Серия «Математика»
2016. Т. 15. С. 92—107

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.71
MSC 06E30

Об одной серии базисов для множества булевых функций

И. К. Шаранхаев

Бурятский государственный университет

Аннотация. Рассматривается проблема сравнения булевых базисов. В данном случае базисы сравниваются по сложности представлений булевых функций термами (формулами). На множестве всех базисов вводится определенным образом частичный порядок, относительно которого получается структура классов эквивалентности базисов. Известно, что критерием эквивалентности двух базисов является взаимная бесповторная выразимость функций одного базиса через функции другого, а добавление к базису слабоповторной в нем функции позволяет не только расширить его, увеличивая возможности по реализации булевых функций термами, но и делает расширение минимальным, позволяя исследовать базисы по сложности представлений булевых функций термами. Таким образом, задача описания структуры классов эквивалентности базисов свелась к нахождению слабоповторных функций в конкретных базисах.

Базис $\{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ является наибольшим элементом при этом частичном порядке, а класс эквивалентности этого базиса образует нулевой ярус структуры. Усилиями нескольких авторов были получены описание базисов первого яруса и частичное описание базисов второго. В этой статье дано описание слабоповторных булевых функций в одной базисе в терминах обобщенной однотипности, которое завершает описание базисов второго яруса.

Ключевые слова: булева функция, терм, бесповторная функция, слабоповторная функция, базис.

Введение

Настоящая работа посвящена проблеме сравнения базисов по сложности представлений булевых функций термами. Вначале дадим необходимые для понимания определения, все неопределяемые понятия можно найти, например, в [6].

Под *базисом* понимаем конечную полную систему булевых функций. Булева функция называется *бесповторной* в базисе B, если ее можно представить в этом базисе термом, в котором каждая переменная встречается не более одного раза. В противном случае, она называется *повторной* в B. Булева функция называется *слабоповторной* в базисе B, если ее любая остаточная подфункция является бесповторной, а сама она повторна в базисе B. Под *сложностью* $L(\Phi)$ терма Φ понимаем число всех вхождений переменных в Φ. *Сложностью* $L_B(f)$ булевой функции f в базисе B называется наименьшее значение $L(\Phi)$ при условии, что терм Φ в базисе B представляет функцию f.

При сравнении базисов по сложности представлений булевых функций термами на множестве всех базисов вводится частичный порядок: $B_1 \leq B_2$, если существует число c такое, что $L_{B_1}(f) \leq cL_{B_2}(f)$ для любой булевой функции f, говорят B_1 *предшествует* B_2. Если $B_1 \leq B_2$ и $B_2 \leq B_1$, то базисы B_1 и B_2 называются *эквивалентными.* Если $B_1 \leq B_2$ и $B_2 \not\leq B_1$, то пишем $B_1 < B_2$ и говорим, что B_1 *строго предшествует* B_2. Также говорим, что B_1 *непосредственно предшествует* B_2, если $B_1 < B_2$ и не существует базиса B такого, что $B_1 < B < B_2$.

Таким образом, множество базисов разбито на классы эквивалентности. В [9] доказано, что в каждом классе базисов можно указать канонический вид класса, причем если базис B непосредственно предшествует базису B', то канонический вид B содержит на одну функцию больше, чем канонический вид B', а эта функция является слабоповторной в базисе каноническом для B'.

О. Б. Лупановым замечено (результат сформулирован в [8]), что базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ является наибольшим элементом при введенном порядке, то есть класс базисов, эквивалентных базису B_0, самый «плохой» по сложности реализаций булевых функций термами. Эти базисы назовем базисами *нулевого яруса.* Отметим, что базис B_0 канонический для своего класса. Базисами k-го яруса ($k > 0$) называются все базисы, непосредственно предшествующие всем базисам $(k-1)$-го яруса.

Функции f и g называются *однотипными*, если выполняется равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$, где $(i_1, ..., i_n)$ – некоторая перестановка чисел от 1 до n. Функции f и g называются *обобщенно однотипными*, если f однотипна с g или $\bar{g}$. Очевидно, что на множестве булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

В работе [7] получено описание всех обобщенных типов функций, слабоповторных в базисе B_0, а как следствие, канонических базисов первого яруса. Часть базисов второго яруса удалось описать в [1; 5; 10; 12; 13]. В данной работе приводится полное описание слабоповторных булевых функций в каноническом базисе еще одного класса эквивалентности базисов первого яруса, тем самым завершено описание базисов второго яруса. Отметим, что этот результат был анонсирован в [11].

1. Вспомогальные результаты

Булевы функции от 0, 1 и 2 переменных называются соответственно *константными*, *унарными* и *бинарными*. Бинарные функции, за исключением линейных функций $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$, называются *элементарными*.

Функция $f(\tilde{\omega})$ называется *разделимой*, если возможно разбиение множества переменных $\tilde{\omega}$ на такие непересекающиеся множества $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, что $\tilde{u} \neq \varnothing$, $|\tilde{v}| > 1$ и найдутся функции $g(\tilde{u}, z)$ и $h(\tilde{v})$ такие, что $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$. При этом множество переменных $\tilde{v}$ будем называть *выделимым*, а множество $\tilde{u}$ – *основным*. В противном случае f называется *неразделимой*.

Связь слабоповторных и неразделимых функций устанавливает следующая теорема, полученная Н.А. Перязевым [4].

Теорема 1. *Булева функция f является неразделимой тогда и только тогда, когда она либо существенная элементарная, либо существует базис, в котором она слабоповторна.*

Для определения того, является ли некоторое множество переменных выделимым или основным в f, используются следующие критерии.

Теорема 2. [3] *1) Множество переменных $\tilde{v}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является выделимым тогда и только тогда, когда среди остаточных подфункций функции f по $\tilde{v}$ найдется не более 2 различных.*

2) Множество переменных $\tilde{u}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является основным тогда и только тогда, когда каждая остаточная подфункция функции f по $\tilde{u}$ равна либо константе, либо некоторой функции $t(\tilde{v})$, либо $\bar{t}(\tilde{v})$.

Множество переменных $\tilde{v}$ функций $f_1(\tilde{u}, \tilde{v})$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v})$ будем называть *совместно выделимым*, если имеются функции $g_1(\tilde{u}, z)$, $g_2(\tilde{u}, z)$, $h(\tilde{v})$ такие, что $f_1(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_1(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_2(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$.

Множество переменных $\tilde{u}$ функций $f_1(\tilde{u}, \tilde{v})$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v})$ будем называть *совместно основным*, если имеются функции $g(\tilde{u}, z)$, $h_1(\tilde{v})$, $h_2(\tilde{v})$ такие, что $f_1(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h_1(\tilde{v}))$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h_2(\tilde{v}))$.

Теорема 3. [2] *1) Множество переменных $\tilde{v}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является выделимым тогда и только тогда, когда имеется переменная $y \in \tilde{u}$ такая, что $\tilde{v}$ совместно выделимо в f_y^0 и f_y^1.*

2) Множество переменных $\tilde{u}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является основным тогда и только тогда, когда имеется переменная $y \in \tilde{v}$ такая, что $\tilde{u}$ является совместно основным в f_y^0 и f_y^1.

