \in [U]_F$, $h \in [K]_F$, $h \in [D]_F$. Заметим, что для любого замкнутого класса A, такого, что $MU \subset A$, выполняется одно из соотношений $[U]_F \subseteq [A]_F$, $[K]_F \subseteq [A]_F$, $[D]_F \subseteq [A]_F$. Поэтому $h \in [A]_F$. Таким образом, не существует таких отличных от MU замкнутых классов $C_1, \ldots, C_m$, $m \geq 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение $[MU]_F = [C_1]_F \cap \ldots \cap [C_m]_F$. Следовательно, класс MU не является универсально разложимым. Теорема доказана.

Список литературы

1. Акулов Я. В. О полноте систем функций для классов расширенной суперпозиции / Я. В. Акулов // Вестн. МГУ. Математика. Механика. – 2011. – № 1. – С. 36–41.
2. Голунков Ю. В. Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики / Ю. В. Голунков // Вероятност. методы и кибернетика. – 1980. – Вып. 17. – С. 23–34.
3. Касим-Заде О. М. О метрических свойствах обобщенных инвариантных классов / О. М. Касим-Заде // Математические вопросы кибернетики. – М. : Наука. – 2006. – Вып. 15. – С. 9–34.
4. Кузнецов Ю. В. О классах булевых функций, инвариантных относительно отождествления переменных / Ю. В. Кузнецов // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 290, № 4. – С. 780–785.
5. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости / А. В. Кузнецов // Логический вывод. – М. : Наука, 1979. – С. 5–33.
6. Марченков С. С. Основные отношения S-классификации функций многозначной логики / С. С. Марченков // Дискрет. математика. – 1996. – Т. 8, № 1. – С. 99–128.
7. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций / С. С. Марченков, А. Б. Угольников. – М. : Изд-во ИПМ АН СССР, 1990.
8. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций / С. С. Марченков. – М. : Физматлит, 2000.
9. Нгуен Ван Хоа О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами / Нгуен Ван Хоа // Дискрет. математика. – 1993. – Т. 5, № 4. – С. 87–108.
10. Соловьев В. Д. Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикатам / В. Д. Соловьев // Дискрет. математика. – 1990. – Т. 2, № 4. – С. 18–25.
11. Тайманов В. А. О функциональных системах k-значной логики с операциями программного типа / В. А. Тайманов // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 268, № 6. – С. 1307–1310.
12. Тарасова О. С. Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции / О. С. Тарасова // Вестн. МГУ. Математика. Механика. – 2001. – № 6. – С. 54–57.
13. Тарасова О. С. Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок / О. С. Тарасова // Математические вопросы кибернетики. – М.: Физматлит, 2004. – Вып. 13. – С. 59–112.
14. Угольников А. Б. О замкнутых классах Поста / А. Б. Угольников // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 7 (314). — С. 79–88.
15. Угольников А. Б. Классы Поста / А. Б. Угольников. – М. : Изд-во ЦПИ при мех.-мат. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008.
16. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высш. шк., 2006.
17. Яблонский С. В. О классах функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию / С. В. Яблонский // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, № 6 (78) – С. 189–196.
18. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем / С. В. Яблонский // Проблемы кибернетики. – 1959. – Вып. 2 – С. 75–121.
19. Яблонский С. В. Функции алгебры логики и классы Поста / С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев. – М. : Наука, 1966.

20. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса / Ю. И. Янов, А. А. Мучник // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
21. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. – Princeton-London : Princeton Univ. Press, 1941. – Vol. 5.

Y. V. Akulov
Criteria of decomposability of the Post's clones

Abstract. Problem of realization of Boolean functions using the formulas of special kind is considered in this paper. Notion of completion of the systems of Boolean functions is introduced. Criteria of decomposability of the completions to the intersection of simpler completions is obtained.
Keywords: paper, contains

Акулов Ярослав Викторович Кафедра дискретной математики, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы тел.: +7(916)4437467 (smileyarik@yandex.ru)

Akulov Yaroslav, Moscow State University, 119991, Moscow, Leninskie gory 1 Phone: +7(916)4437467 (smileyarik@yandex.ru)