Серия «Математика»
2016. Т. 15. С. 3—16

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.977.5
MSC 93C30

Построение множества достижимости двумерной импульсной управляемой системы с билинейной структурой *

Д. В. Апанович, В. А. Воронов, О. Н. Самсонюк
Иркутский государственный университет;
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

Аннотация. Рассматривается задача построения множества достижимости импульсной управляемой системы с траекториями ограниченной вариации и управлениями типа векторной меры. Особенность управляемой системы состоит в том, что граница ее множества достижимости оказывается составленной из участков, соответствующих наиболее или наименее эффективному расходованию ресурса импульсного управления. Предложен способ построения границы множества достижимости при помощи принципа максимума для некоторой задачи оптимального управления с целевым функционалом, характеризующим ресурс импульсного управления. Результаты проиллюстрированы на числовом примере. Для этого примера найдены сильно монотонные функции типа Ляпунова. Система неравенств для этих функций задает множество достижимости импульсной управляемой системы, а точки, в которых активно хотя бы одно неравенство, — его границу. Разработан алгоритм численного построения множества достижимости, основанный на формировании специального конечного множества управлений релейного типа и рассмотрении их выпуклых комбинаций. Алгоритм реализован в среде Scientific Python.

Ключевые слова: импульсная управляемая система, траектории ограниченной вариации, множество достижимости, монотонные функции типа Ляпунова, численные методы.

1. Постановка задачи и ее обсуждение

Будет рассматриваться импульсная управляемая система с двумерным неотрицательным импульсным управлением. Опишем вначале множество импульсных управлений. Пусть $T = [0, t_1]$ — заданный отрезок

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14–01–00699

времени, μ — ограниченная борелевская мера на T, удовлетворяющая условию

$$\mu(E) \in \mathbb{R}^2_+ \quad \forall\, E \in \mathcal{B}_T,$$

где $\mathbb{R}^2_+ = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\}$, $\mathcal{B}_T$ — множество всех борелевских подмножеств отрезка T. Пусть μ_{c} — непрерывная составляющая в разложении Лебега меры μ, $S_{\mathrm{d}}(\mu) = \big\{s \in T \mid \mu(\{s\}) \neq 0\big\}$. Сопоставим мере μ набор измеримых функций $\gamma(\mu) = \big\{\omega_s(\cdot)\big\}_{s\in S_{\mathrm{d}}(\mu)}$, компоненты которого $\omega_s(\cdot) = \big(\omega_{1s}(\cdot), \omega_{2s}(\cdot)\big)$ определены на соответствующих отрезках $[0, d_s]$, где $d_s := \mu(\{s\})$, и удовлетворяют условиям:

а) $\omega_{1s}(\tau) \geq 0, \quad \omega_{2s}(\tau) \geq 0, \quad \omega_{1s}(\tau) + \omega_{1s}(\tau) = 1, \quad \tau \in [0, d_s]$,

б) $\displaystyle\int_0^{d_s} \omega_s(\tau) d\tau = \mu(\{s\})$.

Пару $\big(\mu, \gamma(\mu)\big)$ будем называть импульсным управлением и обозначать символом $\pi(\mu)$.

Введем понятие ресурса импульсного управления. Для векторной меры μ полную вариацию обозначим через $|\mu|$ и зададим правилом

$$|\mu|(E) = |\mu_1|(E) + |\mu_2|(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{B}_T,$$

где μ_1, μ_2 — компоненты μ, причем в силу неотрицательности $|\mu_i| = \mu_i$, $i = 1, 2$. Тогда ресурсом управления $\pi(\mu)$ назовем величину $|\mu|(T)$, а ограничением на ресурс импульсного управления — неравенство

$$|\mu|(T) \leq M, \tag{1.1}$$

где $M \geq 0$ — заданное действительное число. Множество импульсных управлений, удовлетворяющих ограничению (1.1), будем обозначать $\mathcal{W}(T)$.

Рассмотрим импульсную управляемую систему

$$dx(t) = f(t, x)dt + G\big(t, x(t)\big)\pi(\mu), \qquad x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$\pi(\mu) \in \mathcal{W}(T). \tag{1.3}$$

Здесь $T = [0, t_1]$ — заданный отрезок времени, $x(\cdot)$ — непрерывная справа на $(0, t_1]$ функция ограниченной вариации, $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Решения системы (1.2), соответствующие управлению $\pi(\mu)$, понимаются как решения интегрального уравнения с мерой

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(t, x(t)\big)dt + \int_0^t G\big(t, x(t)\big)\mu_{\mathrm{c}}(dt) + \sum_{\substack{s\leq t,\\ s\in S_{\mathrm{d}}(\mu)}} \big(z_s(d_s) - x(s-)\big),$$

$$t \in (0, t_1],$$

где для каждого $s \in S_{\rm d}(\mu)$ функция $z_s(\cdot)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{dz_s(\tau)}{d\tau} = G\big(s, z_s(\tau)\big)\omega_s(\tau), \quad z_s(0) = x(s-).$$

