Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 109—116

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.922, 517.926

Детектируемость линейных систем дифференциально-алгебраических уравнений *

П. С. Петренко
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Аннотация. Рассматривается нестационарная наблюдаемая система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной в области определения матрицей при производной искомой вектор-функции. Исследуется свойство детектируемости такой системы в предположениях, обеспечивающих существование структурной формы, в которой разделены "дифференциальная" и "алгебраическая" подсистемы.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения; структурная форма; детектируемость.

1. Введение

Рассматривается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0, \;\; t \in T = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами и наблюдаемым скалярным выходом

$$y(t) = c^{\top}(t)x(t). \tag{1.2}$$

Здесь $A(t), B(t)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы; $x(t)$ — искомая, а $c(t)$ — заданная n-мерные вектор-функции; $\top$ — символ транспонирования. Предполагается, что $\det A(t) \equiv 0$. Системы вида (1.1) называются системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). В данной работе под мерой неразрешенности ДАУ (1.1) относительно

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00287), Программы Президиума РАН (проект № 17.1) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011).

производной искомой вектор-функции понимается индекс дифференцирования [3].

Детектируемость нестационарных систем, разрешененных относительно производной, исследовалась, в частности, в работах [1, 4, 5]. Применительно к системам ДАУ критерии детектируемости получены в монографии [6] для систем с постоянными коэффициентами и регулярным матричным пучком.

2. Эквивалентная форма

В этом разделе приведены вспомогательные сведения, касающиеся эквивалентной структурной формы для систем линейных ДАУ. В последующих разделах эта форма используется для получения основных результатов. Введем в рассмотрение следующие матрицы

$$\mathbf{D}_{r,z}(t)=\begin{pmatrix} C_1^1A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1A'(t)+C_2^2B(t) & C_2^2A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1A^{(r-1)}(t)+C_r^2B^{(r-2)}(t) & C_r^2A^{(r-2)}(t)+C_r^3B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^rA(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{r,y}(t)=\begin{pmatrix} C_0^0A(t) & O \\ \begin{pmatrix} C_1^0A'(t)+C_1^1B(t) \\ \vdots \\ C_r^0A^{(r)}(t)+C_r^1B^{(r-1)}(t) \end{pmatrix} & \mathbf{D}_{r,z}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{r,x}(t)=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) \\ B'(t) \\ \vdots \\ B^{(r)}(t) \end{pmatrix} & \mathbf{D}_{r,y}(t) \end{pmatrix},$$

имеющие размерности $nr\times nr$, $n(r+1)\times n(r+1)$ и $n(r+1)\times n(r+2)$ соответственно. Здесь и далее $C_i^j=\dfrac{i!}{j!(i-j)!}$.

Допустим, что для некоторого r $(0\le r\le n)$ выполняются условия $\operatorname{rank}\mathbf{D}_{r,z}(t)=\rho=\mathrm{const}\quad\forall t\in T$ и в матрице $\mathbf{D}_{r,x}(t)$ имеется неособенный для всех $t\in T$ минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя ρ столбцов матрицы $\mathbf{D}_{r,z}(t)$ и n первых столбцов матрицы $\operatorname{rank}\mathbf{D}_{r,y}(t)$.

Определение 1. *Неособенный для всех $t\in T$ минор $n(r+1)$-го порядка матрицы $\mathbf{D}_{r,x}(t)$, включающий в себя ρ столбцов матрицы $\mathbf{D}_{r,z}(t)$ и n первых столбцов матрицы $\mathbf{D}_{r,y}(t)$, будем называть разрешающим минором.*

Допустим, что известно, какие именно столбцы матрицы $\mathbf{D}_{r,x}(t)$ входят в разрешающий минор. Обозначим $d = nr - \rho$. Далее будем предполагать, что $d < n$. Вычеркнем $n - d$ столбцов матрицы

$$\operatorname{colon}\left(B(t), B'(t), \ldots, B^{(r)}(t)\right) = \left(B(t)^\top \ (B'(t))^\top \ \ldots \ (B^{(r)}(t))^\top\right)^\top,$$

которые не входят в упомянутый минор. После соответствующей перестановки столбцов из $\mathbf{D}_{r,x}(t)$ получим матрицу

$$\Lambda_r(t) = \mathbf{D}_{r,x}(t) \operatorname{diag}\left(Q \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix}, Q, \ldots, Q\right),$$