Базис B^* будем называть *приведенным* для B, если каждая неразделимая и бесповторная в B функция содержится в B^*. Для нахождения приведенного базиса B^* необходимо проделать следующие шаги:

1) для каждой функции $f \in B$ надо добавить к B все ее остаточные подфункции, получим B';

2) для каждой функции $f \in B'$ добавим к B' все функции обобщенно однотипные с f, получим B'';

3) исключим из B'' все разделимые функции, получим B^*.

Обозначим через B_g^- наибольший из базисов $B''' \subset B^*$ такой, что неразделимая функция $g \in B$ не реализуется бесповторно в B'''. Очевидно, что при введенном порядке базис B_g^- непосредственно предшествует базису B. Функция g является слабоповторной в B_g^-, так как для каждой остаточной функции $g' = g_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}}$ функция g не является бесповторной в $B_g^- \cup \{g'\}$. Поэтому g' должна быть бесповторной в B_g^-.

Все слабоповторные функции над B_0 описывает следующая

Теорема 4. [7] *Система булевых функций*

$$\begin{array}{ll}
x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4, & \\
x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4), & \\
x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, & n \geq 3, \\
x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \vee x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n, & n \geq 3, \\
x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n, & n \geq 2,
\end{array}$$

является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в базисе B_0.

Будем использовать следующий критерий бесповторности в B_0, полученный Б. А. Субботовской [8].

Теорема 5. *Функция f является бесповторной в базисе B_0 тогда и только тогда, когда для всех g, где $g = f$, либо g – остаточная подфункция функции f, выполняется следующее свойство: для любой существенной переменной y функции g, среди остаточных функций g_y^0 и g_y^1 ровно одна имеет фиктивные переменные, которые являются существенными в g.*

А. В. Кузнецовым [3] доказано, что представление булевой функции в виде бесповторной суперпозиции неразделимых функций является в некотором смысле единственным, т. е. при фиксации определенного порядка переменных, например по возрастанию индексов, при бесскобочной записи для ассоциативных функций, когда отрицание встречается только над переменными, получаем канонический вид для представления функции в виде бесповторной суперпозиции неразделимых булевых функций.

Представление функции бесповторным термом в B_0 будем называть *нормальным*, если отрицание встречается только над переменными. Из результата Кузнецова нормальное представление функции единственно с точностью до коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции. Кроме того, если переменная y входит в нормальное представление f в степени τ, то в нормальное представление любой остаточной подфункции функции f переменная y входит в степени τ.

Если $\tilde{u} = \{u_1, \ldots, u_k\}$, то $(\&\tilde{u}) = u_1 \cdot \ldots \cdot u_k$ и $(\vee\tilde{u}) = u_1 \vee \ldots \vee u_k$.

Для функций, слабоповторных в небинарных базисах, К.Д. Кириченко [1; 2] были получены следующие результаты.

Теорема 6. *Для любой функции f, слабоповторной в B и неслабоповторной в B_g^- такой, что $rang\ f > rang\ B^* + 2$ и $rang\ g = rang\ B^* = n$, найдется обобщенно однотипная с ней функция h, которая может быть задана одним из следующих термов:*
1) $h(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, x_1, \ldots, x_{n-k}) = p((\vee\tilde{u}_1) \vee \ldots \vee (\vee\tilde{u}_k), (\&\tilde{u}_1), \ldots, (\&\tilde{u}_k),$ $x_1, \ldots, x_{n-k})$, где $p(1, y_1, \ldots, y_n) = g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$;
2) $h(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}) =$
$$= t(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}), s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+n})),$$
где функция $t(x_1, \ldots, x_k, z_1, z_2)$ такая, что для любого $i \le k$ переменная z_1 фиктивна в остаточной функции $t^0_{x_i}$, а z_2 – в остаточной $t^1_{x_i}$.

Лемма 1. *Пусть функция g слабоповторна в B_0 и для любой переменной y и константы τ остаточная функция g^τ_y является существенной. Если некоторая функция f повторна в B_0 и бесповторна в $B_0 \cup \{g\}$, и обе остаточные подфункции функции f по некоторой переменной бесповторны в B_0, то эти остаточные подфункции являются существенными.*

Лемма 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ бесповторна в B_0, $f^\sigma_{x_i} = t(x_1, \ldots, x_{i-1},$ $x_{i+1}, \ldots, x_n)$ существенна и $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ – все фиктивные переменные функции $f^{\bar\sigma}_{x_i}$. Тогда найдется набор констант $\tau_1, \ldots, \tau_k$ такой, что $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i^\sigma t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_i^\sigma t^{\tau_1, \ldots, \tau_k}_{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}}(x_1, \ldots, x_{i-1},$ $x_{i+1}, \ldots, x_n)$.*

Через S^g_B обозначим множество булевых функций, слабоповторных в B, но неслабоповторных в B_g^-.

Лемма 3. *Пусть функция $f \in S^g_B$ и f представляется в виде 2) теоремы 6, тогда $rang\ f \le 2rang\ B^*$.*

В работе [10] доказаны следующие утверждения.

Лемма 4. *Пусть функция g слабоповторна в B_0. Тогда если некоторая функция f повторна в B_0 и бесповторна в $B_0 \cup \{g\}$, и обе остаточные подфункции функции f по некоторой переменной y бесповторны в B_0, то эти остаточные подфункции являются одновременно либо существенными, либо несущественными, причем фиктивные переменные у них различны.*

Для функций, повторных в B_0, но бесповторных в $B_0 \cup \{g\}$, где g равна $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$ или $x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, *нормальным* представлением будем называть терм, в который каждая переменная входит не более одного раза и отрицание встречается только над переменными. Это определение корректно, так как легко проверить, что всегда можно избавиться от отрицания над функцией g.

Лемма 5. *У всякой функции f, бесповторной в $B_0 \cup \{g\}$, где функция $g = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$ или $g = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, степени переменных в нормальном представлении остаточных функций f_y^0 и f_y^1 равны.*

Лемма 6. *Пусть функция g слабоповторна в базисе B_0, функция f – существенная бесповторная в $B_0 \cup \{g\}$, и для некоторой переменной y и константы τ остаточная функция f_y^τ существенна и повторна в B_0. Тогда если остаточная функция $f_y^{\bar\tau}$ бесповторна в B_0, то она несущественна.*

Лемма 7. *Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ слабоповторна в базисе B_0 и $B = B_0 \cup \{g\}$. Если остаточная функция $f_y^\tau = g(h_1, \ldots, h_n)$, где h_i бесповторна в B_0 для любого i, а остаточная функция $f_y^{\bar\tau} = g(h_1, ..., h_{j-1}, \sigma, h_{j+1}, ..., h_n)$, где σ — некоторая константа, то f бесповторна в B.*

Лемма 8. *Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ слабоповторна в базисе B_0 и не является обобщенно однотипной с функцией $z_1 \oplus z_2$, и $B = B_0 \cup \{g\}$. Если f — существенная функция ранга $n + 1$ и для некоторой переменной y остаточная функция f_y^τ обобщенно однотипна с g, то f бесповторна в B тогда и только тогда, когда либо остаточная функция $f_y^{\bar\tau}$ является константой, либо существуют переменная z и константа σ такие, что $f_y^{\bar\tau} = f_{y\,z}^{\tau\,\sigma}$.*

2. Описание слабоповторных функций

В этом разделе получено полное описание слабоповторных булевых функций в одном базисе.

