Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 97—108

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716.2

Об одном семействе классов монотонных функций многозначной логики, не имеющих конечного базиса

Д. Ю. Панин
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. В работе исследуются свойства классов функций многозначной логики монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два.

Ключевые слова: многозначная логика; монотонные функции; конечный базис; континуальные цепи.

1. Введение

Из работ Э. Поста [9, 10] следует, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис. В многозначной логике построены примеры замкнутых классов, не являющихся конечно порожденными (см. [6]). Известно, что каждый предполный класс в P_k при $k \leq 7$ имеет конечную порождающую систему (см. например [8]). В работе [14] приводится пример частично упорядоченного множества Q_8, состоящего из восьми элементов, такого что M^{Q_8} (предполный класс функций монотонных относительно Q_8) не является конечно порожденным. В [3] определяется семейство $\mathfrak{A}$ всех частично упорядоченных множеств Q ширины 2, таких, что класс M^Q не имеет конечной порождающей системы (см. также [1, 2]). В данной работе продолжаются исследования в этом направлении. А именно, для каждого множества Q из семейства $\mathfrak{A}$ строится класс $\mathfrak{M}_e^Q$, такой, что 1) любой замкнутой класс A, удовлетворяющий соотношению $\mathfrak{M}_e^Q \subseteq A \subseteq M^Q$, не является конечно порожденным, 2) найдется континуальная (по включению) цепь из замкнутых классов A, таких, что $\mathfrak{M}_e^Q \subseteq A \subseteq M^Q$. Кроме того, в работе рассматривается некоторый класс монотонных функций, не имеющий конечного базиса. Для множества всех одноместных функций из рассматриваемого класса приводится критерий полноты.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Будем обозначать через $\mathbb{A}$ семейство всех конечных частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами. Наибольший и наименьший элементы элементы множества $P \in \mathbb{A}$ будем обозначать через 0 и 1 соответственно. Шириной частично упорядоченного множества P называется максимальное число попарно несравнимых элементов из P. Будем обозначать через $\mathbb{A}_2$ подсемейство семейства $\mathbb{A}$, состоящее из всех множеств, ширина которых не превосходит 2.

Пусть Q, P — частично упорядоченные множества, $Q' \subset Q$, f — некоторое отображение $Q \to P$. *Ограничением f на Q'* будем называть отображение $Q' \to P$, совпадающее с f на всех элементах множества Q' (обозначение $f|_{Q'}$).

Следуя работе [1], введем определение двойного квадрата. Пусть P — некоторое частично упорядоченное множество, a и b несравнимые элементы множества P. Элементы a и b называются 1-*несравнимыми*, если они несравнимы и не имеют точной верхней грани. Элементы a и b называются 2-*несравнимыми*, если они 1-несравнимы и найдутся две их минимальные верхние грани, являющиеся 1-несравнимыми. Пусть $x_1, x_2 \in P$, элементы x_1 и x_2 1-несравнимы. Обозначим через y_1 и y_2 две минимальные верхние грани элементов x_1, x_2. Будем обозначать множество $\{y_1, y_2\}$ через $\overrightarrow{\sup}(x_1, x_2)$. Будем говорить, что элементы $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ из множества P образуют *двойной квадрат*, если элементы a_1 и a_2 2-несравнимы, $\{b_1, b_2\} = \overrightarrow{\sup}(a_1, a_2)$, $\{c_1, c_2\} = \overrightarrow{\sup}(b_1, b_2)$.

Путь $\mathcal{P}$ произвольное множества из $\mathbb{A}_2$, содержащее шестерку элементов $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$, образующих двойной квадрат. Положим $\mathcal{P}' = \{0, \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', 1\}$. Будем обозначать через $M^{\mathcal{P}}$ замкнутый класс всех функций k-значной логики, монотонных относительно $\mathcal{P}$, где $k = |\mathcal{P}|$. В дальнейшем в обозначении $M^{\mathcal{P}}$ будем опускать индекс $\mathcal{P}$ и использовать обозначение M.

Далее, следуя [1], введем понятия зигзага и T-множества, а также определим множество $R(n)$ и частичную функцию $\widetilde{\varphi}^{2n}$ (см. также [14]). Пусть Q — произвольное частично упорядоченное множество, $Q' \subset Q$, $f' : Q' \to \mathcal{P}'$. Последовательность $X_m, \ldots, X_{m'}$ различных элементов Q будем называть *зигзагом* для f' в Q, если выполняются следующие условия:

a) $m = 0$ или $m = 1$, $m' \geq m + 2$, $0, 1 \in \mathbb{N}$;

b) $X_m, X_{m'} \in Q'$, $X_i \in Q \backslash Q'$ для всех $i = m+1, \ldots, m'-1$;

