



Серия «Математика»

2018. Т. 24. С. 68–81

Онлайн-доступ к журналу:

<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.6:621.384.6

MSC 65K10

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.24.68>

Оптимизация динамики пучков заряженных частиц с использованием метода второго порядка

Д. А. Стариков

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
Российская Федерация*

Аннотация. Задача оптимизации динамики пучка заряженных частиц рассматривается как задача программного управления ансамблем траекторий динамической системы с фиксированным конечным моментом времени. Состояние ансамбля динамических систем характеризуется плотностью распределения систем в фазовом пространстве, удовлетворяющей уравнению Лиувилля или уравнению Власова. Задача состоит в минимизации некоторого функционала, зависящего от конечного состояния ансамбля.

Предложено использовать алгоритм решения, основанный на вычислении первой и второй вариаций траектории динамической системы при вариации управления. В том случае, когда управление параметризовано, выражения для первой и второй вариации позволяют находить первые и вторые производные минимизируемого функционала по параметрам управления. Использование вторых производных может существенно ускорить процесс оптимизации по сравнению с алгоритмом, в котором используются только первые производные функционала.

Предложенный алгоритм реализован для пучка в канале с высокочастотной квадрупольной фокусировкой, который обычно используется в качестве начальной части ускорителей заряженных частиц. Рассмотрена простейшая задача оптимизации продольной динамики пучка в этом канале. Численное решение задачи проводится в рамках метода крупных частиц. Проведено сравнение эффективности методов первого и второго порядка. При этом метод второго порядка показывает существенное улучшение сходимости по сравнению с методом первого порядка.

Ключевые слова: оптимальное управление, ансамбль динамических систем, вторая вариация траектории, метод второго порядка, пучок заряженных частиц.

1. Введение

В работах Д. А. Овсянникова были разработаны методы численной оптимизации динамики пучков заряженных частиц, основанные на использовании первой вариации функционала, характеризующего качество управления, при вариации управления [6–8]. При этом задача оптимизации сформулирована как задача управления ансамблем динамических систем. Особенностью этой задачи является то, что ансамбль динамических систем характеризуется не только уравнениями динамики отдельной системы, но и плотностью распределения систем в фазовом пространстве, удовлетворяющей уравнению Лиувилля или уравнению Власова.

Численная реализация методов на основе первой вариации функционала может потребовать большого объема вычислений, в связи с чем и был предложен метод, основанный на использовании второй вариации функционала качества [4; 14; 15]. Актуальность разработки методов второго порядка для численного решения задач оптимального управления была отмечена также в работе [9].

Основную трудность при использовании метода первого порядка, представляет выбор направления и шага спуска, поскольку градиент функционала, который вычисляется в рамках метода первого порядка, определяет лишь гиперплоскость в многомерном пространстве параметров управления, при малом смещении вдоль которой значение функционала не меняется.

По сравнению с методом первого порядка, метод второго порядка позволяет находить не только первые, но и вторые производные функционала качества по параметрам, с помощью которых параметризовано управление. Направление и шаг спуска легко выбрать, если известны первые и вторые производные функционала.

Метод второго порядка, аналогичный представленному в настоящей работе, рассматривался также в работе [1], но там предлагалось находить вторые производные функционала качества как решения дифференциальных уравнений, число которых квадратично по числу параметров управления, то есть может быть достаточно велико.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ансамбль управляемых динамических систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u).$$

Здесь x – положение системы в фазовом пространстве Ω , $x \in \Omega$, $\dim \Omega = n$, t – время, $t \in [t_0, T]$, а $u = u(t)$ – управление, которое выбирается