В работе будет рассматриваться частный случай системы (1.2), (1.3) с неотрицательными функциями f, G и начальным значением $x_0 > 0$, причем предполагается, что f не зависит от x и является функцией из $L_\infty(T, \mathbb{R}^2)$, а G задана правилом:

$$G(x) = \begin{pmatrix} ax_2 + b & 0 \\ 0 & cx_1 + d \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{R}(t_1, V)$ — множество достижимости системы (1.2), (1.3) в момент времени t_1, соответствующее заданному ресурсу управления

$$|\mu|(T) = V. \tag{1.4}$$

Тогда

$$\mathcal{R}(t_1, V) = \big\{x_1 \mid x_1 = x(t_1+), \ \ x(\cdot) \text{ — траектория (1.2)–(1.4)}\big\}.$$

Множество достижимости системы (1.2), (1.3) при $t = t_1$, $V \in [0, M]$ будем обозначать символом $\mathcal{R}_M(t_1)$. Оно задается равенством:

$$\mathcal{R}_M(t_1) = \big\{(x, V) \mid x \in \mathcal{R}(t_1, V), \ V \in [0, M]\big\} = \bigcup_{V \in [0,M]} \mathcal{R}(t_1, V) \times \{V\}.$$

Основная цель работы состоит в описании множеств достижимости $\mathcal{R}(t_1, V)$ и $\mathcal{R}_M(t_1)$. В § 2 мы покажем, что точки на границе множеств соответствуют управлениям с чисто импульсной структурой (т. е. $\mu_c = 0$) и могут быть описаны путем применения принципа максимума к некоторым задачам оптимального управления в системе (1.2), (1.3) при целевом функционале $J\big(\pi(\mu)\big) = |\mu|(T)$. Способ построения сильно монотонных функций типа Ляпунова, неравенства для которых задают точную оценку множества достижимости, проиллюстрирован на числовом примере в § 3. Полученное в работе точное описание множества достижимости было использовано для построения коллекции тестовых примеров [1; 2]. Такие примеры использованы для тестирования алгоритма численного построения множества достижимости, реализованного в среде Scientific Python. Его обсуждению посвящен § 4.

В заключение этого раздела прокомментируем кратко постановку импульсной управляемой системы.

Рассмотрим обычную управляемую систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) + G\big(t, x(t)\big)v(t), \quad x(0) = x_0, \\ &\dot{V}(t) = ||v(t)||, \qquad V(0) = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$v(t) \geq 0 \quad \text{п.в. на } T, \qquad V(t_1) \leq M \tag{1.6}$$

с измеримыми по Лебегу существенно ограниченными управлениями $v(\cdot)$ и абсолютно непрерывными траекториями $x(\cdot)$, $V(\cdot)$. Множество скоростей системы (1.5), (1.6) не ограничено и, следовательно, последовательности траекторий могут поточечно сходиться к разрывным функциям. Импульсная система (1.2), (1.3) является в определенном смысле расширением (1.5), (1.6). А именно, для каждой траектории $x(\cdot)$ и соответствующей функции $V(\cdot)$, заданной правилом

$$V(t) = |\mu|\big([0,t]\big),$$

найдется последовательность траекторий $\big\{\big(x_k(\cdot), V_k(\cdot)\big)\big\}$ системы (1.5), (1.6), такая, что имеет место сходимость

$$\big(x_k(t), V_k(t)\big) \to \big(x(t), V(t)\big) \qquad \forall\, t \in T. \tag{1.7}$$

С другой стороны, если последовательность траекторий системы (1.5), (1.6) $\big\{x_k(\cdot), V_k(\cdot)\big\}$ обладает свойством (1.7) при некоторых непрерывных справа на $(0, t_1]$ функциях $\big(x(\cdot), V(\cdot)\big)$ (или даже ослабленным свойством — сходимостью в точках непрерывности и на концах отрезка T), то найдется управление $\pi(\mu)$, для которого $x(\cdot)$ — соответствующее решение, а $V(t) = |\mu|\big([0,t]\big)$.

Замечание 1. Описание импульсного управления, приведенное в этом разделе, применимо только для неотрицательной меры μ. В общем случае концепция решения импульсной системы и способ нахождения аппроксимирующей последовательности $\big\{x_k(\cdot), V_k(\cdot)\big\}$ по заданному импульсному управлению рассмотрены в [6; 7]. Отметим также, что принятое в данной работе понятие решения импульсной системы близко примыкает к понятию обобщенного решения, введенному в [5], а также V-решения из [4] (рассматриваемому без ограничений на образ управляющей векторной меры).