c) $f'(X_m) = \beta$, $f'(X_{m'}) = \beta'$;

d) $X_{2i} > X_{2i-1}$ для всех $2i$, $m < 2i \le m'$;

e) $X_{2i} > X_{2i+1}$ для всех $2i$, $m \le 2i < m'$;

f) для каждого $2i$, $m < 2i < m'$, найдутся $Y, Y' \in Q'$ ($Y \ne Y'$), такие что $Y, Y' > X_{2i}$, $f'(Y) = \gamma$, $f'(Y') = \gamma'$;

g) для каждого $2i+1$, $m < 2i+1 < m'$, найдутся $Z, Z' \in Q'$ ($Z \ne Z'$), такие что $Z, Z' < X_{2i-1}$, $f'(Z) = \alpha$, $f'(Z') = \alpha'$;

Величину $L = m' - m + 1$ будем называть *длиной зигзага.*

Пусть $n \ge 1$. Частично упорядоченное множество $\mathcal{R} = \{A, A', B, B', C_1, \dots, C_n, C', D_1, \dots, D_{2n+1}\}$ будем называть *T-множеством ранга n*, если выполняются следующие условия:

1) элементы A и A' несравнимы, $A, A' < D_{2i+1}$ для каждого $i = 0, \dots, n$;

2) выполняются неравенства $B > D_1$ и $B' > D_{2n+1}$; элемент B не сравним ни с одним из элементов $D_2, \dots, D_{2n+1}$; элемент B' не сравним ни с одним из элементов $D_1, \dots, D_{2n}$;

3) $D_{2i} > D_{2i+1}, D_{2i-1}$ для каждого $i = 1, \dots, n$; D_{2i} не сравним с D_j для всех $j \in \{1, \dots, 2n+1\} \setminus \{2i-1, 2i, 2i+1\}$;

4) $C_i > D_{2i}$, $C' > D_{2i}$ для каждого $i = 1, \dots, n$; C_i не сравним с D_j для всех $j \in \{1, \dots, 2n+1\} \setminus \{2i-1, 2i, 2i+1\}$;

5) C_i не сравним с B, B', C' для каждого $i = 1, \dots, n$; C' не сравним с B, B'.

Пусть $n \ge 3$, $\mathcal{L} = \{A, A', B, B', C_1, \dots, C_{n-2}, C', D_1, \dots, D_{2n-3}\}$ — T-множество ранга $n-2$. Определим множества $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ следующим образом. Положим

$$\mathcal{L}_0 = \{A, A', B, B', C_1, \dots, C_{n-2}, C'\}, \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \setminus \{B'\}, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \setminus \{B\}.$$

Обозначим через T набор $(a, a', b, b', c_1, \dots, c_n, c')$ длины $n+5$, элементы которого принадлежат множеству $\mathcal{P}$. По этому набору для каждого $i = 1, \dots, n$, определим отображение $f_i : \mathcal{L}_0 \to \mathcal{P}$: $f_i(A) = a$, $f_i(A') = a'$, $f_i(B) = b$, $f_i(B') = b'$, $f_i(C) = c'$, $f_i(C_j) = c_{k_{ij}}$, где $k_{ij} \equiv i + j - 1 \pmod n$, $j = 1, \dots, n-2$.

Обозначим через R_0 множество таких наборов T из $\mathcal{P}^{n+5}$, что для каждого $i = 1, \dots, n$ отображения $f_i|_{\mathcal{L}_1}$, $f_i|_{\mathcal{L}_2}$ можно монотонно доопределить на $\mathcal{L}$. Далее, для каждого $j = 1, \dots, n$ обозначим через R_j множество таких наборов из R_0, что отображение f_j можно монотонно доопределить на $\mathcal{L}$. Наконец, обозначим через $R(n)$ множество таких наборов T из R_0, что $T \in R_j$ для некоторого j из множества $\{1, \dots, n\}$.

Пусть $n \ge 3$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{P}^{2n}}$ подмножество множества $\mathcal{P}^{2n}$, состоящее из следующих наборов длины $2n$:

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha, \dots, \alpha), \quad \widetilde{\alpha}' = (\alpha', \dots, \alpha'),$$

$$\widetilde{\beta} = (\underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}), \quad \widetilde{\beta}' = (\underbrace{\beta', \ldots, \beta'}_{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}),$$

$$\widetilde{\gamma}_1 = (\underbrace{1, \gamma, \gamma, \ldots, \gamma}_{n}, \underbrace{1, \beta, \gamma, \ldots, \gamma, \beta'}_{n}),$$

$$\widetilde{\gamma}_2 = (\underbrace{\gamma, 1, \gamma, \ldots, \gamma}_{n}, \underbrace{\beta', 1, \beta, \gamma, \ldots, \gamma, \gamma}_{n}),$$

$$\ldots$$

$$\widetilde{\gamma}_i = (\underbrace{\gamma, \ldots, \gamma, \overset{i}{1}, \gamma, \ldots, \gamma}_{n}, \underbrace{\gamma, \ldots, \gamma, \beta', \overset{i}{1}, \beta, \gamma, \ldots, \gamma}_{n}),$$

$$\ldots$$

$$\widetilde{\gamma}_n = (\underbrace{\gamma, \ldots, \gamma, 1}_{n}, \underbrace{\beta, \gamma, \ldots, \gamma, \beta', 1}_{n}), \quad \widetilde{\gamma}' = (\gamma', \ldots, \gamma').$$