из некоторого класса функций, например, кусочно-непрерывных. При этом предполагаем, что значения этих функций $u(t)$ лежат в некотором компакте U , $u(t) \in U \subset R^r$. Пусть системы распределены в некоторой области D фазового пространства или на некоторой движущейся поверхности S в фазовом пространстве с плотностью, которую в обоих случаях будем описывать дифференциальной формой $\varrho(t, x)$ [3; 10–13], степень которой равна размерности фазового пространства n в первом случае и размерности поверхности S во втором. Если в начальный момент t_0 задана начальная плотность распределения в области D или на некоторой начальной поверхности S_0 , которую обозначим через $\varrho_0(x)$, $\varrho(t_0, x) = \varrho_0(x)$, то в обоих случаях плотность в последующие моменты времени может быть получена в виде [3; 10–13]

$$\varrho(t_0 + \delta t, F_{f, \delta t} x) = F_{f, \delta t} \varrho_0(x), \quad (2.1)$$

где $F_{f, \delta t}$ обозначает сдвиг Ли вдоль траекторий динамической системы на приращение параметра δt [2]. При этом, если взаимодействие между динамическими системами отсутствует, то уравнение (2.1) можно рассматривать как уравнение Лиувилля, а если системы взаимодействуют между собой, то уравнение (2.1) есть уравнение Власова.

Задача состоит в том, чтобы найти управление u из заданного класса, доставляющее минимальное значение функционалу

$$\Phi(u) = \int_K g(x_T) \varrho(T, x_T), \quad (2.2)$$

характеризующему качество процесса управления. Здесь K обозначает D или S в зависимости от размерности носителя распределения.

3. Численное решение

Уравнения для компонент вектора первой вариации x имеют вид

$$\frac{d\delta x^i}{dt} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \delta x^j + \delta_u f^i, \quad \delta x^i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.1)$$

где

$$\delta_u f^j = \frac{\partial f^j}{\partial u^k} \delta u^k$$

(здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам в соответствии с правилом Эйнштейна).

Решение системы неоднородных линейных уравнений (3.1) можно записать в виде

$$\delta x^i(t) = \int_{t_0}^t G_j^i(t, t') \delta_u f^j(t') dt', \quad i = \overline{1, N},$$

где $G(t, t')$ – функция Грина уравнения для первой вариации, представляющая собой тензор типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, компоненты которого удовлетворяют системе однородных уравнений

$$\frac{dG_j^i(t, t')}{dt} = \frac{\partial f^i(t)}{\partial x^k} G_j^k(t, t'), \quad i = \overline{1, N}$$

и условию $\|G(t, t)_i^j\| = E$, где E – единичная матрица. Кроме того, компоненты матрицы Грина удовлетворяют также следующей системе уравнений

$$\frac{dG_j^i(t, t')}{dt'} = -G_k^i(t, t') \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(t'), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.2)$$

Тогда компоненты вектора вариации траектории можно записать в виде

$$\delta x^i(t) = \int_{t_0}^t G_j^i(t, t') \delta_u f^j(t') dt', \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.3)$$

а первую вариацию функционала (2.2) в виде

$$\delta_u \Phi = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} G(T, t') \delta_u f(t, x) \varrho(t, x) dt. \quad (3.4)$$

Вводя сопряженную дифференциальную форму

$$\psi(t, x) = -\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=x_T} G(T, t),$$

удовлетворяющую уравнению и условию

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=x_T},$$

запишем первую вариацию функционала (3.4) в виде

$$\delta_u \Phi = - \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \psi(t, x) \delta_u f(t, x) \varrho(t, x) dt. \quad (3.5)$$

Пусть u – кусочно-постоянная векторная функция t :

$$u = u_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i), \quad i = \overline{1, M}, \quad t_M = T.$$

Тогда функционал (2.2) можно рассматривать как функцию rM параметров управления.

Из выражения (3.5) вытекает, что производные функционала по этим параметрам равны

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i^k} = - \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \psi(t, x) \frac{\partial \delta_u f(t, x)}{\partial u_i^k} \varrho(t, x) dt. \quad (3.6)$$

Далее применим метод крупных частиц, в рамках которого перейдем от непрерывной сплошной среды к дискретной (набор крупных частиц) и заменяем интегрирование по фазовым координатам суммированием по крупным частицам. Тогда минимизируемый функционал представим в виде

$$\Phi(u) = \sum_{j=1}^N g(x_{(j)}(T)), \quad (3.7)$$

а выражение для его производных по параметрам в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i^k} = - \int_{t_0}^T \sum_{j=1}^N \psi(t, x_{(j)}) \frac{\partial \delta_u f(t, x_{(j)})}{\partial u_i^k} dt.$$

Здесь $x_{(j)}$ — положение j -й крупной частицы в фазовом пространстве.