Лемма 9. *Для булевой функции $g(x_1, \ldots, x_4) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$ и базиса $B = B_0 \cup \{g\}$ функция f слабоповторна в B и неслабоповторна в B_0 тогда и только тогда, когда f обобщенно однотипна с одной из следующих функций: 1) $\bar x_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1 g(x_3, x_2, x_5, x_4)$, 2) $\bar x_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1x_3x_5(x_2 \vee x_4)$, 3) $\bar x_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1(x_2x_3 \vee x_4x_5)$, 4) $\bar x_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1x_3(x_2 \vee x_4x_5)$, 5) $\bar x_1x_2 g(x_3, \ldots, x_6) \vee x_1 g(x_2x_3, x_4, x_5, x_6)$.*

Доказательство. Достаточность. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что все остаточные подфункции указанных функций являются бесповторными в B. Функции 1 – 4 типа повторны в B по лемме 8. Функция 5 типа повторна в B в силу следующих соображений: если функция ранга 7 бесповторна в B и по некоторой переменной имеет остаточную подфункцию $x_2g(x_3,\ldots,x_6)$, то другая остаточная подфункция по этой переменной несущественна, что легко проверяется.

Необходимость. Функция g обладает следующими очевидными свойствами: 1) $g(x_1,x_2,x_3,x_4)=g(x_3,x_4,x_1,x_2)$, 2) $\bar{g}(x_1,x_2,x_3,x_4)=g(\bar{x}_1,\bar{x}_4,\bar{x}_3,\bar{x}_2)$. Это означает, что всегда можем избавиться от отрицания над g, а обобщенная однотипность совпадает с однотипностью.

Выпишем все остаточные подфункции функции $g(x_1,\ldots,x_4)$ по одной переменной: $g^0_{x_1} = x_3x_4$; $g^1_{x_1} = x_2 \vee x_3$; $g^0_{x_2} = x_3(x_1 \vee x_4)$; $g^1_{x_2} = x_1 \vee x_3x_4$; $g^0_{x_3} = x_1x_2$; $g^1_{x_3} = x_1 \vee x_4$; $g^0_{x_4} = x_1(x_2 \vee x_3)$; $g^1_{x_4} = x_1x_2 \vee x_3$.

Из вида остаточных подфункций функции g следует, что нормальное представление остаточных подфункций функции, обобщенно однотипной с g, записывается термами определенных видов. К примеру, если нулевая остаточная подфункция по некоторой переменной представима термом $\Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3)$, то единичная – термом $\Psi_1 \vee \Psi_2\Psi_3$. Если известно нормальное бесповторное в B_0 представление одной остаточной подфункции по любой переменной, можно построить ровно две различные функции, однотипные с g, которые имеют такую остаточную подфункцию. Например, пусть f однотипна с g и $f^{\tau}_y = x_1(x_2 \vee x_3)$. Стоит задача расстановки переменных. В силу свойства 1 функции g фиксируем переменную y на второй позиции. Из вида остаточных подфункций функции g переменная x_1 на третьей позиции. Так как x_2 и x_3 симметричны в остаточной функции f^{τ}_y, получаем два варианта для f: $g(x_2,y^{\bar{\tau}},x_1,x_3)$ и $g(x_3,y^{\bar{\tau}},x_1,x_2)$.

Очевидно, что для любой f, слабоповторной в B и неслабоповторной в B_0, имеем $rang\ f > 4$, так как она должна иметь остаточную подфункцию бесповторную в B, но повторную в B_0. Поочередно будем искать слабоповторные функции ранга 5, ранга 6 и ранга большего 6.

Найдем слабоповторные функции ранга 5. Имеется существенная переменная y такая, что $f^{\tau}_y = g^{\sigma}(x_1^{\sigma_1},\ldots,x_4^{\sigma_4})$. Тогда для функции $h(y,x_1,\ldots,x_4) = f^{\sigma}(y^{\bar{\tau}},x_1^{\sigma_1},\ldots,x_4^{\sigma_4})$ выполняется $h^0_y = g(x_1,\ldots,x_4)$.

Для любых x_k и σ в $h^{0\sigma}_{yx_k}$ все переменные входят без отрицаний, поэтому в силу леммы 5 все переменные входят в h^1_y без отрицаний.

Для остаточной функции h^1_y нужно рассмотреть три случая:
a) $h^1_y = g(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$; **b)** h^1_y бесповторна в B_0 и не имеет фиктивных переменных; **c)** h^1_y бесповторна в B_0 и имеет фиктивные переменные.

a) $h^1_y = g(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$. Тогда $h = \bar{y}g(x_1,\ldots,x_4) \vee yg(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4})$. Учитывая свойство 1 функции g, нужно проверить 11 функций такого вида. Непосредственной проверкой легко убедиться, что только функция $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_4) \vee yg(x_2, x_1, x_4, x_3)$ является слабоповторной в B. Это функция первого типа леммы.

Отметим, что в дальнейшем проверка функций на слабоповторность в B будет сводиться к нахождению остаточных подфункций, слабоповторных в B_0 и необобщенно однотипных с g, т. е. повторных в B. Так как это означает, что сами функции неслабоповторны в B.

b) Пусть $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yt(x_1, \ldots, x_5)$, где функция t – существенная бесповторная в B_0. Выпишем следующие остаточные функции: $h^0_{x_2} = \bar{y}x_3(x_1 \vee x_4) \vee yt^0_{x_2}$, $h^1_{x_2} = \bar{y}(x_1 \vee x_3x_4) \vee yt^1_{x_2}$, $h^0_{x_4} = \bar{y}x_1(x_2 \vee x_3) \vee yt^0_{x_4}$, $h^1_{x_4} = \bar{y}(x_1x_2 \vee x_3) \vee yt^1_{x_4}$.

Функция t бесповторна в B_0, по теореме 5 для любой переменной x_i, либо $t^\tau_{x_i} = t^{\bar{\tau}}_{x_i}$, то есть x_i фиктивна в t, либо если $t^\tau_{x_i} \neq t^{\bar{\tau}}_{x_i}$, то одна и только одна из этих остаточных функций существенна.

Так как в t нет фиктивных переменных, то только одна из остаточных функций $t^0_{x_2}$ и $t^1_{x_2}$ существенна, аналогичная ситуация с $t^0_{x_4}$ и $t^1_{x_4}$. Из предположения, что каждая из остаточных функций может быть существенна, рассмотрим все эти случаи и выясним, какой вид при этом они могут иметь.

Пусть остаточная $t^0_{x_2}$ существенна. Остаточная $h^0_{x_2}$ может быть, либо бесповторной в B_0, либо однотипной с g. Если $h^0_{x_2}$ бесповторна в B_0, то по теореме 5 $t^0_{x_2} = x_3(x_1 \vee x_4)$. Если $h^0_{x_2}$ однотипна с g, то $t^0_{x_2} = x_1 \vee x_3x_4$, либо $x_4 \vee x_1x_3$.