Другими словами, для каждого i, $i = 2, \ldots, n-1$, наборы $\widetilde{\gamma}_i$ определяются следующим образом: $\widetilde{\gamma}_i[i] = \widetilde{\gamma}_i[i+n] = 1$, $\widetilde{\gamma}_i[i+n-1] = \beta'$, $\widetilde{\gamma}_i[i+n+1] = \beta$, $\widetilde{\gamma}_i[j] = \gamma$ для всех остальных значений j, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$.

Далее, обозначим через $\widetilde{\varphi}^{2n}$ частичную функцию, зависящую от $2n$ переменных, определенную на множестве $\widetilde{\mathcal{P}^{2n}}$ следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\alpha}) = \alpha, \quad \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\alpha}') = \alpha',$$
$$\widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\beta}) = \beta, \quad \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\beta}') = \beta',$$
$$\widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}_1) = \cdots = \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}_n) = \gamma, \quad \widetilde{\varphi}^{2n}(\widetilde{\gamma}') = \gamma'.$$

Согласно [1] справедливы следующие три леммы.

Лемма 1. *Пусть Q — произвольное частично упорядоченное множество, $Q' \subset Q$, $f' : Q' \to \mathcal{P}'$. Тогда монотонное доопределение отображения f' на множество Q существует тогда и только тогда, когда отображение f' монотонно и в Q не существует зигзага для f'.*

Лемма 2. *Пусть $n \geq 4$. Тогда для всех значений $k < n/2$ множество $R(n)$ сохраняется всеми функциями из M от k переменных.*

Лемма 3. *Частичная функция $\widetilde{\varphi}^{2n}$ монотонна на множестве $\widetilde{\mathcal{P}^{2n}}$, и в $\mathcal{P}^{2n}$ не существует зигзага для $\widetilde{\varphi}^{2n}$.*

3. Отсутствие конечного базиса у некоторых классов монотонных функций

Пусть $1 \le i \le n$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$. Будем обозначать через $M_i^{\mathcal{T}}(n)$ множество всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$ из множества M, таких, что для любого набора $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ из $\mathcal{T}^n$ выполнено равенство $f(\delta_1, \dots, \delta_n) = \delta_i$. Положим $\mathcal{U} = \{0, 1\}$, $\mathcal{V} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{U}$. Определим множества $\mathfrak{M}_i(n)$ и $\mathfrak{M}(n)$ следующим образом. Положим

$$\mathfrak{M}_i(n) = M_i^{\mathcal{V}}(n) \cap M_i^{\mathcal{U}}(n), \quad \mathfrak{M}(n) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i(n), \quad \mathfrak{M}_e = \bigcup_{n \ge 1} \mathfrak{M}(n).$$

В этом разделе будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — произвольный замкнутый класс, такой, что $\mathfrak{M}_e \subseteq A \subseteq M$. Тогда A не является конечно порожденным.*

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько определений. Пусть $t = 2n+3$, $\widehat{U} = \mathcal{U}^t \setminus \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}$, $\widehat{V} = \mathcal{V}^t$. Определим множества W, $V_{\le}$, $V_{\ge}$ следующим образом. Положим

$$W = \bigcup_{(q_1, \dots, q_{2n}) \in \widetilde{\mathcal{P}^{2n}}} \{(q_1, \dots, q_{2n}, 0, 1, \alpha)\},$$

$$V_{\le} = \bigcup_{\lambda \in \widehat{V}} \ \bigcup_{\omega < \lambda, \omega \notin \widehat{V}} \{\omega\}, \quad V_{\ge} = \bigcup_{\lambda \in \widehat{V}} \ \bigcup_{\omega > \lambda, \omega \notin \widehat{V}} \{\omega\}.$$