Для второй вариации траектории динамической системы при вариации управления нетрудно получить выражение [4; 14; 15]

$$\begin{aligned} \delta^2 x^i(t) = & \int_{t_0}^t D_{jk}^i(t, t') \delta_u f^j(t') \left(\int_{t_0}^{t'} G_m^k(t', t'') \delta_u f^m(t'') dt'' \right) dt' + \\ & + \int_{t_0}^t G_j^i(t, t') \left[\delta_u \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(t') \left(\int_{t_0}^{t'} G_m^k(t', t'') \delta_u f^m(t'') dt'' \right) + \delta_u^2 f^j(t') \right] dt'. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $D_{jk}^i(t, t')$ — тензор типа $\binom{1}{2}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{jk}^i(t, t')}{\partial t'} = & -D_{jm}^i(t, t') \frac{\partial f^m}{\partial x^k}(t') - D_{mk}^i(t, t') \frac{\partial f^m}{\partial x^j}(t') + \\ & + G_m^i(t, t') \frac{\partial^2 f^m}{\partial x^j \partial x^k}(t') \end{aligned} \quad (3.9)$$

и условиям

$$D(t, t)_{jk}^i = 0, \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Выражая вариацию функционала через первую и вторую вариацию траектории в конечной точке, нетрудно найти вторые производные функционала (3.7) по параметрам:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (u_i^k)^2} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial (u_i^k)^2}(T) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x^j)^2} \left[\frac{\partial x^j}{\partial u_i^k}(T) \right]^2 \right] \varrho(T, x_T), \quad (3.10)$$

где $\partial x^j / \partial u_i^k(T)$ и $\partial^2 x^j / \partial (u_i^k)^2(T)$ определяются из выражений для первой и второй вариации (3.3) и (3.8) соответственно. Далее, в соответствии с методом крупных частиц, нетрудно перейти от интегрирования в (3.10) к суммированию по крупным частицам:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (u_i^k)^2} = \sum_{l=1}^N \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x_{(l)}^j}{\partial (u_i^k)^2}(T) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x^j)^2} \left[\frac{\partial x_{(l)}^j}{\partial u_i^k}(T) \right]^2 \right]. \quad (3.11)$$

4. Оптимизация ускорительной структуры с высокочастотной квадрупольной фокусировкой

В качестве примера применения представленного здесь метода рассмотрим задачу оптимизации ускорительной структуры с высокочастотной квадрупольной фокусировкой [5; 8; 16], которая требует значительного объема вычислений.

Ограничимся в этой работе только оптимизацией продольной динамики пучка. В простейшей модели канала с высокочастотной квадрупольной фокусировкой предполагается, что продольную компоненту электрического поля в некоторой ячейке можно представить в виде

$$E_z = U_0 \frac{4kT}{\pi} \cos \eta \cos \omega t, \quad \eta(z) = \int_{z_0}^z k(z') dz'. \quad (4.1)$$

Здесь $2U_0$ — напряжение между электродами, ω — частота колебаний поля, a — апертура этой ячейки (минимальное для этой ячейки расстояние от оси до электрода), $k = \pi/L$, L — длина ячейки, которая меняется от ячейки к ячейке вдоль оси канала, $\eta(z)$ — фаза модуляции электродов, T — эффективность ускорения. Таким образом, здесь мы рассматриваем $k(z)$ как кусочно-постоянную функцию.

В рамках этой модели можно рассматривать продольное движение частиц независимо от поперечного.

В качестве координат в фазовом пространстве продольного движения рассмотрим приведенную энергию частицы $\gamma = 1 + W/(mc^2)$ и ее фазу $\varphi = \omega t$, где t — тот момент времени, в который частица проходит

сечение с заданной продольной координатой z . Здесь W и m энергия и масса частицы, а c — скорость света. В качестве параметра траектории будем рассматривать безразмерную координату $\zeta = z/\lambda$, где $\lambda = 2\pi c/\omega$.