Пусть остаточная $t^1_{x_2}$ существенна. Если $h^1_{x_2}$ бесповторна в B_0, то $t^1_{x_2} = x_1 \vee x_3x_4$. Если $h^1_{x_2}$ однотипна к g, то $t^1_{x_2} = x_3(x_1 \vee x_4)$, либо $x_4(x_1 \vee x_3)$.

Пусть остаточная $t^0_{x_4}$ существенна. Если $h^0_{x_4}$ бесповторна в B_0, то по теореме 5 $t^0_{x_4} = x_1(x_2 \vee x_3)$. Если $h^0_{x_4}$ однотипна с g, то $t^0_{x_4} = x_1x_2 \vee x_3$, либо $x_1x_3 \vee x_2$.

Пусть остаточная $t^1_{x_4}$ существенна. Если $h^1_{x_4}$ бесповторна в B_0, то $t^1_{x_4} = x_1x_2 \vee x_3$. Если $h^1_{x_4}$ однотипна с g, то $t^1_{x_4} = x_1(x_2 \vee x_3)$, либо $x_2(x_1 \vee x_3)$.

Известно, что функция t существенная бесповторная в B_0 от четырех переменных, и переменные входят в нормальное представление t без отрицаний.

Учитывая, что нормальное представление функции, бесповторной в B_0, очень схоже с нормальным представлением существенной остаточной функции по любой существенной переменной, можно легко построить вид самой функции. К примеру, возьмем остаточную подфункцию $t^0_{x_2} = x_3(x_1 \vee x_4)$. Очевидно, что t может быть равна одной из следующих функций: $x_2 \vee x_3(x_1 \vee x_4)$, $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3)$, $x_3(x_1 \vee x_2 \vee x_4)$. Так как известен вид существенной остаточной функции по x_4, остаются функции $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3)$ и $x_2 \vee x_3(x_1 \vee x_4)$.

После рассмотрения всех случаев имеются 6 возможных функций для t: $x_2x_4(x_1 \vee x_3)$, $x_1x_2 \vee x_3x_4$, $x_2(x_1 \vee x_3x_4)$, $x_2 \vee x_4 \vee x_1x_3$, $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3)$ и $x_2 \vee x_3(x_1 \vee x_4)$.

Имеем следующие возможные слабоповторные функции $h_1 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_4) \vee yx_2x_4(x_1 \vee x_3)$, $h_2 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_4) \vee y(x_1x_2 \vee x_3x_4)$, $h_3 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_4) \vee yx_2(x_1 \vee x_3x_4)$, $h_4 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_4) \vee y(x_2 \vee x_4 \vee x_1x_3)$, $h_5 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_4) \vee y(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3)$, $h_6 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_4) \vee y(x_2 \vee x_3(x_1 \vee x_4))$.

Легко заметить, что $\bar{h}_1(y, \bar{x}_1, \bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2) = h_4(y, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\bar{h}_2(y, \bar{x}_1, \bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2) = h_5(y, x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\bar{h}_6(y, \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_4) = h_3(y, x_1, x_2, x_3, x_4)$, а h_1, h_2, h_3 – функции второго, третьего и четвертого типа леммы.

c) Пусть $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yt(x_1, \ldots, x_5)$, где функция t – несущественная бесповторная в B_0. Этот случай рассматривается аналогично случаю b) и слабоповторных функций в B не дает.

На этом нахождение слабоповторных функций ранга 5 закончено.

Будем искать слабоповторные функции ранга 6. Пусть f слабоповторная в B и не слабоповторная в B_0, тогда найдется переменная y и константа τ такие, что либо $f_y^\tau = (x_k^{\sigma_k} \cdot g^\sigma(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_{i_4}^{\sigma_{i_4}}))^\delta$, либо $f_y^\tau = g(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, (x_j^{\sigma_j} \cdot x_k^{\sigma_k})^\delta, \ldots, x_{i_4}^{\sigma_{i_4}})$. Следовательно, существует h обобщенно однотипная с f такая, что либо **a)** $h_y^0 = x_1g(x_2, \ldots, x_5)$, либо **b)** $h_y^0 = g(x_1x_2, x_3, x_4, x_5)$, либо **c)** $h_y^0 = g(x_3, x_1x_2, x_4, x_5)$.

Обозначим через $t(x_1, \ldots, x_5)$ остаточную h_y^1. Любая остаточная функция $(h_y^0)_{x_i}^{\tau_i}$ не содержит отрицаний, тогда нормальное представление остаточной $t_{x_i}^{\tau_i}$ также не содержит отрицаний. В силу леммы 5 в нормальном представлении t отсутствуют переменные с отрицаниями.

Пусть t повторна в B_0. Тогда она может быть представлена в одном из следующих видов:

1) $p(z_1, g(z_2, \ldots, z_5))$, где p — конъюнкция или дизъюнкция;

2) $g(z_1, \ldots, z_{i-1}, s(z_k, z_l), z_{i+1}, \ldots, z_4)$, где s — конъюнкция или дизъюнкция;

3) $g(z_1, \ldots, z_4)$.

Подробно рассмотрим случай **a)** для h_y^0, случаи **b)** и **c)** рассматриваются аналогично и новых слабоповторных функций B не дают.

a) Пусть $h_y^0 = x_1g(x_2, \ldots, x_5)$.

1) t имеет вид $p(z_1, g(z_2, \ldots, z_5))$, где p – конъюнкция или дизъюнкция. Далее рассмотрим подслучаи: а) $t = x_1g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_4})$, б) $t = x_1 \vee g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_4})$, в) $t = x_jg(x_{i_1}, \ldots, x_{i_4})$, где $x_j \neq x_1$, г) $t = x_j \vee g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_4})$, где $x_j \neq x_1$.

а) $h = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_5) \vee yx_1g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_4})$. Значит $h_{x_1}^0 = 0$, то есть по теореме 2 функция h разделима, поэтому не является слабоповторной.

б) $h = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_5) \vee y(x_1 \vee g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_4}))$. Переменные x_3 и x_5 должны находиться в h_y^1 на позициях переменных, остаточные от которых существенны, иначе получим следующую ситуацию: пусть для определенности остаточные по переменной x_3 фиктивны, тогда $(h^0_y)^\sigma_{x_3}$ существенна и представляется термом вида $x_1 \cdot \Phi$, а $(h^1_y)^\sigma_{x_3}$ имеет одну фиктивную переменную и представляется термом вида $x_1 \vee \Psi$. Но так как $h^\sigma_{x_3}$ бесповторна в B_0, нетрудно заметить противоречие с леммой 2.

Итак, $h = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee y(x_1 \vee g(x_{i_1},x_3,x_{i_3},x_5))$. Имеем 2 возможные функции $h_1 = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee y(x_1 \vee g(x_2,x_3,x_4,x_5))$, $h_2 = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee y(x_1 \vee g(x_4,x_3,x_2,x_5))$. Но по теореме 3 функция h_1 разделима, а остаточная $h_2{}^{1\ 0\ 0}_{x_2x_3x_5} = \bar{y}x_1x_4 \vee y(x_1 \vee x_4)$ повторна в B.