Лемма 4. *Множества $V_{\le}, V_{\ge}, \widehat{U}, W$ попарно не пересекаются.*

Доказательство. Докажем, что $V_{\le}$ не пересекается с остальными множествами. Пусть $V_{\le} \cap V_{\ge} \ne \varnothing$, а $\widetilde{\omega}$ — произвольный набор из множества $V_{\le} \cap V_{\ge}$. По определению множества $V_{\le}$ найдется набор $\widetilde{\lambda} \in \widehat{V}$, такой, что $\widetilde{\omega} < \widetilde{\lambda}$. Аналогично, найдется набор $\widetilde{\mu}$ из множества $\widehat{V}$, такой, что $\widetilde{\mu} < \widetilde{\omega}$. Пусть $1 \le i \le t$. Тогда из определения частичного порядка "$\le$"следует, что выполнено неравенство $\mu_i \le \omega_i \le \lambda_i$. Так как $\mu_i, \lambda_i \in \mathcal{V}$, то из определения частичного порядка $\mathcal{P}$ следует, что $\omega_i \in \mathcal{V}$. Таким образом, $\widetilde{\omega} \in \widehat{V}$. Получили противоречие, так как из определения множества $V_{\le}$ следует, что $\widetilde{\omega} \notin \widehat{V}$. Поэтому $V_{\le} \cap V_{\ge} = \varnothing$.

Пусть $V_{\le} \cap \widehat{U} \ne \varnothing$, а $\widetilde{\omega}$ — произвольный набор из множества $V_{\le} \cap \widehat{U}$. Из определения множества $V_{\le}$ следует, что найдется набор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ из множества $\widehat{V}$, такой, что $\widetilde{\omega} < \widetilde{\lambda}$. Из определения множества $\widehat{U}$ следует, что $\omega_i \in \{0, 1\}$, $\lambda_i \in \mathcal{V}$. Так как $\omega_i \le \lambda_i$, то $\omega_i = 0$. Таким образом, $\omega = (0, \dots, 0)$. Получили противоречие с тем, что $(0, \dots, 0) \notin \widehat{U}$. Поэтому $V_{\le} \cap \widehat{U} = \varnothing$.

Пусть $V_{\leq} \cap W \neq \varnothing$. В этом случае получаем противоречие с тем, что $\omega_{t-1} = 1$, в то время, как $\omega_{t-1} \leq \lambda_{t-1}$, $\lambda_{t-1} \in \mathcal{V}$.

Аналогично доказывается, что $V_{\geq}$ не пересекается с множествами W и $\widehat{U}$.

Осталось доказать, что множества W и $\widehat{U}$ не пересекаются. Пусть ω — произвольный набор из множества W. По определению $\omega_t = \alpha$, поэтому $\omega \notin \widehat{U}$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть $n \geq 3$. Тогда существует функция $h \in \mathfrak{M}_e$ от $2n+3$ переменных, не сохраняющая множество $R(n)$.*

Доказательство. Положим $\Gamma' = W \cup V_{\leq} \cup V_{\geq} \cup \widehat{U}$. Определим отображение $g : \Gamma' \to \mathcal{P}'$ следующим образом. На наборах $\widetilde{w} = (q_1, \ldots, q_{2n}, 0, 1, \alpha)$ из множества W положим $g(\widetilde{w}) = \widetilde{\varphi}^{2n}(q_1, \ldots, q_{2n})$. На наборах $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ из множества $\widehat{U}$ положим $g(\widetilde{\lambda}) = \lambda_t$. Положим $g(\widetilde{\lambda}) = 0$, если $\widetilde{\lambda} \in V_{\leq}$, и $g(\widetilde{\lambda}) = 1$, если $\widetilde{\lambda} \in V_{\geq}$. По лемме 4 множества W, $V_{\leq}$, $V_{\geq}$, $\widehat{U}$ не пересекаются, поэтому отображение g определено корректно.

Покажем, что отображение g монотонно. Пусть $\widetilde{\delta}, \widetilde{\varepsilon}$ — произвольные наборы из множества Γ', такие, что $\widetilde{\delta} \leq \widetilde{\varepsilon}$. Докажем, что выполнено неравенство $g(\widetilde{\delta}) \leq g(\widetilde{\varepsilon})$. Если $\widetilde{\delta} \in V_{\geq}$, то из определения множества $V_{\geq}$ следует, что $\widetilde{\varepsilon} \in V_{\geq}$. Поэтому $g(\widetilde{\delta}) = 1, g(\widetilde{\varepsilon}) = 1$ и неравенство $g(\widetilde{\delta}) \leq g(\widetilde{\varepsilon})$ выполнено. Если $\widetilde{\delta} \in V_{\leq}$, то $g(\widetilde{\delta}) = 0$, поэтому неравенство $g(\widetilde{\delta}) \leq g(\widetilde{\varepsilon})$ выполнено для всех ε. Аналогичным образом, рассматриваются случаи $\widetilde{\varepsilon} \in V_{\leq}$ и $\widetilde{\varepsilon} \in V_{\geq}$.