Замечание 2. Представленные в работе результаты распространяются на более общий случай n-мерной неотрицательной меры μ и $x(t) \in \mathbb{R}^n_+$, если $f(t,x) = A(t) + B(t)x$, а матрица при управлении имеет вид:

$$G(t,x) = \begin{pmatrix} \langle g_1(t), x\rangle + d_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle g_2(t), x\rangle + d_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \langle g_n(t), x\rangle + d_n(t) \end{pmatrix},$$

где $A(t)$, $B(t)$ — неотрицательные непрерывные вектор- и матричная функции, а $g_i(t) = \big(\ g_{i1}(t),\ g_{i2}(t),\ \dots,\ g_{in}(t)\ \big)$, $d_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — неотрицательные дифференцируемые функции.

2. Характеристика граничных точек множества достижимости через решения задач оптимального управления

Пусть $V \in [0, M]$. Рассмотрим две задачи оптимального управления системой (1.2), (1.3). Для краткости, импульсное управление формально представим состоящим из двух компонент $\pi(\mu) = \big(\pi(\mu_1), \pi(\mu_2)\big)$.

Задача (A):

$$J(\pi(\mu)) = |\mu|(T) \to \min; \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= f_1(t) + \big(ax_2 + b\big)\pi(\mu_1),\ \ x_1(0) = x_{10},\\ dx_2(t) &= f_2(t) + \big(cx_1 + d\big)\pi(\mu_2),\ \ x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\big(\pi(\mu_1), \pi(\mu_2)\big) \in \mathcal{W}(T), \tag{2.3}$$

$$x_1(t_1+) = \bar{x}_1, \qquad x_2(t_1+) = \bar{x}_2. \tag{2.4}$$

Задача (B):

$$J(\pi(\mu)) = |\mu|(T) \to \max; \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= f_1(t) + \big(ax_2 + b\big)\pi(\mu_1),\ \ x_1(0) = x_{10},\\ dx_2(t) &= f_2(t) + \big(cx_1 + d\big)\pi(\mu_2),\ \ x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\big(\pi(\mu_1), \pi(\mu_2)\big) \in \mathcal{W}(T), \tag{2.7}$$

$$x_1(t_1+) = \bar{x}_1, \qquad x_2(t_1+) = \bar{x}_2. \tag{2.8}$$

Обозначим через Γ_1^V множество точек $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, таких, что существует процесс $\sigma = \big(x(\cdot), \pi(\mu)\big)$ с ресурсом управления V, доставляющий экстремум в задаче (A). Аналогичное множество для задачи (B) обозначим через Γ_2^V. Введем также множества

$$\Gamma_3^V = \big\{(x_1, x_2) \mid \tilde{x}_1 + (ax_{20} + b)V \le x_1 \le \tilde{x}_1 + (a\tilde{x}_2 + b)V, \ \ x_2 = \tilde{x}_2\big\},$$

$$\Gamma_4^V = \big\{(x_1, x_2) \mid x_1 = \tilde{x}_1, \ \ \tilde{x}_2 + (cx_{10} + d)V \le x_2 \le \tilde{x}_2 + (c\tilde{x}_1 + d)V\big\},$$

где $\tilde{x}_1 := x_{10} + \displaystyle\int_0^{t_1} f_1(t)dt$, $\tilde{x}_2 := x_{20} + \displaystyle\int_0^{t_1} f_2(t)dt$.

Справедливо утверждение

Предложение 1. *Пусть Γ^V — граница $\mathcal{R}(t_1, V)$. Тогда*

$$\Gamma^V = \Gamma_1^V \cup \Gamma_2^V \cup \Gamma_3^V \cup \Gamma_4^V.$$

Укажем основные этапы конструктивного доказательства предложения 1. На первом этапе при помощи принципа максимума для импульсных процессов (см. [3; 5]) находим множества Γ_1^V и Γ_2^V. На втором этапе доказываем, что объединение множеств Γ_j^V, $j = \overline{1,4}$, задает границу $\mathcal{R}(t_1, V)$. Для этого, используя структуру Γ_j^V, $j = \overline{1,4}$, строим функции $\varphi_j(t, x_1, x_2, V)$, $j = \overline{1,4}$, и показываем, что они являются сильно убывающими функциями типа Ляпунова [6; 9], причем система неравенств

$$\varphi_j(t_1, x_1, x_2, V) \le 0, \quad j = \overline{1,4}, \tag{2.9}$$

задает точную оценку $\mathcal{R}(t_1, V)$, а точки (x_1, x_2), для которых хотя бы одно из неравенств в (2.9) активно, — границу $\mathcal{R}(t_1, V)$.