Начальное распределение в фазовом пространстве зададим следующим образом. Пусть все частицы имеют одинаковую начальную энергию $\gamma(\zeta_0) = \gamma_0$ и равномерно распределены по начальной фазе $\varphi(\zeta_0) \in [-2\pi, 0]$. Такое распределение описывается дифференциальной формой первой степени в фазовом пространстве поперечного движения, единственная компонента которой, заданная на моноэнергетической поверхности $\gamma = \gamma_0$, равна $\varrho_{(0)\varphi} = (2\pi)^{-1}$.

Уравнения продольной динамики для пучка малой интенсивности, учитывая выражение (4.1), запишем в виде

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = 2\pi\gamma(\gamma^2 - 1)^{-1/2}, \quad (4.2)$$

$$\frac{d\gamma}{d\zeta} = C_L \bar{k} u \cos \eta \cos \varphi. \quad (4.3)$$

Здесь $\zeta = z/\lambda$, $\bar{k} = \lambda k$, $\lambda = 2\pi c/\omega$, $C_L = 2eU_0/(\pi m c^2)$, а функция $u(\zeta) = T(\lambda\zeta)$ — единственная компонента вектора управления. При этом длины всех ячеек, а, следовательно, и \bar{k} для каждой из ячеек мы считаем заданными.

В рамках метода крупных частиц каждой частице с номером i соответствуют две сопряженные функции — $\psi_{\varphi(i)}$ и $\psi_{\gamma(i)}$. Здесь i — номер крупной частицы, который записан в скобках в отличие от индексов компонент. Дифференциальные уравнения для этих функций имеют вид

$$\frac{d\psi_{\varphi(i)}}{d\zeta} = C_L \psi_{\gamma(i)} \bar{k} T \cos \eta \sin \varphi(i),$$

$$\frac{d\psi_{\gamma(i)}}{d\zeta} = \psi_{\varphi(i)} \frac{2\pi}{(\gamma_{(i)}^2 - 1)^{3/2}}.$$

Пусть управление — кусочно-постоянная функция: $u(\zeta) = u_j$, $\zeta \in [\zeta_{j-1}, \zeta_j)$, $j = 1, M$, где ζ_j границы ячеек, причем $\lambda(\zeta_j - \zeta_{j-1})$ — длина ячейки, а M — полное число ячеек. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} = \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \sum_{i=1}^N \psi_{\gamma(i)} C_L \bar{k} \cos \eta \cos \varphi(i) d\zeta.$$

Для компонент функций Грина, которые используются при вычислении второй вариации и в уравнениях для компонент тензора D в

соответствии с уравнениями (3.2) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= G_{\gamma}^{\varphi}(\zeta, \zeta') C_L \bar{k} u(\zeta') \cos \eta(\zeta') \sin \varphi(\zeta'), \\ \frac{\partial G_{\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= G_{\gamma}^{\gamma}(\zeta, \zeta') C_L \bar{k} u \cos \eta \sin \varphi(\zeta'), \\ \frac{\partial G_{\gamma}^{\varphi}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= 2\pi(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-3/2} G_{\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta'), \\ \frac{\partial G_{\gamma}^{\gamma}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= 2\pi(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-3/2} G_{\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta').\end{aligned}$$

Здесь и далее мы опускаем номера крупных частиц при функциях Грина, фазовых переменных и аналогичных величинах для большей компактности приводимых выражений