Если $\widetilde{\delta} \in W$, $\widetilde{\varepsilon} \in W$, то неравенство $g(\widetilde{\delta}) \leq g(\widetilde{\varepsilon})$ следует из монотонности функции $\widetilde{\varphi}^{2n}$.

Если $\widetilde{\delta} \in \widehat{U}, \widetilde{\varepsilon} \in \widehat{U}$, то верны соотношения:

$$g(\widetilde{\delta}) = \delta_t \leq \varepsilon_t \leq g(\widetilde{\varepsilon}).$$

Если же $\widetilde{\delta} \in \widehat{U}, \widetilde{\varepsilon} \in W$, то из определения множества W следует, что $\varepsilon_t = \alpha$. Так как $\delta_t \in \{0, 1\}$, то $\delta_t = 0$. Поэтому $g(\widetilde{\delta}) = \delta_t = 0$ и неравенство $g(\widetilde{\delta}) \leq g(\widetilde{\varepsilon})$ выполнено. Аналогично разбирается случай $\widetilde{\delta} \in W$, $\widetilde{\varepsilon} \in \widehat{U}$. Таким образом, отображение g монотонно.

Положим $\Gamma = \mathcal{P}^t \setminus \widehat{V}$. Очевидно, что $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Докажем теперь, что для функции g не существует зигзага в Γ. Предположим противное. Пусть в Γ найдется зигзаг $X_m, \ldots, X_{m'}$ для функции g. Определим множество B следующим образом. Положим

$$B = \{X_m, X'_m\} \bigcup_{m<2i<m'} \{Y_{2i}, Y'_{2i}\} \bigcup_{m<2i+1<m'} \{Z_{2i+1}, Z'_{2i+1}\}.$$

На наборах из множеств $\widehat{U}, V_{\leq}, V_{\geq}$ функция g принимает только значения 0 или 1. Поэтому из определения зигзага следует, что $B \subseteq W$.

Обозначим через H множество всех наборов $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ из множества $\mathcal{P}^t$, таких, что $\lambda_{t-2} = 0$, $\lambda_{t-1} = 1$, $\lambda_t = \alpha$. Пусть $m < i < m'$. Докажем, что $X_i \in H$. Из определения зигзага следует, что найдутся наборы $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}$ из множества B, такие, что $\widetilde{\lambda} < X_i < \widetilde{\mu}$. Так как $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu} \in H$, то $X_i \in H$.

Определим отображение $\eta : H \to \mathcal{P}^{t-3}$ следующим образом. Пусть $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_t)$, положим $\eta(\widetilde{\delta}) = (\delta_1, \ldots, \delta_{t-3})$.

Нетрудно видеть, что $\eta(X_m), \ldots, \eta(X_{m'})$ — зигзаг для $\widetilde{\varphi}^{2n}$ в $\mathcal{P}^{2n}$. Это противоречит следствию 3, из которого следует, что для $\widetilde{\varphi}^{2n}$ не существует зигзага в $\mathcal{P}^{2n}$. Таким образом, для функции g не существует зигзага в Γ. Поэтому по лемме 1 частичную функцию g можно доопределить до монотонного отображения g_0 на Γ.

Определим функцию $h(x_1, \ldots, x_t)$ на множестве $\mathcal{P}^t$ следующим образом. Пусть $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}^t$. Если $\widetilde{\lambda} \in \widehat{V}$, то положим $h(\widetilde{\lambda}) = \lambda_t$. Если же $\widetilde{\lambda} \in \Gamma$, то положим $h(\widetilde{\lambda}) = g_0(\widetilde{\lambda})$.

Докажем, что h — монотонная функция. Пусть $\widetilde{\delta}, \widetilde{\varepsilon}$ — произвольные наборы из $\mathcal{P}^t$, такие, что $\widetilde{\delta} \leq \widetilde{\varepsilon}$. Если $\widetilde{\delta}, \widetilde{\varepsilon} \in \Gamma$, то из монотонности и определения функции h следуют соотношения:

$$h(\widetilde{\delta}) = g(\widetilde{\delta}) \leq g(\widetilde{\varepsilon}) = h(\widetilde{\varepsilon}).$$

Если $\widetilde{\delta} \in \widehat{V}$, $\widetilde{\varepsilon} \in \Gamma$ то из определения множества $V_{\geq}$ следует, что $\widetilde{\varepsilon} \in V_{\geq}$. Поэтому $h(\widetilde{\varepsilon}) = 1$, и неравенство $h(\widetilde{\delta}) \leq h(\widetilde{\varepsilon})$ верно. Аналогично рассматривается случай $\widetilde{\delta} \in \Gamma$, $\widetilde{\varepsilon} \in \widehat{V}$. Если же $\widetilde{\delta} \in \widehat{V}$, $\widetilde{\varepsilon} \in \widehat{V}$, то из неравенства $\widetilde{\delta} \leq \widetilde{\varepsilon}$ и определения функции h следуют соотношения:

$$h(\widetilde{\delta}) = \delta_t \leq \varepsilon_t = h(\widetilde{\varepsilon}).$$

Таким образом, функция h монотонна. По построению функции h выполняется соотношение $h \in \mathfrak{M}_e$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1 из работы [3]. Для полноты изложения приведем его здесь полностью.