в) $h = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee yx_jg(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$, где $x_j \neq x_1$. Рассмотрим остаточную $h^1_{x_j} = yg(x_{i_1},\ldots,x_{i_4}) \vee \bar{y}x_1g^1_{x_j}(x_2,\ldots,x_5)$. По лемме 6 $x_1g^1_{x_j}(x_2,\ldots,x_5)$ несущественна, поэтому x_j равна x_2 или x_4.

Теперь рассмотрим $h^1_{x_1} = \bar{y}g(x_2,\ldots,x_5) \vee yx_jg^1_{x_1}(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$. По лемме 6 $x_jg^1_{x_1}(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$ несущественна, поэтому x_1 находится в $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$ на позиции переменной, остаточные по которой фиктивны. Для определенности, из свойства 1 функции g, зафиксируем ее на третьей позиции. Также из леммы 8 следует, что $x_jg^1_{x_1}(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$ является остаточной от $g(x_2,\ldots,x_5)$. Отсюда, имеем следующие возможные функции

$h_1 = \bar{y}g(x_2,\ldots,x_5) \vee yx_2g(x_3,x_5,x_1,x_4)$,
$h_2 = \bar{y}g(x_2,\ldots,x_5) \vee yx_2g(x_4,x_5,x_1,x_3)$,
$h_3 = \bar{y}g(x_2,\ldots,x_5) \vee yx_4g(x_2,x_3,x_1,x_5)$,
$h_4 = \bar{y}g(x_2,\ldots,x_5) \vee yx_4g(x_5,x_3,x_1,x_2)$.

Но $h_1{}^{1\ 1\ 1}_{x_3x_4x_5} = \bar{y}x_1 \vee yx_2$, $h_2{}^{1\ 1\ 1}_{x_3x_4x_5} = \bar{y}x_1 \vee yx_2$, $h_3{}^{1\ 1}_{x_2x_3} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$, $h_4{}^{1\ 1\ 1}_{x_2x_3x_5} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$ повторны в B.

г) $h = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee y(x_j \vee g(x_{i_1},\ldots,x_{i_4}))$, где $x_j \neq x_1$.

Рассмотрим остаточную $h^0_{x_j} = yg(x_{i_1},\ldots,x_{i_4}) \vee \bar{y}x_1g^0_{x_j}(x_2,\ldots,x_5)$. Эта остаточная повторна в B по лемме 8, так как $x_1g^0_{x_j}(x_2,\ldots,x_5)$ не может быть остаточной функции $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_4})$.

2) t имеет вид $g(z_1,\ldots,z_{i-1},s(z_k,z_l),z_{i+1},\ldots,z_4)$, где s — конъюнкция или дизъюнкция.

Пусть s — конъюнкция. Вначале рассмотрим случай, когда функция $h = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee yg_1(x_1x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5})$, где g_1 получается из g перестановкой переменных.

Рассмотрим остаточную $h^1_{x_1} = \bar{y}g(x_2,\ldots,x_5) \vee yg_1(x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5})$. Она бесповторна в B, поэтому $g(x_2,\ldots,x_5)$ равна $g_1(x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5})$. Отсюда, имеем 2 возможные функции $h_1 = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee yg(x_1x_2,x_3,x_4,x_5)$, $h_2 = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee yg(x_1x_4,x_5,x_2,x_3)$. Заметим, что $h_1(y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = h_2(y,x_1,x_4,x_5,x_2,x_3)$. А h_1 – функция пятого типа леммы.

Теперь рассмотрим случай, когда $h = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_5) \vee yg_1(x_1,x_{i_2}x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5})$. Множество $\{x_{i_2},x_{i_3}\}$ совпадает с $\{x_2,x_4\}$, иначе нетрудно заметить противоречие с леммой 6. Далее рассмотрим остаточные $h^1_{x_2} = yg_1(x_1,x_4,x_3,x_5) \vee \bar{y}x_1(x_3 \vee x_4)$ и $h^1_{x_4} = yg_1(x_1,x_2,x_3,x_5) \vee \bar{y}x_1(x_2 \vee x_5)$. Остаточная $h^1_{x_2}$ бесповторна в B, поэтому из леммы 8 следует, что $g_1(x_1, x_4, x_3, x_5)$ равна $g(x_1, x_3, x_4, x_5)$ или $g(x_1, x_4, x_3, x_5)$, но тогда $g_1(x_1, x_2, x_3, x_5)$ равна $g(x_1, x_3, x_2, x_5)$ или $g(x_1, x_2, x_3, x_5)$. А это невозможно, так как по лемме 8 остаточная $h^1_{x_4}$ будет повторна в B.

Пусть s – дизъюнкция. Тогда $h = \bar{y}x_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee y g_1(x_{i_1} \vee x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5})$. Одна из переменных x_{i_1} или x_{i_2} неравна x_1, для определенности пусть x_{i_2}, тогда рассмотрим остаточную $h^0_{x_{i_2}}$. Из вида остаточных функции g легко заметить, что $(h^0_{x_{i_2}})^0_y$ не может быть остаточной от функции $(h^0_{x_{i_2}})^1_y$, что противоречит лемме 8.

3) t имеет вид $g(z_1, \ldots, z_4)$. Тогда $h = \bar{y}x_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee y g(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$. Отметим, что $g(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$ неравна $g(x_2, \ldots, x_5)$, иначе h разделима по теореме 3. Отсюда следует, что x_1 существенна в $g(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$. Обозначим фиктивную переменную через x_k. Рассмотрев остаточную $h^0_{x_k}$, из вида остаточных функции g заключаем, что она повторна в B, так как нетрудно заметить противоречие с леммой 8.

Пусть t бесповторна в B_0. Перебором всевозможных вариантов нетрудно показать, что слабоповторных функций в B не существует.

На этом нахождение слабоповторных функций ранга 6 закончено.

Теперь будем искать слабоповторные функции ранга большего, чем 6. По теореме 6 любая слабоповторная функция однотипна с функцией h одного из двух видов:

I) $h(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, x_1, \ldots, x_{n-k}) = p((\vee\tilde{u}_1) \vee \ldots \vee (\vee\tilde{u}_k), (\&\tilde{u}_1), \ldots, (\&\tilde{u}_k), x_1, \ldots, x_{n-k})$, где $p(1, y_1, \ldots, y_n) = g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$;

II) $h(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}) = t(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}), s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}))$, где $t(x_1, \ldots, x_k, z_1, z_2)$ такая, что для любого $i \leq k$ переменная z_1 фиктивна в остаточной $t^0_{x_i}$, а z_2 – в остаточной $t^1_{x_i}$.

Рассмотрим каждый из этих вариантов.

I) $h(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, x_1, \ldots, x_{n-k}) = p((\vee\tilde{u}_1) \vee \ldots \vee (\vee\tilde{u}_k), (\&\tilde{u}_1), \ldots, (\&\tilde{u}_k), x_1, \ldots, x_{n-k})$, где $p(1, y_1, \ldots, y_n) = g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$.