Проиллюстрируем построение сильно монотонных функций типа Ляпунова на числовом примере.

3. Пример описания множества достижимости через систему неравенств для функций типа Ляпунова

Рассмотрим импульсную управляемую систему $(\mathcal{D})$, являющуюся расширением обычной управляемой системы (S):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 + x_2 v_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= 1 + x_1 v_2, \quad x_2(0) = x_{20} = x_{10} > 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$v_1(t) \ge 0, \qquad v_2(t) \ge 0. \tag{3.2}$$

Тогда траектории импульсной системы $(\mathcal{D})$, соответствующие импульсным управлениям с ресурсом V, являются поточечными пределами траекторий (S), соответствующих управлениям $\{v_{1k}(\cdot), v_{2k}(\cdot)\}$, таким, что имеет место сходимость

$$\int_0^{t_1} \big(v_{1k}(t) + v_{2k}(t)\big) dt \to V, \quad k \to \infty.$$

Опишем множество достижимости $\mathcal{R}(t_1, V)$ и его границу Γ^V.

Из задач (A) и (B), конкретизированных для данного примера, следует, что Γ_1^V и Γ_2^V имеют вид:

$$\Gamma_1^V = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \ge \tilde{x}_1,\ x_2 \ge \tilde{x}_2, \\ x_2 = \dfrac{x_1}{\tilde{x}_1}\tilde{x}_2 + \left(V - 2\ln\dfrac{x_1}{\tilde{x}_1}\right) x_1, \text{ если } x_2 > x_1, \\ x_1 = \dfrac{x_2}{\tilde{x}_2}\tilde{x}_1 + \left(V - 2\ln\dfrac{x_2}{\tilde{x}_2}\right) x_2, \text{ если } x_2 \le x_1 \end{array} \right\};$$

$$\Gamma_2^V = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \ge \tilde{x}_1,\ x_2 \ge \tilde{x}_2, \\ x_1 = \tilde{x}_1 + (x_2 - t_1)\left(V - \dfrac{x_2 - \tilde{x_2}}{x_{10}}\right), \text{ если } x_2 > x_1, \\ x_2 = \tilde{x}_2 + (x_1 - t_1)\left(V - \dfrac{x_1 - \tilde{x_1}}{x_{20}}\right), \text{ если } x_2 \le x_1 \end{array} \right\}.$$

Здесь $\tilde{x}_1 = x_{10} + t_1$, $\tilde{x}_2 = x_{20} + t_1$. Точки из Γ_1^V и Γ_2^V достигаются при помощи чисто импульсного управления (с нулевой непрерывной составляющей). А именно, для Γ_1^V соответствующие импульсные управления $\pi(\mu) = \big(\mu_1, \mu_2, \{\omega_{1s}(\cdot), \omega_{2s}(\cdot)\}_{s\in S_{\mathrm{d}}(\mu)}\big)$ имеют вид:

– при $x_2 > x_1$

$$\mu_1 = \frac{y}{2}\delta(t - t_1), \qquad \mu_2 = \left(V - \frac{y}{2}\right)\delta(t - t_1) \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{d}}(\mu) = \{t_1\},$$

$$\omega_1(\tau) = \begin{cases} 1/2, & \tau \in [0, y], \\ 0, & \tau \in (y, V], \end{cases} \qquad \omega_2(\tau) = \begin{cases} 1/2, & \tau \in [0, y], \\ 1, & \tau \in (y, V], \end{cases} \quad y \in [0, V];$$

– при $x_2 \le x_1$

$$\mu_1 = \left(V - \frac{y}{2}\right)\delta(t - t_1), \qquad \mu_2 = \frac{y}{2}\delta(t - t_1) \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{d}}(\mu) = \{t_1\},$$

$$\omega_1(\tau) = \begin{cases} 1/2, & \tau \in [0, y], \\ 1, & \tau \in (y, V], \end{cases} \qquad \omega_2(\tau) = \begin{cases} 1/2, & \tau \in [0, y], \\ 0, & \tau \in (y, V], \end{cases} \quad y \in [0, V].$$

Точки Γ_2^V достигаются при следующих управлениях:

– при $x_2 > x_1$

$$\mu_1 = (V - y)\delta(t), \qquad \mu_2 = y\delta(t) \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{d}}(\mu) = \{0\},$$

$$\omega_1(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, y], \\ 1, & \tau \in (y, V], \end{cases} \qquad \omega_2(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0, y], \\ 0, & \tau \in (y, V], \end{cases}$$

$$y \in \left[\frac{V + \sqrt{V^2 + 4}}{2} - 1, V\right];$$

– при $x_2 \le x_1$

$$\mu_1 = y\delta(t), \qquad \mu_2 = (V - y)\delta(t) \;\Rightarrow\; S_{\mathrm{d}}(\mu) = \{0\},$$

$$\omega_1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0, y], \\ 0, & \tau \in (y, V], \end{cases} \qquad \omega_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, y], \\ 1, & \tau \in (y, V], \end{cases}$$

$$y \in \left[\frac{V + \sqrt{V^2 + 4}}{2} - 1, V\right].$$

Множества Γ_3^V и Γ_4^V задаются как в разделе 2:

$$\Gamma_3^V = \big\{(x_1, x_2) \mid \tilde{x}_1 + x_{20}V \le x_1 \le \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 V, \;\; x_2 = \tilde{x}_2\big\},$$

$$\Gamma_4^V = \big\{(x_1, x_2) \mid x_1 = \tilde{x}_1, \;\; \tilde{x}_2 + x_{10}V \le x_2 \le \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 V\big\}.$$

Точки Γ_3^V, Γ_4^V также могут быть достигнуты чисто импульсными управлениями с компонентами:

а) для Γ_3^V

$$\mu_1 = V\delta(t-s), \qquad \mu_2 = 0, \quad S_{\mathrm{d}}(\mu) = \{s\},$$

$$\omega_1(\tau) = 1, \quad \omega_2(\tau) = 0, \quad \tau \in [0, V], \quad s \in [0, t_1];$$

б) для Γ_4^V

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = V\delta(t-s), \quad S_{\mathrm{d}}(\mu) = \{s\},$$

$$\omega_1(\tau) = 0, \quad \omega_2(\tau) = 1, \quad \tau \in [0, V], \quad s \in [0, t_1].$$

Форма кривых, задающих Γ_j^V, $j = \overline{1,4}$, позволяет сформировать гипотезу относительно функций типа Ляпунова, сильно монотонных относительно импульсной системы. Определим функции:

$$\varphi_1(t, x_1, x_2, V) = \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} - V + 2\ln(x_1) - \dfrac{x_{20}+t}{x_{10}+t} - 2\ln(x_{10}+t), \\ \hfill x_2 > x_1, \\ \dfrac{x_1}{x_2} - V + 2\ln(x_2) - \dfrac{x_{10}+t}{x_{20}+t} - 2\ln(x_{20}+t), \\ \hfill x_2 \le x_1; \end{cases}$$

$$\varphi_2(t, x_1, x_2, V) = \begin{cases} V - \dfrac{x_1 - x_{10} - t}{x_2 - t} - \dfrac{x_2 - x_{20} - t}{x_{10}}, \\ \hfill x_2 > x_1, \\ V - \dfrac{x_1 - x_{10} - t}{x_{20}} - \dfrac{x_2 - x_{20} - t}{x_1 - t}, \\ \hfill x_2 \le x_1; \end{cases}$$

$$\varphi_3(t, x_1, x_2, V) = -x_1 + x_{10} + t;$$

$$\varphi_4(t, x_1, x_2, V) = -x_2 + x_{20} + t.$$

Покажем, что φ_j, $j = \overline{1,4}$, сильно убывают относительно импульсной системы.

Начнем с функций φ_3 и φ_4. Легко видеть, что эти функции сильно убывают, так как их суперпозиция с любым решением рассматриваемой импульсной системы является невозрастающей функцией аргумента t. Это позволяет получить очевидную оценку

$$\mathcal{R}(t, V) \subset \big\{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge x_{10} + t,\, x_2 \ge x_{20} + t\big\}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь φ_1 и φ_2. Из (3.3) следует, что сильную монотонность достаточно установить при $x_1 \ge \tilde{x_1}$, $x_2 \ge \tilde{x_2}$. На этом множестве φ_1, φ_2 являются гладкими при $x_1 \ne x_2$ и липшицевыми в окрестности точек, для которых $x_1 = x_2$. Это позволяет использовать инфинитезимальный критерий сильной монотонности в форме дифференциальных неравенств, которые должны выполняться при $x_1 \neq x_2$.

Напомним [6; 9] (см. также [8; 10]), что инфинитезимальный критерий сильного убывания для $\varphi(t, x_1, x_2, V)$ состоит в выполнении дифференциальных неравенств (для краткости опускаем аргументы):

$$\begin{gathered} h_0[\varphi] := \varphi_t + \varphi_{x_1} \cdot 1 + \varphi_{x_2} \cdot 1 \leq 0 \\ \forall\,(t, x_1, x_2, V) \in (0, t_1) \times \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2\} \times [0, +\infty); \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} h_1[\varphi] := \varphi_V + \max_{\substack{v_1, v_2 \geq 0,\\ v_1 + v_2 = 1}} \big(\varphi_{x_1} x_2 v_1 + \varphi_{x_2} x_1 v_2\big) \leq 0 \\ \forall\,(t, x_1, x_2, V) \in [0, t_1] \times \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2\} \times (0, +\infty). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Проверим выполнение критерия монотонности для φ_j, $j = 1, 2$.