Пусть F — конечное множество монотонных функций из A. Найдется такое число k, что все функции из F будут существенно зависеть не более чем от k переменных. Зафиксируем $n > 2k$ и рассмотрим множество $R(n)$. По лемме 2 множество $R(n)$ сохраняется всеми функциями от k переменных из множества M. А так как $F \subseteq A \subseteq M$, то множество $R(n)$ сохраняется всеми функциями из множества F. По лемме 5 найдется функция f из $\mathfrak{M}_e$, не сохраняющая R. В силу того, что $\mathfrak{M}_e \subseteq A$, получаем, что $f \in A$. С другой стороны, $f \notin [F]$ и поэтому $[F] \neq A$. Теорема доказана.

4. Континуальная по включению цепь классов монотонных функций, содержащих $\mathfrak{M}_e$

В этом разделе будет доказана следующая теорема, из которой следует, что множество всех классов A, таких что $\mathfrak{M}_e \subseteq A \subseteq M$ имеет мощность континуум (см. также [7, 12, 13]).

Теорема 2. *Существует семейство множеств A_λ $(\lambda \in [0;1])$, таких, что*

1) *для любого $\lambda \in [0;1]$ выполняется соотношения $\mathfrak{M}_e \subseteq A_\lambda \subseteq M$,*

2) *для любых $\lambda, \mu \in [0;1]$, таких, что $\lambda < \mu$, выполняется включение $A_\lambda \subset A_\mu$;*

Пусть $n \geq 2$. Определим множества $A, B \subset \mathcal{P}^n$ следующим образом. Множество B содержит все наборы длины n, содержащие ровно $n-1$ элемент β' и 1 элемент β. Множество A состоит из всех наборов a длины n, таких, что найдется набор b из множества B, для которого выполняется равенство $a < b$. Очевидно, что все элементы множества B попарно несравнимы, поэтому $A \cap B = \varnothing$. Определим функцию $\psi_n(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом:

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in A; \\ \beta, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in B; \\ \gamma, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 6. *При всех $n \geq 2$ функция ψ_n принадлежит множеству M.*

Доказательство. Предположим, что $\psi_n \notin M$. Тогда существуют наборы $u, v \in \mathcal{P}^n$, такие, что $u < v$ и $\psi_n(u) > \psi_n(v)$. Из определения функции ψ_n следует, что значения $\psi_n(u)$ и $\psi_n(v)$ принадлежат множеству $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Пусть $\psi_n(v) = \alpha$, $\psi_n(u) \in \{\beta, \gamma\}$. Тогда $v \in A$. Из определения множества A следует, что существует набор $w \in B$, такой, что $v < w$. Так как $u < v$, то $u < w$. Таким образом, $u \in A$ — противоречие с соотношением $\psi_n(u) \neq \alpha$.

Пусть $\psi_n(v) = \beta$, $\psi_n(u) = \gamma$. Тогда $v \in B$. Так как $u < v$, то $u \in A$. Поэтому $\psi_n(u) = \alpha$ — противоречие с равенством $\psi_n(u) = \gamma$. Лемма доказана. □

Следуя работе [6] (см. также [5]) рассмотрим последовательность функций $\chi_i : \{0,1,2\}^i \to \{0,1,2\}$ $(i = 2, 3, \dots)$:

$$\chi_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если найдется номер } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ такой,} \\ & \text{что } x_1 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots x_n = 2, \\ & x_j = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $\mathfrak{F}_0 = \cup\{\chi_i\}$, где объединение берется по всем индексам $i \geq 2$. Согласно [6] имеет место следующая лемма.

Лемма 7. *При всех $i \geq 2$ выполнено соотношение $\chi_i \notin [\mathfrak{F}_0 \setminus \{\chi_i\}]$.*

Положим $V = \{\beta, \beta', \gamma\}$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_i : V^i \to V$, $(i = 2, 3, \dots)$, заданных следующим образом:

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} \beta, & \text{если } (x_1, \dots, x_i) \in B; \\ \gamma, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $\mathfrak{F} = \cup\{\varphi_i\}$, где объединение берется по всем индексам $i \geq 2$.

Очевидно, что для каждого $i \geq 2$ функция φ_i совпадает с функцией χ_i, с точностью до переобозначений: $\gamma = 0$, $\beta = 1$, $\beta' = 2$. Поэтому легко видеть, что справедлива лемма, аналогичная лемме 7.