Подробно разберем случай $k = 1$, для $k = 2, 3, 4$ доказывается аналогично. Среди переменных $\tilde{u}$ выделим переменную y и сделаем разложение по этой переменной, получим $h(\tilde{u}, x_1, x_2, x_3) = yp(1, \&\tilde{u}, x_1, x_2, x_3) \vee \bar{y}p(\vee\tilde{u}, 0, x_1, x_2, x_3)$.

Выпишем остаточную $h^0_y = p(\vee\tilde{u}, 0, x_1, x_2, x_3) = (\overline{\vee\tilde{u}})p(0, 0, x_1, x_2, x_3) \vee (\vee\tilde{u})p(1, 0, x_1, x_2, x_3) = (\vee\tilde{u})p(1, 0, x_1, x_2, x_3) \vee (\overline{\vee\tilde{u}})t(x_1, x_2, x_3)$.

Из свойства 1 функции g достаточно рассмотреть два случая:

1) $h^1_y = p(1, \&\tilde{u}, x_1, x_2, x_3) = g(\&\tilde{u}, x_1, x_2, x_3)$, то есть $p(1, 0, x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$;

2) $h^1_y = p(1, \&\tilde{u}, x_1, x_2, x_3) = g(x_1, \&\tilde{u}, x_2, x_3)$, то есть $p(1, 0, x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 \vee x_3)$.

Рассмотрим первый случай, второй доказывается аналогично.

Пусть $h^0_y = p(\vee\tilde{u}, 0, x_1, x_2, x_3) = (\vee\tilde{u})x_2 x_3 \vee (\overline{\vee\tilde{u}})t(x_1, x_2, x_3)$. Из переменных $\tilde{u}$ выберем переменную z, тогда $\tilde{u} = \tilde{u}^* \cup z$. Учитывая, что остаточная $(h_y^0)_{\tilde{u^*}}^{\tilde{0}} = zx_2x_3 \vee \bar{z}t(x_1,x_2,x_3)$ должна быть бесповторна в B, для функции t возможны следующие варианты: а) константа, б) x_2, в) x_3, г) x_2x_3, д) $x_1x_2x_3$, е) $x_1 \vee x_2x_3$, ж) $(x_1 \vee x_2)x_3$, з) $x_2(x_1 \vee x_3)$, к) $x_1 \vee x_2$, л) $x_1 \vee x_3$. Последовательно рассмотрим все варианты.

а) если $t = 1$, то $h_y^0 = p(\vee\tilde{u}, 0, x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \vee (\overline{\vee\tilde{u}})$. Остаточные от $h_{x_1}^1$ по y содержат переменные $\tilde{u}$ в разных степенях. Противоречие лемме 5. Если $t = 0$, то $h = \bar{y}g(\&\tilde{u}, x_1, x_2, x_3) \vee y(\vee\tilde{u})x_2x_3$. Остаточная $h_{x_2}^1 = \bar{y}(x_3 \vee (\&\tilde{u})) \vee y(\vee\tilde{u})x_3 = x_3(\bar{y} \vee (\vee\tilde{u})) \vee \bar{y}(\&\tilde{u})$ повторна в B.

б) $t = x_2$. Тогда $h_y^0 = x_2(x_3 \vee (\overline{\vee\tilde{u}}))$. Остаточные от $h_{x_1}^1$ по y содержат переменные $\tilde{u}$ в разных степенях, что невозможно по лемме 5.

в) $t = x_3$. Аналогично б).

г) $t = x_2x_3$. Тогда функция h бесповторна в B по лемме 7.

д) $t = x_1x_2x_3$. Тогда $h_y^0 = x_2x_3((\vee\tilde{u}) \vee x_1)$. Получаем функцию $h = yg(\&\tilde{u}, x_1, \ldots, x_4) \vee \bar{y}x_2x_3((\vee\tilde{u}) \vee x_1)$. Остаточная $h_{x_1}^0{}_{x_2}^1 = \bar{y}((\&\tilde{u}) \vee x_3) \vee yx_3(\tilde{u}))$ повторна в B.

е) $t = x_1 \vee x_2x_3$. Тогда $h_y^0 = x_2x_3 \vee x_1(\overline{\vee\tilde{u}})$. Остаточные от $h_{x_1}^1$ по y содержат переменные $\tilde{u}$ в разных степенях. Противоречие лемме 5.

ж) $t = (x_1 \vee x_2)x_3$. Тогда $h_y^0 = x_3(x_2 \vee x_1(\overline{\vee\tilde{u}}))$. Остаточные от $h_{x_1}^1$ по y содержат переменные $\tilde{u}$ в разных степенях. Противоречие лемме 5.

з) $t = x_2(x_1 \vee x_3)$. Аналогично ж).

к) $t = x_1 \vee x_2$. Тогда $h_y^0 = g((\overline{\vee\tilde{u}}), x_1, x_2, x_3)$. Функция h разделима по теореме 3.

л) $t = x_1 \vee x_3$. Тогда $h_y^0 = g((\overline{\vee\tilde{u}}), x_1, x_3, x_2)$. Остаточные от $h_{x_1}^1$ по y содержат переменные $\tilde{u}$ в разных степенях. Противоречие лемме 5.

II) $h(y, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+4}) = t(y, x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+4}), s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+4}))$.

Выполнив разложение по переменной y, получаем $h = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+4})) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+4}))$, где $t_1(x_1, \ldots, x_k, z)$ такая, что для всех i в остаточных $t_{x_i}^1$ фиктивна z, а $t_2(x_1, \ldots, x_k, z)$ такая, что для всех i в остаточных $t_{x_i}^0$ фиктивна z.

Очевидно, что нормальное представление s не содержит отрицаний, и функции t_1 и t_2 различны, иначе h не является слабоповторной по теореме 3. По лемме 3 функции t_1 и t_2 могут быть либо однотипными с g, либо бесповторными в B_0.

Пусть одна из функций t_1 и t_2 однотипна к g, а другая бесповторна в B_0. Тогда рассмотрев остаточную $h_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}}$, где $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\alpha}$ такие, что $g_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}}$ и $s_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}}$ существенны, а такие $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\alpha}$ всегда найдутся, получим противоречие с леммой 6.

Пусть t_1 и t_2 однотипны к g. Рассмотрим остаточную $h_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}}$. Тогда остаточная $(h_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}})_y^0 = t_1(x_1, \ldots, x_k, g_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}})$, а $(h_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}})_y^1 = t_2(x_1, \ldots, x_k, s_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}})$, отсюда либо $h_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\alpha}}$ повторна в B, либо $t_1 = t_2$, что невозможно, иначе h разделима по теореме 3.

Итак, функции t_1 и t_2 бесповторны в B_0. Возможны два варианта для функции s, когда она бесповторна в B_0 и однотипна к g.