где Q — матрица перестановок. Обозначим через $\Lambda_{r-1}(t)$ матрицу, полученную из $\Lambda_r(t)$ вычеркиванием последних n строк:

$$\Lambda_{r-1}(t) = (E_{nr} \ \ O)\Lambda_r(t),$$

а через $\Theta_{r-1}(t)$ — матрицу, полученную из $\Lambda_{r-1}(t)$ вычеркиванием первых n столбцов:

$$\Theta_{r-1}(t) = \Lambda_{r-1}(t) \begin{pmatrix} O \\ E_{nr+d} \end{pmatrix}.$$

В работе [2] показано, что при определенных предположениях существует линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_{r-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{r-1}, \tag{2.1}$$

преобразующий ДАУ (1.1), (1.2) к виду

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0, \tag{2.2}$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) = 0, \tag{2.3}$$

$$y(t) = (c_1^\top(t) \ \ c_2^\top(t)) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где

$$\operatorname{colon}(x_1(t) \ \ x_2(t)) = Q^{-1}x(t), \ \ \operatorname{colon}(c_1(t) \ \ c_2(t)) = Q^\top c(t), \tag{2.5}$$

$x_1(t)$ и $c_1(t)$ — $(n-d)$-мерные вектор-функции, а $x_2(t)$ и $c_2(t)$ — d-мерные;

$$\begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} = (R_0(t) \ R_1(t) \ \ldots \ R_{r-1}(t))\times$$

$$\times\operatorname{colon}\left(B(t), B'(t), \ldots, B^{(r-1)}(t)\right) Q \begin{pmatrix} E_{n-d} \\ O \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

При этом матрицы $R_j(t)$ непрерывно дифференцируемы и в соответствии с разрешающим минором определяются единственным образом по формуле

$$(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \ldots\ \ R_{r-1}(t)) = (E_n\ \ O\ \ \ldots\ \ O)\Lambda_{r-1}^\top(t)\left(\Lambda_{r-1}(t)\Lambda_{r-1}^\top(t)\right)^{-1}.$$

Подставив выражение $x_2(t) = -J_2(t)x_1(t)$, полученное из (2.3), в равенство (2.4), получим выражение для выходной функции, не зависящее от $x_2(t)$,

$$y(t) = \left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_2(t)\right)x_1(t). \tag{2.7}$$

Теорема 1. [2] *Пусть:*
1) $A(t), B(t), c(t) \in \mathbf{C}^{2r-1}(T)$*;*
2) $\mathrm{rank}\mathbf{D}_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}\ \forall t \in T$*;*
3) в матрице $\mathbf{D}_{r,x}(t)$ *имеется разрешающий минор;*
4) $\mathrm{rank}\,\Theta_{r-1}(t) = n(r-1)\ \forall t \in T$.

Тогда любое решение системы (1.1) будет решением системы (2.2), (2.3) и наоборот. Кроме того, существует оператор

$$\mathcal{M} = M_0(t) + M_1(t)\frac{d}{dt} \tag{2.8}$$

такой что:

$$\mathcal{M}[R_0(t)\delta(t) + R_1(t)\delta'(t) + \ldots + R_{r-1}(t)\delta^{(r-1)}(t)] = \delta(t)\ \ \forall\delta(t) \in \mathbf{C}^{r-1}(T),$$

где $M_0(t), M_1(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *—* $(n \times n)$*-матрицы.*

Коэффициенты $M_0(t), M_1(t)$ находятся по формулам, полученным в статье [2].

Определение 2. *Систему (2.2), (2.3) будем называть эквивалентной формой для ДАУ(1.1).*

3. Условия детектируемости

В этом разделе получены условия детектируемости системы (1.1), (1.2). Пусть функция $y(t)$ из (1.2) подается на вход системы управления

$$\tilde{A}(t)z'(t) + \tilde{B}(t)z(t) + l(t)u(t) = 0,$$

в результате чего получается уравнение

$$\tilde{A}(t)z'(t) + \tilde{B}(t)z(t) + l(t)y(t) = 0,\ \ t \in T, \tag{3.1}$$

где $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, а $l(t)$ — n-мерная вектор-функция, обладающие достаточной гладкостью, $t_0 > 0$ — фиксированный момент времени.

Обозначим

$$e(t) = x(t) - z(t), \tag{3.2}$$

где $e(t) \in \mathbf{C}^1(T)$.