Лемма 8. *При всех $i \geq 2$ выполнено соотношение $\varphi_i \notin [\mathfrak{F} \setminus \{\varphi_i\}]$.*

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in M$, $Z \subseteq \mathcal{P}$, $n \geq 1$. Ограничение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на множество Z^n будем для краткости обозначать через $f|_Z$. Пусть $M' \subseteq M$. Положим $M'|_Z = \cup\{f|_Z\}$, где объединение берется по всем функциям f из множества M'.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих лемм.

Лемма 9. *Пусть $Z \subseteq \mathcal{P}$, $k \geq 2$, $f_1, \dots, f_k$ — произвольные функции из M, такие, что $f_1 \in [\{f_2, \dots, f_k\}]$, и для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ выполняется соотношение $Im(f_i) \subseteq Z$. Тогда*

$$f_1|_Z \in [\{f_2|_Z, \dots, f_k|_Z\}].$$

Лемма 10. *Пусть $H \subseteq M$, e_i — селекторная функция. Тогда справедливо равенство $[H \cup \{e_i\}] = [H] \cup [\{e_i\}]$.*

Доказательство теоремы 2. Пусть π — некоторый изоморфизм между множествами $\mathbb{Q}$ и $\{2, 3, \dots\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел на отрезке $[0; 1]$. Пусть $\lambda \in [0; 1]$. Будем обозначать через $\mathbb{Q}_\lambda$ множество всех рациональных чисел q из $\mathbb{Q}$, таких, что $q \leq \lambda$. Положим

$$F_\lambda = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_\lambda} \{\psi_{\pi(q)}\}, \quad A_\lambda = [F_\lambda \cup \mathfrak{M}_e].$$

Очевидно, что $\mathfrak{M}_e \subseteq A_\lambda$. Из леммы 6 и соотношения $\mathfrak{M}_e \subseteq M$ следует, что $A_\lambda \subseteq M$. Таким образом, пункт 1 доказан.

Докажем пункт 2. Пусть $\lambda, \mu \in [0; 1]$, $\lambda < \mu$. Из соотношения $F_\lambda \subseteq F_\mu$ следует, что $A_\lambda \subseteq A_\mu$. Пусть p — произвольное рациональное число, такое, что $\lambda < p < \mu$. Положим $i = \pi(p)$. Рассмотрим функцию ψ_i. Докажем, что $\psi_i \notin A_\lambda$, откуда и будет следовать пункт 2. Предположим обратное. Пусть $\psi_i \in [F_\lambda \cup \mathfrak{M}_e]$. Положим $V = \{\beta, \beta', \gamma\}$. Из леммы 9 следует, что $\psi_i|_V \in [(F_\lambda \cup \mathfrak{M}_e)|_V]$. Очевидно, что $(F_\lambda \cup \mathfrak{M}_e)|_V = F_\lambda|_V \cup \mathfrak{M}_e|_V$. Нетрудно видеть, что если $g \in \mathfrak{M}_e$, то $g|_V$ — селекторная функция. Поэтому из леммы 10 следует, что $[F_\lambda|_V \cup \mathfrak{M}_e|_V] = [F_\lambda|_V] \cup [\mathfrak{M}_e|_V]$. Из определения функции ψ_i, следует, что $\psi_i|_V \notin [\mathfrak{M}_e|_V]$. Поэтому $\psi_i|_V \in [F_\lambda|_V]$. Так как, для любого $l \geq 2$ функция $\psi_l|_V$ равна функции φ_l, то $F_\lambda|_V \subseteq (\mathfrak{F} \setminus \{\varphi_i\})$. Таким образом, мы получили, что $\varphi_i \in [\mathfrak{F} \setminus \{\varphi_i\}]$ — противоречие с леммой 8. Теорема доказана.

Отметим, что способом, аналогичным указанному в [11], с помощью функций ψ_i можно построить пример антицепи мощности континуум из классов A, таких, что $\mathfrak{M}_e \subseteq A \subseteq M$.

5. Критерий полноты для некоторых классов одноместных функций

Пусть $n \geq 3$. Положим $Q = \{0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, 1\}$, $a_0 = b_0 = 0$, $a_{n+1} = b_{n+1} = 1$. Множество $\Delta_i = \{a_i\} \cup \{b_i\}$, где $0 \leq i \leq n+1$, будем называть *i-м слоем.*

Введем на элементах множества Q отношение частичного порядка $\leq$ следующим образом:

1) $\varepsilon_i \leq \varepsilon_j$ для всех $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, таких, что $\varepsilon_i \in \Delta_i$, $\varepsilon_j \in \Delta_j$, $0 \leq i < j \leq n$;

2) $\varepsilon \leq \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in Q$;

3) других сравнимых элементов нет.