Пусть функция s бесповторна в B_0 и существенна. Тогда рассмотрим остаточную $h^{\sigma}_{x_{k+1}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,g^{\sigma}_{x_{k+1}}) \vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,s^{\sigma}_{x_{k+1}})$, где σ такая, что $s^{\sigma}_{x_{k+1}}$ существенна. Так как $g^{\sigma}_{x_{k+1}}$ имеет одну фиктивную переменную, то $h^{\sigma}_{x_{k+1}}$ бесповторна в B_0. Обозначим фиктивную переменную функции $g^{\sigma}_{x_{k+1}}$ через x_i. Рассмотрим остаточную $h^{\sigma}_{x_{k+1}}{}^{\tau}_{x_i}$, причем τ такая, что $s^{\sigma}_{x_{k+1}}{}^{\tau}_{x_i}$ существенна. Имеем, что $(h^{\sigma}_{x_{k+1}}{}^{\tau}_{x_i})^0_y$ и $(h^{\sigma}_{x_{k+1}}{}^{\tau}_{x_i})^1_y$ существенны, бесповторны в B_0 и различны, то есть по лемме 4 $h^{\sigma}_{x_{k+1}}{}^{\tau}_{x_i}$ повторна в B_0, что невозможно, так как $h^{\sigma}_{x_{k+1}}$ бесповторна в B_0.

Пусть функция s бесповторна в B_0 и несущественна. Все переменные не могут быть фиктивны, иначе h бесповторна в B.

Рассмотрим случай, когда у функции s фиктивна только одна переменная. Из свойства 1 функции g достаточно рассмотреть случаи, когда фиктивны x_{k+1} и x_{k+2}.

Пусть в s фиктивна x_{k+1}. Рассмотрим функцию $h^0_{x_{k+1}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,x_{k+3}x_{k+4}) \vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,s(x_{k+2},x_{k+3},x_{k+4}))$. Очевидно, что она бесповторна в B_0. Затем рассмотрим следующую остаточную $h^0_{x_{k+1}}{}^{\sigma}_{x_{k+2}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,x_{k+3}x_{k+4}) \vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,s^{\sigma}_{x_{k+2}}(x_{k+3},x_{k+4}))$, где $s^{\sigma}_{x_{k+2}}$ существенна. По лемме 4 $h^0_{x_{k+1}}{}^{\sigma}_{x_{k+2}}$ повторна в B_0, что невозможно, так как $h^0_{x_{k+1}}$ бесповторна в B_0.

Пусть в s фиктивна x_{k+2}. Рассмотрим остаточную $h^{\tau}_{x_{k+4}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,g^{\tau}_{x_{k+4}}) \vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,s^{\tau}_{x_{k+4}})$, где τ такая, что $s^{\tau}_{x_{k+4}}$ имеет одну фиктивную переменную x_{k+2}. Заметим, что $g^{\tau}_{x_{k+4}}$ существенна. Очевидно, что $h^{\tau}_{x_{k+4}}$ бесповторна в B_0. Но остаточная $h^{\tau}_{x_{k+4}}{}^{\delta}_{x_{k+2}}$, где δ такая, что $g^{\tau}_{x_{k+4}}{}^{\delta}_{x_{k+2}}$ существенна, повторна в B_0, противоречие.

Рассмотрим случай, когда у функции s фиктивны только две переменные. Докажем, что среди этих фиктивных переменных не может быть x_{k+2} и x_{k+4}. От противного.

Пусть фиктивна x_{k+2}. Рассмотрим остаточную $h^0_{x_{k+2}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,g^0_{x_{k+2}}) \vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,s^0_{x_{k+2}})$. Она бесповторна в B_0, так как $g^0_{x_{k+2}}$ существенна, а $s^0_{x_{k+2}}$ имеет одну фиктивную переменную, которую обозначим ее через x_j. По лемме 4 остаточная $h^0_{x_{k+2}}{}^{\tau}_{x_j}$, где τ такая, что $g^0_{x_{k+2}}{}^{\tau}_{x_j}$ существенна, повторна в B_0, что невозможно.

Случай, когда фиктивна x_{k+4} доказывается аналогично.

Итак, фиктивными переменными s являются x_{k+1} и x_{k+3}. Рассмотрим остаточную $h^{\sigma}_{x_{k+2}}$, где σ такая, что в $s^{\sigma}_{x_{k+2}}$ фиктивными так и остались только x_{k+1} и x_{k+3}. Очевидно, что $h^{\sigma}_{x_{k+2}}$ бесповторна в B_0. По теореме 5 найдутся τ и δ такие, что $g^{\sigma}_{x_{k+2}}{}^{\tau}_{x_{k+1}}{}^{\delta}_{x_{k+3}}$ существенна. Отсюда, по лемме 4 $h^{\sigma}_{x_{k+2}}{}^{\tau}_{x_{k+1}}{}^{\delta}_{x_{k+3}}$ повторна в B_0, что невозможно.

Рассмотрим случай, когда у функции s фиктивны только три переменные. Из свойства 1 функции g достаточно рассмотреть, когда существенны только x_{k+3} и x_{k+4}.

Пусть в s существенна только x_{k+1}. Остаточная $h^0_{x_{k+1}} = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+3}x_{k+4}) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, x_{k+3})$ бесповторна в B_0. Но $h^{0\ \ \ 1}_{x_{k+1}x_{k+4}}$ по лемме 4 повторна в B_0, противоречие.

Случай, когда в s существенна только x_{k+4}, рассматривается аналогично.

Пусть s однотипна с g. Тогда $h = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+4})) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, g(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{k+4}}))$. Докажем, что ни одна из $x_{i_{k+2}}$ и $x_{i_{k+4}}$ неравна x_{k+1} или x_{k+3}. От противного.

Пусть для определенности $x_{i_{k+2}}$ равна x_{k+1}. Рассмотрим остаточную $h^0_{x_{k+1}}$. Остаточная $(h^0_{x_{k+1}})^0_y$ имеет одну фиктивную переменную, обозначим ее x_j, а $(h^0_{x_{k+1}})^1_y$ существенна, то есть $h^0_{x_{k+1}}$ бесповторна в B_0. Но $h^{0\ \ \ \tau}_{x_{k+1}x_j}$, где τ такая, что $h^{0\ \ \ \tau}_{x_{k+1}x_j}$ существенна, повторна в B_0, противоречие с бесповторностью $h^0_{x_{k+1}}$.

Отсюда следует, что $h = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+4})) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, x_{k+4}, x_{k+3}, x_{k+2}))$. Остаточная $h^{0\ \ \ 1}_{x_{k+2}x_{k+1}} = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+3}) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, x_{k+4} \vee x_{k+3})$ бесповторна в B_0, но $h^{0\ \ \ 1\ \ \ 0}_{x_{k+2}x_{k+1}x_{k+4}}$ повторна в B_0 по лемме 4, противоречие. Лемма 9 доказана. □

Теорема 7. *Система булевых функций*

$$\begin{array}{ll}
x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4), & \\
x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, & n \geq 3, \\
x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \vee x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n, & n \geq 3, \\
x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n, & n \geq 2, \\
\bar{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1 g(x_3, x_2, x_5, x_4), & \\
\bar{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1 x_3 x_5 (x_2 \vee x_4), & \\
\bar{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1(x_2x_3 \vee x_4x_5), & \\
\bar{x}_1 g(x_2, \ldots, x_5) \vee x_1 x_3 (x_2 \vee x_4x_5), & \\
\bar{x}_1 x_2 g(x_3, \ldots, x_6) \vee x_1 g(x_2x_3, x_4, x_5, x_6), &
\end{array}$$

является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в $B_0 \cup \{g\}$, *где* $g(x_1, \ldots, x_4) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$.