Определение 3. *Решением системы (1.1) называется n-мерная век- -тор-функция $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, обращающая (1.1) в тождество при подстановке.*

Определение 4. *Говорят, что система (3.1) асимптотически оценивает состояние системы (1.1), (1.2) если для любого решения $x(t)$ системы (1.1) справедливо предельное соотношение $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Из (3.2) следует

$$e'(t) = x'(t) - z'(t). \tag{3.3}$$

Положим в (3.1) $\tilde{A}(t) = A(t)$. Умножим (3.3) слева на $A(t)$, а затем в полученное выражение подставим

$$A(t)x'(t) = -B(t)x(t), \;\; A(t)z'(t) = -\tilde{B}(t)z(t) - l(t)y(t).$$

В результате будем иметь

$$A(t)e'(t) = -B(t)x(t) - \tilde{B}(t)(e(t) - x(t)) + l(t)c^\top(t)x(t). \tag{3.4}$$

Пусть $\tilde{B}(t) = B(t) - l(t)c^\top(t)$, тогда уравнение (3.4) примет вид

$$A(t)e'(t) + \Big(B(t) - l(t)c^\top(t)\Big)\, e(t) = 0. \tag{3.5}$$

Асимптотическое оценивание состояния системы (1.1), (1.2) с помощью системы (3.1) возможно, когда для некоторой вектор-функции $l(t)$ система (3.5) асимтотически устойчива.

Определение 5. *Система (1.1), (1.2) называется детектируемой, если существует такая достаточно гладкая n-мерная вектор-функция $l(t)$, что система (3.5) асимптотически устойчива.*

Пусть для системы (1.1) выполнены все предположения теоремы 1 при $r = 1$. Тогда оператор (2.1) будет иметь вид

$$\mathcal{R} = R_0(t). \tag{3.6}$$

Подействовав оператором (3.6) на ДАУ (3.5), получим систему

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) + J_1(t)e_1(t) \\ e_2(t) + J_2(t)e_1(t) \end{pmatrix} - R_0(t)l(t)c^\top(t)e(t) = 0, \tag{3.7}$$

где
$$\mathrm{colon}(e_1(t)\ \ e_2(t)) = Q^{-1}e(t), \tag{3.8}$$
$e_1(t)$ и $e_2(t)$ имеют размерности $n-d$ и d соответственно, Q — матрица перестановок из (2.5); $J_1(t), J_2(t)$ определяются из (2.6).

Положим в (3.7)
$$R_0(t)l(t) = \tilde{l}(t), \tag{3.9}$$
где $\tilde{l}(t)$ — некоторая вектор-функция из пространства $\mathbf{C}^1(T)$ размерности n. Тогда уравнение (3.7) примет вид
$$\begin{pmatrix} e_1'(t) + J_1(t)e_1(t) \\ e_2(t) + J_2(t)e_1(t) \end{pmatrix} - \tilde{l}(t)c^\top(t)e(t) = 0. \tag{3.10}$$

Функцию $\tilde{l}(t)$ будем искать в виде $\tilde{l}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{l}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\tilde{l}_1(t)$ — пока неизвестная $(n-d)$-мерная вектор-функция. Тогда система (3.10) может быть записана в виде
$$e_1'(t) + J_1(t)e_1(t) - \tilde{l}_1(t)(c_1^\top(t)e_1(t) + c_2^\top(t)e_2(t)) = 0, \tag{3.11}$$
$$e_2(t) + J_2(t)e_1(t) = 0, \tag{3.12}$$
где $c_1(t), c_2(t)$ определяются из (2.5).

Из (3.12) найдем $e_2(t) = -J_2(t)e_1(t)$ и подставим в уравнение (3.11)
$$e_1'(t) + \Big(J_1(t) - \tilde{l}_1(t)(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_2(t))\Big)\, e_1(t) = 0. \tag{3.13}$$

Согласно определению, система (2.2), (2.7) будет детектируемой, если найдется такая вектор-функция $\tilde{l}_1(t)$, что система (3.13) будет асимптотически устойчива. Будем строить $\tilde{l}_1(t)$ в (3.13) по алгоритму, предложенному в [2, с.313-314] для системы, разрешенной относительно производной.