Используя выражение (3.8), получим вторую вариацию фазы частицы при вариации управления в следующем виде

$$\begin{aligned}\delta^2 \varphi(\zeta) &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} D_{\gamma \varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta') \delta u(\zeta') C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \cos(\varphi(\zeta')) \times \\ &\times \int_{\zeta_0}^{\zeta'} G_{\gamma}^{\gamma}(\zeta', \zeta'') \delta u(\zeta'') C_L \bar{k}(\zeta'') \cos(\eta(\zeta'')) \cos(\varphi(\zeta'')) d\zeta'' d\zeta' + \\ &+ \int_{\zeta_0}^{\zeta} D_{\gamma \varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta') \delta u(\zeta') C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \cos(\varphi(\zeta')) \times \\ &\times \int_{\zeta_0}^{\zeta'} G_{\gamma}^{\varphi}(\zeta', \zeta'') \delta u(\zeta'') C_L \bar{k}(\zeta'') \cos(\eta(\zeta'')) \cos(\varphi(\zeta'')) d\zeta'' d\zeta' - \\ &- \int_{\zeta_0}^{\zeta} G_{\gamma}^{\varphi}(\zeta, \zeta') \delta u(\zeta') C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \sin(\varphi(\zeta')) \times \\ &\times \int_{\zeta_0}^{\zeta'} G_{\gamma}^{\varphi}(\zeta', \zeta'') \delta u(\zeta'') C_L \bar{k}(\zeta'') \cos(\eta(\zeta'')) \cos(\varphi(\zeta'')) d\zeta'' d\zeta'.\end{aligned}$$

Аналогичный вид имеет и выражение для $\delta^2 \gamma(\zeta)$.

Запишем теперь дифференциальные уравнения для компонент тензора D , используя уравнения (3.9)

$$\frac{\partial D_{\gamma\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} = 4\pi(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-3/2} D_{\gamma\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta') + 6\pi\gamma(\zeta')(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-5/2} G_{\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta').$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\gamma\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \sin(\varphi(\zeta')) D_{\gamma\gamma}^{\varphi}(\zeta, \zeta') + \\ &+ 2\pi(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-3/2} D_{\varphi\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= 2C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \sin(\varphi(\zeta')) D_{\gamma\varphi}^{\varphi}(\zeta, \zeta') + \\ &+ C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \cos(\varphi(\zeta')) G_{\gamma}^{\varphi}(\zeta, \zeta'). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial D_{\gamma\gamma}^{\gamma}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} = 4\pi(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-3/2} D_{\gamma\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta') + 6\pi\gamma(\zeta')(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-5/2} G_{\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta').$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\gamma\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \sin(\varphi(\zeta')) D_{\gamma\gamma}^{\gamma}(\zeta, \zeta') + \\ &+ 2\pi(\gamma(\zeta')^2 - 1)^{-3/2} D_{\varphi\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta')}{\partial \zeta'} &= 2C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \sin(\varphi(\zeta')) D_{\gamma\varphi}^{\gamma}(\zeta, \zeta') + \\ &+ C_L \bar{k}(\zeta') \cos(\eta(\zeta')) \cos(\varphi(\zeta')) G_{\gamma}^{\gamma}(\zeta, \zeta'). \end{aligned}$$

Алгоритм численного решения состоит в том, что выбирается некоторое параметризованное управление, а затем оно улучшается в результате повторения следующих вычислений. Во-первых, находятся траектории крупных частиц и вычисляется функционал качества. После этого уравнения для динамических переменных, компонент функций Грина и компонент матриц D интегрируются в обратном направлении, и вычисляются первые и вторые производные функционала качества по параметрам. Затем делается шаг, вектор которого h определяется этими производными. В настоящей работе шаг вычисляется следующим образом:

$$h^i = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i^2}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad (4.4)$$

при условии, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i^2} > 0. \quad (4.5)$$

Если же условие (4.5) не выполнено, или же для вычисленного по формуле (4.4) значения h^i оказывается невыполненным условие $|h^i| \leq h_{i0}$,

где h_{i0} — некоторое максимальное значение $|h^i|$, то делается шаг абсолютной величиной h_{i0} в направлении убывания функционала. Если же и $\partial\Phi/\partial u_i$ оказывается равным нулю в рамках некоторой точности, то на данном шаге полагается, что $\dot{h}^i = 0$.