Доказательство. Следует из теоремы 4 и леммы 9. □

Список литературы

1. Кириченко К. Д. Слабоповторные булевы функции в некоторых предэлементарных базисах / К. Д. Кириченко. – Иркутск : Иркут. ун-т, 2000. – 61 с. – (Дискретная математика и информатика ; вып. 13).

2. Кириченко К. Д. Слабоповторные булевы функции в небинарных базисах / К. Д. Кириченко. Иркутск : Иркут. ун-т, 2000. – 21 с. – (Дискретная математика и информатика ; вып. 14).
3. Кузнецов А. В. О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики / А. В. Кузнецов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1958. – Т. 51. – С. 186–225.
4. Перязев Н. А. Сложность представлений булевых функций формулами в немонолинейных базисах / Н. А. Перязев – Иркутск : Иркут. ун-т, 1995. — 15 с. – (Дискретная математика и информатика ; вып. 2).
5. Перязев Н. А. Слабоповторные булевы функции в бинарном базисе / Н. А. Перязев. – Иркутск : Иркут. ун-т, 1998. — 12 с. – (Дискретная математика и информатика ; вып. 4).
6. Перязев Н. А. Основы теории булевых функций / Н. А. Перязев. – М. : Физматлит, 1999. – 112 с.
7. Стеценко В. А. О предплохих базисах в P_2 / В. А. Стеценко // Мат. вопр. кибернетики. – 1992. – Вып. 4. – С. 139–177.
8. Субботовская Б. А. О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами / Б. А. Субботовская // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 149, №4. – С. 784–787.
9. Черухин Д. Ю. Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов / Д. Ю. Черухин // Мат. вопр. кибернетики. – 1999. – Вып. 8. – С. 77–122.
10. Шаранхаев И. К. О слабоповторных булевых функциях в одном предэлементарном базисе / И. К. Шаранхаев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер.1. – 2003. – Т. 10, № 2 – С. 79–101.
11. Шаранхаев И. К. О булевых базисах второго яруса / И. К. Шаранхаев // Изв. вузов. Математика. – 2004. – №3. – С. 81–82.
12. Шаранхаев И. К. Слабоповторные булевы функции в предэлементарном немонотонном базисе порядка 3 / И. К. Шаранхаев // Вестн. Бурят. ун-та. Сер. 13. – 2005. – Вып. 2. – С. 61–71.
13. Шаранхаев И. К. О классификации базисов булевых функций / И. К. Шаранхаев // Вестн. Бурят. ун-та. Сер. 13 – 2006. – Вып. 3. – С. 61–67.

Шаранхаев Иван Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, тел.: (3012) 219757 (e-mail: goran5@mail.ru)

I. K. Sharankhaev
On Some Series of Bases for the Set of Boolean Functions

Abstract. In this paper the problem of comparison of Boolean bases is considered. In our case the bases are compared on the complexity of Boolean functions representation by terms (formulas). The partial order is introduced on the set of all Boolean functions bases with respect to which a system of equivalence classes is obtained.It is known that the criterion for the equivalence for two bases is a reciprocal repetition-free expressiveness of functions of the one basis by the functions of the other, and the augmentation of a basis with a function weakly repetition-containing in it allows us not only to expand it, but makes this expansion minimal, making it possible to investigate the bases using the complexity of Boolean function representations with terms.Thus, the problem of

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 15. Серия «Математика». С. 92–107

describing the equivalence classes of bases can be reduced to finding weakly repetition-containing functions in specific bases.

The basis $\{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ is the largest element in this partial order and its equivalence class forms the null level of the structure. The description of bases of the first level and, partially, of the second level has been obtained by several authors. This article describes the weakly repetition-containing Boolean functions in the same basis, in terms of uniformity, which completes the characterization of bases of the second level.

Keywords: Boolean function, term, repetition-free function, weakly repetition-containing function, base.

References

1. Kirichenko K.D. Weakly Repetition-Containing Boolean Functions in Some Pre-Elementary Bases (in Russian). *Irk. Univ. Ser.: Disk. Matem. i Informatika*, 2000, vol. 13. 61 p.
2. Kirichenko K.D. Weakly Repetition-Containing Boolean Functions in Non-Binary Bases (in Russian). *Irk. Univ. Ser.: Disk. Matem. i Informatika*,2000, vol. 14. 21 p.
3. Kuznetsov A.V. On Repetition-Free Contact Circuits and Repetition-Free Superpositions of Logic Functions (in Russian). *Trudi Mat. Instit. AN USSR*, 1958, vol. 51, pp. 186-225.
4. Peryazev N.A. Complexity of Representations of Boolean Functions by Formulas in Non-Monolinear Bases (in Russian). *Irk. Univ. Ser.: Disk. Matem. i Informatika*, 1995, vol. 2. 15 p.
5. Peryazev N.A. Weakly Repetition-Containing Boolean Functions in Binary Base (in Russian). *Irk. Univ. Ser.: Disk. Matem. i Informatika*, 1998, vol. 4. 12 p.
6. Peryazev N.A. Elements of Theory of Boolean Functions (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 1999. 112 p.
7. Stetsenko V. A. On Preworst Bases in P_2 (in Russian). *Mat. Voprosi Kibernet.*, 1992, vol. 4, pp. 139-177.
8. Subbotovskaya B. A. Comparison of Bases in Realization by Formulas of Logic Functions (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1963, vol. 4, pp. 478-481.
9. Cherukhin D. Yu. Algorithmic Criterion for Comparison of Boolean Bases (in Russian). *Mat. Voprosi Kibernet.*, 1999, vol. 8, pp. 77-122.
10. Sharankhaev I. K. On Weakly Repetition-Containing Boolean Functions in Some Pre-Elementary Base (in Russian). *Disret. Analiz i Issled. Oper. Ser. 1*, 2003, vol. 10, no 2, pp. 79-101.
11. Sharankhaev I. K. On Boolean bases of the second level (in Russian). *Izvest. Vuzov. Matem.*, 2004, no 3, pp. 81-82.
12. Sharankhaev I. K. Weakly Repetition-Containing Boolean Functions in Pre-Elementary Non-Monotone Base of Order 3 (in Russian). *Vestnik Buryat. Univ. Ser. 13*, 2005, vol. 2, pp. 61-71.
13. Sharankhaev I. K. On Classification of Bases of Boolean Functions (in Russian). *Vestnik Buryat. Univ. Ser. 13*, 2006, vol. 3, pp. 61-67.

Sharankhaev Ivan Konstantinovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Buryat State University, 24a, Smolin st., Ulan-Ude, 670000, tel.: (3012)219757 (e-mail: `goran5@mail.ru`)