Для φ_1 при $x_2 > x_1 \geq x_{10} + t$ имеем

$$\begin{aligned} h_0[\varphi_1] &= -\frac{2}{x_{10} + t} + \frac{x_{20} - x_{10}}{(x_{10} + t)^2} + \frac{2}{x_1} - \frac{x_2 - x_1}{x_1^2} \leq 0, \\ h_1[\varphi_1] &= -1 + \max_{\substack{v_1, v_2 \geq 0,\\ v_1 + v_2 = 1}} \left(-\frac{x_2 - 2x_1}{x_1^2} x_2 v_1 + v_2\right) = \\ &= \max_{v_1 \in [0,1]} -\frac{(x_2 - x_1)^2}{x_1^2} v_1 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется выполнение дифференциальных неравенств при $x_1 > x_2 \geq x_{20} + t$.

Для φ_2 при $x_2 > x_1 \geq x_{10} + t$ имеем

$$h_0[\varphi_2] = 0,$$

$$h_1[\varphi_2] = 1 + \max_{\substack{v_1, v_2 \geq 0,\\ v_1 + v_2 = 1}} \left(-\frac{1}{x_2 - t} x_2 v_1 + \frac{x_1 - x_{10} - t}{(x_2 - t)^2} x_1 v_2 - \frac{1}{x_{10}} x_1 v_2\right) \leq$$

$$\leq 1 + \max_{\substack{v_1, v_2 \geq 0,\\ v_1 + v_2 = 1}} \left(-\frac{1}{x_2 - t} x_2 v_1 + \frac{x_1 - x_{10} - t}{(x_1 - t)^2} x_1 v_2 - \frac{1}{x_{10}} x_1 v_2\right).$$

Чтобы установить $h_1[\varphi_2] \leq 0$, достаточно доказать справедливость неравенства

$$1 + \frac{x_1 - x_{10} - t}{(x_1 - t)^2} x_1 - \frac{1}{x_{10}} x_1 \leq 0 \qquad \forall\, x_1 \in [x_{10} + t, +\infty),\ \forall\, t \geq 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим функцию аргумента x_1:

$$g(x_1) := \frac{(x_1 - t)^2}{x_1} - \frac{(x_1 - t)^2}{x_{10}} + x_1 - x_{10} - t,$$

где $t \geq 0$ — параметр. При каждом t функция $g(x_1)$ строго убывает на промежутке $[x_{10} + t, +\infty)$, причем $g(x_{10} + t) \leq 0$. Очевидно, что из $g(x_1) \leq 0$ следует неравенство (3.6).

Аналогично проверяется выполнение дифференциальных неравенств $h_0[\varphi_2] \leq 0$, $h_1[\varphi_2] \leq 0$ при $x_1 > x_2 \geq x_{20} + t$. Следовательно, φ_2 удовлетворяет (3.4), (3.5).

Таким образом, доказано, что φ_j, $j = \overline{1,4}$, сильно убывают относительно импульсной системы, соответствующей (3.1), (3.2), и, следовательно, задают внешнюю аппроксимацию множества достижимости $\mathcal{R}(t_1, V)$ [9]. Пусть $V \geq 0$ — заданное число. Обозначим через Q множество точек (x_1, x_2), удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1, x_1, x_2, V) \leq 0, & \varphi_2(t_1, x_1, x_2, V) \leq 0, \\ \varphi_3(t_1, x_1, x_2, V) \leq 0, & \varphi_4(t_1, x_1, x_2, V) \leq 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Поскольку $\varphi_j(0, x_{10}, x_{20}, 0) = 0$, $j = \overline{1,4}$, то свойство сильного убывания гарантирует включение

$$\mathcal{R}(t_1, V) \subseteq Q.$$

С другой стороны, граница Q совпадает с $\Gamma^V = \Gamma_1^V \cup \Gamma_2^V \cup \Gamma_3^V \cup \Gamma_4^V$ и, как было показано, достижима при помощи чисто импульсных управлений. Это означает, что Γ^V задает границу $\mathcal{R}(t_1, V)$, причем из односвязности множества $\mathcal{R}(t_1, V)$ (в чем нетрудно убедиться) следует равенство

$$\mathcal{R}(t_1, V) = Q.$$

Таким образом, Q является точной оценкой $\mathcal{R}(t_1, V)$.

Что касается множества достижимости $\mathcal{R}_M(t_1)$, то оно состоит из точек (x_1, x_2, V), удовлетворяющих (3.7) при $V \in [0, M]$.