Схему (4.4) можно рассматривать как простейшую модификацию метода Ньютона

$$h^i = - \sum_{j=1}^M \left(\left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial u_l} \right\|^{-1} \right)_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}.$$

При этом вместо матрицы вторых производных $\|\partial^2\Phi/\partial u_k\partial u_l\|$ используется матрица, в которой диагональные члены такие же, как и в матрице $\|\partial^2\Phi/\partial u_k\partial u_l\|$, а все внедиагональные члены равны нулю. Применение такой упрощенной схемы обусловлено трудностями, связанными с обращением недиагональной матрицы высокого порядка.

Процесс останавливается при достижении требуемой точности.

Тестовые расчёты были произведены для ускорительной структуры с частотой 433 МГц, ускоряющей протоны от энергии 60 кэВ до 1850 КэВ.

На рис. 1 представлено распределение частиц по фазе и энергии на выходе из канала ускорения.

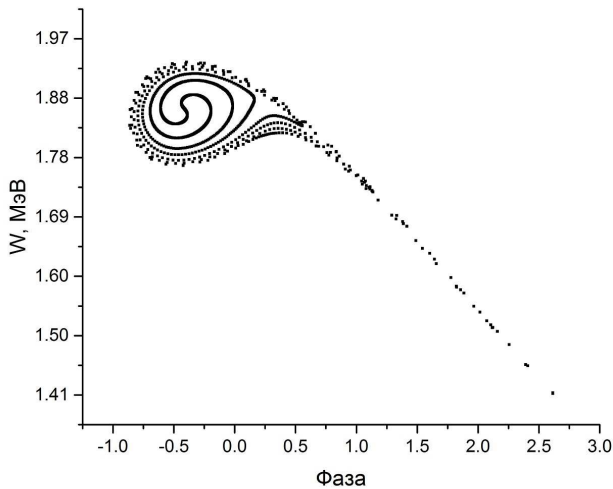


Рис. 1. Фазо-энергетический портрет пучка частиц на выходе из канала ускорения.

На рис. 2 представлена зависимость значений функционала качества от номера шага оптимизационного процесса для методов первого и второго порядка с целью иллюстрации их сравнительной эффективности.

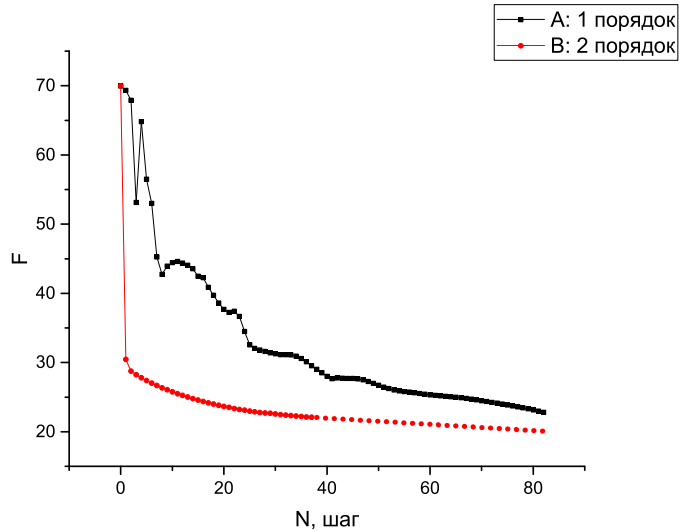


Рис. 2. Изменение функционала качества F в процессе оптимизации.

Стартовые возмущения и, соответственно, оптимизация проводились вдоль всей структуры (точнее, от 22 ячейки и до конца структуры). Здесь линии А и В изображают процессы оптимизации методами первого и второго порядка соответственно.

5. Заключение

Видно, что метод второго порядка работает и дает существенное ускорение относительно метода первого порядка, даже в случае одной управляющей функции. Темп оптимизационного процесса для метода второго порядка очень высок на первых шагах, что компенсирует возросшее относительно метода первого порядка количество вычислений.

Таким образом, применение метода второго порядка для численного решения задач оптимального управления ансамблем динамических систем возможно и эффективно.

Список литературы

1. Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. Киев : Наукова думка, 1986. 304 с.
2. Дривотин О.И. Математические основы теории поля. СПб. : Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2010. 168 с.