Будем обозначать через $M_{\leq}^{Q}$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_k)$, $k \geq 0$, из множества M^Q, таких, что для любого элемента δ из множества Q выполняется неравенство $f(\delta, \ldots, \delta) \leq \delta$. Очевидно, что $\mathfrak{M}_e^Q \subseteq M_{\leq}^{Q} \subseteq M^Q$, поэтому из теоремы 1 следует, что класс $M_{\leq}^{Q}$ не является конечно порожденным. Будем обозначать через F множество всех одноместных функций из класса $M_{\leq}^{Q}$. Далее будет сформулирован критерий полноты для систем функций из множества F.

Пусть $\varepsilon \in Q \setminus \{0,1\}$. Через $c(\varepsilon)$ будем обозначать элемент из Q, не сравнимый с элементом ε. *Цепью длины* m, $1 \leq m \leq n+2$, будем называть последовательность элементов $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1} \in Q$, таких, что для всех $i = 0, \ldots, m-1$ элемент b_i принадлежит i-му слою (т. е. множеству Δ_i). Через $\mathcal{C}$ будем обозначать множество всех цепей.

Пусть $\varepsilon \in Q$, $f \in F$, $\Omega \subseteq Q$. Положим

$$S_\Omega = \{f \in F \mid f(\delta) = \delta \text{ для всех } \delta \in \Omega\}.$$

Будем обозначать через D_1 множество всех функций g из F, для которых найдутся номер k, $2 \leq k \leq n$, и цепь Ω длины $k-1$, такие, что выполнены следующие условия: $g \in S_\Omega$, $g(\Delta_k) = \Delta_{k-1}$.

Пусть $\Omega = (\omega_0, \ldots, \omega_k)$ — цепь длины $k+1$, где $0 \leq k \leq n+1$. Определим функцию φ_Ω, положив

$$\varphi_\Omega(\delta) = \begin{cases} c(w_{i-1}), & \text{если } \delta = w_i, \text{ где } 2 \leq i \leq k; \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } \delta = w_1. \\ \delta, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $D_2 = \cup\{\varphi_\Omega\}$, где объединение берется по всем цепям длины не больше чем $n+2$.

Согласно [4] имеет место следующий критерий полноты для множества F.

Теорема 3. *Пусть $D \subseteq F$. Система D является полной в F тогда и только тогда, когда $D_1 \cup D_2 \subseteq D$.*

Список литературы

1. Дудакова О. С. Об одном семействе предполных классов функций k-значной логики, не имеющих конечного базиса / О. С. Дудакова // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. – 2006. – Вып. 2. – С. 29–32.
2. Дудакова О. С. О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два / О. С. Дудакова // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. – 2008. – Вып. 1. – С. 31–37.
3. Дудакова О. С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики / О. С. Дудакова // Мат. вопр. кибернетики. – М. : Физматлит, 2008. – Вып. 17. – С. 13–104.
4. Панин Д. Ю. Критерии полноты для некоторых классов монотонных одноместных функций в P_k / Д. Ю. Панин // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. – 2013. – Вып. 3. – С. 57–61.
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высш. шк., 2008.
6. Янов Ю. И. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса / Ю. И. Янов, А. А. Мучник // Докл. АН СССР. – 1959. –Т. 127, № 1. – С. 44–46.
7. Demetrovis J. Construction of large sets of clones / J. Demetrovis, L. Hannak // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. – 1987. – Vol. 33. – P. 127–133.
8. Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory / D. Lau. – Berlin : Springer, 2006. – 668 p. – (Springer Monographs in Mathematics).
9. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions / E. L. Post // Amer. J. Math. – 1921. – Vol. 43, N 3. – P. 163–185.
10. Post. E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. – Princeton Univ. Press, 1941. – Vol. 5.
11. Pöschel R. Funktionen- und Relationenalgebren / R. Pöschel, L. A. Kalužnin. – Berlin. 2191979.
12. Salomaa A. On the heights of closed sets of operations in finite algebras / A. Salomaa // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. AI. – 1965. – Vol. 363. – 12 p.

13. Salomaa A. On some algebraic notions in the theory of truth-functions / A. Salomaa // Acta Phillos. Fennicae. – 1965. – Vol. 18. – P. 193–201.
14. Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations / G. Tardos // Order. – 1986. – Vol. 3. – P. 211-218.

D. Yu. Panin

A family of clones of monotone functions from multi-valued logic that are not finitely generated.

Abstract. The properties of clones of functions which are monotone with respect to a partially ordered set of width two are investigated.

Keywords: multi-valued logic; monotone functions; finite basis; chains of continuum cardinality.

Панин Дмитрий Юрьевич, аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, 1 (pank.dm@gmail.com)

Panin Dmitry, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie gory, Moscow, 119991, postgraduate student, (pank.dm@gmail.com)