Сформулируем теорему [2, с. 314], представляющую собой достаточное условие детектируемости применительно к системе (2.2), (2.7). Для этого определим матрицу наблюдаемости для системы (2.2)
$$\mathcal{S}(t) = \mathrm{colon}(S_0(t)\ \ S_1(t)\ \ \ldots\ \ S_{n-d-1}(t)), \tag{3.14}$$
где
$$S_0(t) = c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_2(t), \quad S_i(t) = -S_{i-1}(t)J_1(t) + S_{i-1}', \quad i = 1, \ldots, n-d. \tag{3.15}$$
Если матрица $\mathcal{S}(t)$ обратима, определим вектор-функцию
$$\omega(t) = \mathcal{S}^{-1}(t)S_{n-d}(t) = \mathrm{colon}(\omega_1(t), \ldots, \omega_{n-d}(t)), \tag{3.16}$$
где $\omega_i(t) (i = 1, \ldots, n-d)$ — скалярные функции.

Напомним, что некоторая обратимая $\forall t \in T$ $(n \times n)$-матрица $X(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ является матрицей Ляпунова тогда и только тогда, когда она ограничена и $|\det X(t)| \geq \sigma = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 2. *Пусть:*
1) $J_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(T); c(t), J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$*;*
2) $\mathcal{S}(t)$ *— матрица Ляпунова;*
3) в (3.16) функции $\omega_i(t)$ $i-1$ *раз непрерывно дифференцируемы и ограничены на* T *вместе со своими производными до* $i-1$ *порядка включительно.*

Тогда система (2.2), (2.7) детектируема.

Используем теорему 2 для получения условий детектируемости ДАУ (1.1), (1.2).

Теорема 3. *Пусть:*
1) $A(t) \in \mathbf{C}^1(T); B(t), c(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$*;*
2) выполнены условия 2)—4) теоремы 1 при $r=1$*;*
3) выполнены условия 2), 3) теоремы 2;
4) $\|J_2(t)\| \leq k = \mathrm{const},\ \ t \in T$*.*

Тогда система (1.1), (1.2) детектируема.

Доказательство. В сделанных предположениях для системы (2.2), (2.7) выполняются все условия теоремы 2, в соответствии с которой система (2.2), (2.7) является детектируемой. Это означает, что найдется вектор-функция $\tilde{l}_1(t)$ такая, что система (3.13) будет асимптотически устойчива. Условие 4) теоремы гарантирует, что в этом случае будет асимптотически устойчива система (3.12), а следовательно и система (3.11). Тогда при $\tilde{l}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{l}_1(t) \\ O \end{pmatrix}$ будет асимптотически устойчива и система (3.10). В сделанных предположениях существует оператор (2.8) — левый обратный для оператора (2.1). Подействовав оператором (2.8) на уравнение (3.9), найдем вектор $l(t)$:

$$\mathcal{M}[R_0(t)l(t)] = l(t) = \mathcal{M}[\tilde{l}(t)], \tag{3.17}$$

который определяется единственным образом. По построению системы (3.5) и (3.10) экивалентны в смысле устойчивости. Таким образом, выбирая $l(t)$ согласно (3.17), гарантируем, что система (3.5) будет также асимптотически устойчива. Согласно определению 5 это означает детектируемость системы (1.1), (1.2). Теорема доказана. □

Список литературы

1. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – Минск : Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 1999. – 409 с.

2. Щеглова А. А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами / А. А. Щеглова // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 9. – С. 57–70.
3. Brenan K. E. Numerical solutions of initial-value problems in differential-algebraic equations / K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold. – Philadelphia : SIAM, 1996.
4. Ikeda M. Estimation and feedback in linear time-varying systems: a deterministic theory / M. Ikeda, H. Maeda, S.Kodama // SIAM J. on Contr. and Opt. – 1975. – Vol. 13, N 2. – P. 304–326.
5. Johnson G.W. A deterministic theory of estimation and control / G. W. Johnson // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1969. – Vol. AC-14, N 4. – P. 380–384.
6. Dai L. Singular control system / L. Dai // Lecture notes in control and information sciences, 118. – Berlin, Heidelberg ; N. Y. : Springer-Verlag. – 1989. – 332 p.

P. S. Petrenko

Detectability of linear systems of differential-algebraic equations

Abstract. We consider an observed time varying system of linear ordinary differential equations with an identically degenerate matrix coefficient preceding the derivative of the desired vector function. We study detectability of such system under the assumptions of existence of a structural form, which are devided into "differential" and "algebraic" subsystems.

Keywords: differential-algebraic equations; structural form; detectability.

Петренко Павел Сергеевич
аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134 (petrenko_p@mail.ru)

Petrenko Pavel
post-graduate student, Institute for System Dynamics and Control Theory Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 (petrenko_p@mail.ru)