4. Численное построение множества достижимости

Для численного построения множества достижимости нелинейной импульсной управляемой системы с неотрицательной векторной мерой (импульсным управлением) был разработан и программно реализован алгоритм [1; 2].

Алгоритм основан на формировании специального конечного множества управлений релейного типа для вспомогательной управляемой системе с абсолютно непрерывными траекториями и рассмотрении их выпуклых комбинаций. При этом допускается последовательное наращивание числа опорных управлений. Выпуклые комбинации включают k опорных управлений, а их коэффициенты принадлежат некоторой равномерной сетке. Как показали численные эксперименты, случайный выбор управлений с большим числом переключений не приводит к равномерному распределению терминальных точек траекторий по множеству достижимости, и даже при измельчении разбиения временного интервала не всегда удается получить достаточно точную аппроксимацию множества достижимости. Поэтому в общем случае требуется последовательное увеличение параметров k и s (s — число переключений управления), в сочетании с измельчениями сетки на симплексе и разбиения, которому принадлежат моменты переключений.

Алгоритм реализован в среде Scientific Python. Результаты, представленные в §§ 1–3, были использованы для построения тестовых примеров. Проведенные численные эксперименты показали эффективность алгоритма и его программной реализации для тестовых примеров, в том числе с неодносвязными множествами достижимости.

Приведенные ниже примеры относятся к классу задач, для которых данный алгоритм позволяет построить сколь угодно точную аппроксимацию множества достижимости уже при $s = 2$ и переборе попарных линейных комбинаций.

Пример 1. Рассматривается управляемая система, для импульсного расширения которой множество достижимости было найдено в § 3:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 + x_2 v_1, \ \ x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 &= 1 + x_1 v_2, \ \ x_2(0) = 1, \end{aligned}$$

$$v_1(t) \geq 0, \quad v_2(t) \geq 0.$$

На рис. 1 приведена внутренняя аппроксимация множества достижимости соответствующей импульсной системы при $t_1 = 1$ и $V = 2$.

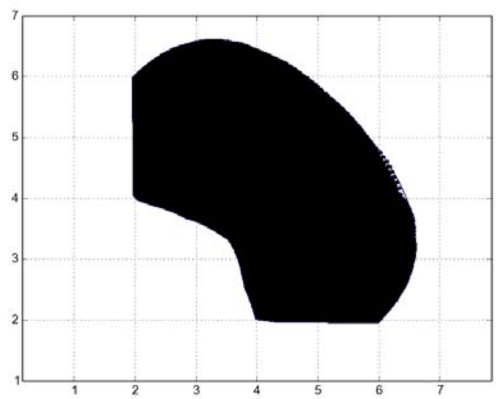

Рис. 1. Множество достижимости в примере 1.

Пример 2. Интегральные кривые следующей системы при нулевом управлении представляют собой окружности с центром в начале координат, причем модуль фазовой скорости всюду равен 1. Как и в примере 1, управления неотрицательны.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2/\|x\| - x_1 v_1, \quad x_1(0) = 2; \\ \dot{x}_2 &= -x_1/\|x\| - x_2 v_2, \ \ x_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Аппроксимация множества достижимости при $t_1 = 13$, $V = 1$ приведена на рис 2.

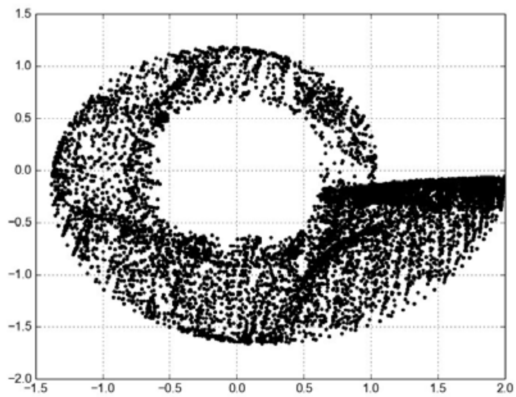

Рис. 2. Множество достижимости в примере 2.

Список литературы

1. Апанович Д. В. Численная аппроксимация множеств достижимости нелинейных импульсных управляемых систем / Д. В. Апанович, В. А. Воронов // Теория управления и математическое моделирование : тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н. В. Азбелева и проф. Е. Л. Тонкова. (Ижевск, Россия, 9–11 июня 2015 г.). – Ижевск : Удмурт. ун-т, 2015. – С. 24–25.
2. Апанович Д. В. Численная аппроксимация неодносвязного множества достижимости нелинейной импульсной управляемой системы / Д. В. Апанович, В. А. Воронов // Тез. докл. III Российско-монгольской конф. молодых ученых по мат. моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Иркутск (Россия) – Ханх (Монголия), 23–30 июня 2015 г.). – Иркутск : Научно-организац. отд. ИДСТУ СО РАН, 2015. – С. 17.
3. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. – 2-е изд. – М. : Физматлит, 2003.
4. Завалищин С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991.
5. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович — М. : Наука, 2005.
6. Самсонюк О. Н. Монотонность функций типа Ляпунова для импульсных управляемых систем / О. Н. Самсонюк // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 104–123.