3. Дривотин О. И., Овсянников Д. А. Решения уравнения Власова для пучка заряженных частиц в магнитном поле // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. Т. 6, № 4. С. 2-22.
4. Дривотин О. И., Стариков Д. А. Применение методов второго порядка для численного решения задачи оптимального управления ансамблем динамических систем // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4, № 1. С. 113-117.
5. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей: Динамика частиц. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
6. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
7. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
8. Овсянников Д. А., Дривотин О. И. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 2003. 176 с.
9. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
10. Drivotin O. I. Covariant formulation of the Vlasov equation // Proc. of the 2011 Int. Particle Accelerators Conf., IPAC'2011. San-Sebastian, Spain, 2011. P. 2277-2279. — accelconf.web.cern.ch/accelconf/ipac2011/papers/wepc114.pdf
11. Drivotin O. I. Degenerate Solutions of the Vlasov Equation // Proc. of the 23rd Russian Particle Accelerators Conf., RUPAC'2012. St.-Petersburg, 2012. P. 376-378. — accelconf.web.cern.ch/accelconf/rupac2012/papers/tuppb028.pdf
12. Drivotin O. I. Covariant Description of Phase Space Distributions // Vestnik of Saint-Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes. Issue 3. 2015. P. 39-52. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.304>
13. Drivotin O. I., Ovsyannikov D. A. Stationary Self-Consistent Distributions for a Charged Particle Beam in the Longitudinal Magnetic Field // Physics of Particles and Nuclei. 2016. Vol. 47, N 5. P. 884-913. <https://doi.org/10.1134/S1063779616050038>
14. Drivotin O. I., Starikov D. A. Second Order Method for Beam Dynamics Optimization // Proc. of the 24th Russian Particle Accelerators Conf., RUPAC'2014/ Obninsk, Oct. 2014. <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/rupac2014/papers/tupsa15.pdf>
15. Drivotin O. I., Starikov D. A. Investigation of a Second Order Method of RFQ Channel Optimization // Proc. of the 25th Russian Particle Accelerators Conf., RUPAC'2016. St.-Petersburg, Nov. 2016. <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/rupac2016/papers/tupsa013.pdf>
16. Mathematical Models for Accelerating Structures of Safe Energetical Installation / O. I. Drivotin [et al.] // Proc. 6-th Europ. Part. Accel. Conf. EPAC'98. Stockholm, Sweden, 1998.

Стариков Дмитрий Александрович, аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., 35, тел.: (812)4284726 (e-mail: radiumds@gmail.com)

Поступила в редакцию 30.04.2018

Charged Particle Beam Optimization with Use of a Second Order Method

D. A. Starikov

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Abstract. The problem of optimization of charged particle beam dynamics is considered. The problem is formulated as the control problem for a dynamical system ensemble with a fixed endpoint. A state of the dynamical system ensemble is described by a density of the systems in the phase space, which satisfies to the Liouville equation or to the Vlasov equation. The problem is to minimize a functional depending on terminal state of the ensemble.

It is proposed to use an algorithm based on calculation of the first and the second variations of trajectory of a dynamical system under the control function variation. If the control function is parametrized, expressions for the first and the second variations allow to find the first and the second derivatives of the functional being minimized over control parameters. Using of the second derivatives can make the optimization process sufficiently quicker, as compared with algorithm using only first derivatives.

The proposed algorithm is realized for a beam in the Radio Frequency Quadrupole (RFQ) channel, which is often used as initial part of a charged particles accelerator. The simplest problem of optimization of longitudinal dynamics of the beam in this channel is considered. The numerical solution is finding on the base of the method of macroparticles. The comparison between the first order and the second order methods is conducted. The second order method shows sufficient increase of the rate of convergence as compared with the first order method.

Keywords: optimal control, dynamical system ensemble, second order variation, second order method, charged particle beam.