7. Самсонюк О. Н. Инвариантность множеств относительно нелинейных импульсных управляемых систем / О. Н. Самсонюк // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 3. – С. 44–61.
8. Nonsmooth Analysis and Control Theory / F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski – N. Y. : Springer-Verlag, 1998.
9. Dykhta V. Some applications of Hamilton – Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems / V. Dykhta, O. Samsonyuk // European Journal of Control. – 2011. – Vol. 17. – P. 55–69.
10. Vinter R. B. Optimal Control / R. B. Vinter. – Boston : Birkhauser, 2000.

Апанович Данил Владимирович, студент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1,
(e-mail: dvapan@gmail.com)

Воронов Всеволод Александрович, кандидат технических наук, научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453084
(e-mail: v-vor@yandex.ru)

Самсонюк Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453151, (e-mail: samsonuk.olga@rambler.ru)

D. V. Apanovich, V. A. Voronov, O. N. Samsonyuk

Construction of the Reachable Set for a Two-Dimensional Bilinear Impulsive Control System

Abstract. This paper deals with a problem of construction of the reachable set for an impulsive control system with trajectories of bounded variation and impulsive controls (regular vector measures). The considered control system has a bilinear structure relative to the control variable. A method for constructing of the boundary of the reachable set is proposed. This method is based on using of special impulsive optimal control problems and Lyapunov type functions. These functions are strongly monotone relative to the impulsive control system. Presented results are illustrated by a numerical example. An algorithm of numerical approximation of reachable sets for nonlinear impulsive control systems is discussed. This algorithm is realized in the Scientific Python environment.

Keywords: measure-driven impulsive control system, trajectories of bounded variation, reachable set, monotone of Lyapunov type functions, numerical methods.

References

1. Apanovich D.V., Voronov V.A. Numerical approximation of reachable sets for nonlinear impulsive control systems [Chislennaya approksimaciya mnozhestv dostizhimosti nelinejnyh impulsnyh upravlyaemyh sistem]. *Abstracts of Russian Conference with International Participation dedicated to the memory of prof. N. V. Azbelev and prof. E. L. Tonkov*, Izhevsk, Russia, June 9–11, 2015, pp. 24–25.
2. Apanovich D.V., Voronov V.A. Numerical approximation of the non-simply connected reachable set for a nonlinear impulsive control system [Chislennaya approksimaciya neodnosvyaznogo mnozhestva dostizhimosti nelinejnoj impulsnoj upravlyaemoj sistemy]. *Abstract of 3rd Russian–Mongolian Conference of Young Scientist on Math Modelling and Information Technology*, Irkutsk, Russia – Hanh, Mongolia, June 23–30, 2015, p. 17.
3. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. Optimal Impulsive Control with Applications [*Optimalnoe impulsnoe upravlenie s prilozheniyami*]. Moscow, Fizmatlit, 2000.
4. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Impulse Processes: Models and Applications [*Impulsnye processy: modeli i prilozhenija*]. Moscow, Nauka, 1991.
5. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Optimization of Dynamic Systems with Impulsive Controls [*Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impulsnymi upravleniyami*]. Moscow, Nauka, 2005.
6. Samsonyuk O.N. Monotonicity of Lyapunov Type Functions for Impulsive Control Systems [Monotonost' funkcii tipa Lyapunova dlya impul'snykh upravlyaemihk sistem]. *The bulletin of Irkutsk state university. Mathematics*, 2014, vol. 7, pp. 104–123.
7. Samsonyuk O.N. Invariant Sets for the Nonlinear Impulsive Control Systems. *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no 3, pp. 405–418.
8. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. New York, Springer-Verlag, 1998.
9. Dykhta V., Samsonyuk O. Some Applications of Hamilton-Jacobi Inequalities for Classical and Impulsive Optimal Control Problems. *European Journal of Control*, 2011, vol. 17, pp. 55–69.
10. Vinter R.B. Optimal Control. Birkhauser, Boston, 2000.

Apanovich Danil Vladimirovich, student, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, (e-mail: dvapan@gmail.com)

Voronov Vsevolod Aleksandrovich, Candidate of Sciences (Technics), researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov st., 664033, tel.: (3952) 453084 (e-mail: v-vor@yandex.ru)

Samsonyuk Olga Nikolaevna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Associate Professor, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov st., 664033, tel.: (3952) 453151, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003,
(e-mail: samsonuk.olga@rambler.ru)