References

1. Bublik B.N., Garashchenko F.G., Kirichenko H.Ф. *Strukturno-parametricheskaya optimizatsiya i ustoychivost' dinamiki puchkov* [Structural-Parametric Optimization and Stability of the Beam Dynamics]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1986, 304 p. (in Russian)
2. Drivotin O.I. *Matematicheskie osnovy teorii polya* [Mathematical Basics of the Field Theory]. Saint-Petersburg, Saint-Petersburg State University Publ., 2010, 168 p. (in Russian)
3. Drivotin O.I., Ovsyannikov D.A. Solutions of the Vlasov equation for a Charged Particles Beam in Magnetic Field. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics* [Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika], 2013, vol. 6, no. 4, pp. 2-22. (in Russian)
4. Drivotin O.I., Starikov D.A. Application of Second Order Methods for Numerical Solution of the Dynamical System Ensemble Optimal Control Problem. *Protsessy upravleniya i ustoychivost'*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 113-117. (in Russian)
5. Kapchinskiy I.M. *Teoriya lineynykh rezonansnykh uskoriteley: Dinamika chastits* [Theory of Linear Resonant Accelerators: Particle Dynamics]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982, 240 p. (in Russian)
6. Ovsyannikov D.A. *Matematicheskie metody upravleniya puchkami* [Mathematical Methods of Beam Control]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1980, 228 p. (in Russian)

7. Ovsyannikov D.A. *Modelirovanie i optimizatsiya dinamiki puchkov zaryazhennykh chastits*. [Modeling and Optimization of Charged Particles Beam Dynamics. Leningrad, Leningrad University Publ., 1990, 312 p. (in Russian)]
8. Ovsyannikov D.A., Drivotin O.I. *Modeling of Intensive Charged Particle Beams*. Saint-Petersburg, Saint-Petersburg University Publ., 2003, 176 p. (in Russian)
9. Fedorenko R.P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya* [Approximate Solution of Optimal Control Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 488 p. (in Russian)
10. Drivotin O.I. Covariant formulation of the Vlasov equation. *Proc. of the 2011 Int. Particle Accelerators Conf., IPAC'2011, San-Sebastian, Spain, 2011*, pp. 2277-2279. accelconf.web.cern.ch/accelconf/ipac2011/papers/wepc114.pdf
11. Drivotin O.I. Degenerate Solutions of the Vlasov Equation. *Proc. of the 23rd Russian Particle Accelerators Conf., RUPAC'2012, St.-Petersburg, 2012*, pp. 376-378. accelconf.web.cern.ch/accelconf/rupac2012/papers/tuppb028.pdf
12. Drivotin O.I. Covariant Description of Phase Space Distributions. *Vestnik of Saint-Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2015, Issue 3, pp. 39-52. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.304>
13. Drivotin O.I., Ovsyannikov D.A. Stationary Self-Consistent Distributions for a Charged Particle Beam in the Longitudinal Magnetic Field. *Physics of Particles and Nuclei*, 2016, vol. 47, no. 5, pp. 884-913. <https://doi.org/10.1134/S1063779616050038>
14. Drivotin O.I., Starikov D.A. Second Order Method for Beam Dynamics Optimization. *Proc. of the 24th Russian Particle Accelerators Conf., RUPAC'2014, Obninsk, Oct. 2014*. <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/rupac2014/papers/tupsa15.pdf>
15. Drivotin O.I., Starikov D.A. Investigation of a Second Order Method of RFQ Channel Optimization. *Proc. of the 25th Russian Particle Accelerators Conf., RUPAC'2016, St.-Petersburg, Nov. 2016*. <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/rupac2016/papers/tupsa013.pdf>
16. Drivotin O.I., et.al. Mathematical Models for Accelerating Structures of Safe Energetical Installation. *Proc. of the 6-th Europ. Part. Accel. Conf. EPAC'98. Stockholm, Sweden, 1998*.

Starikov Dmitriy Alexandrovich, Postgraduate, Saint-Petersburg State University, 35, Universitetskii pr., Petergof, St.-Petersburg, 198504, Russian Federation, tel.: (812)4284726 (e-mail: radiumds@gmail.com)

Received 30.04.2018