Серия «Математика»
2016. Т. 15. С. 50—61

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.97
MSC 49J21

Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением

А. Керимбеков
Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина

Р. Ж. Наметкулова
Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина

А. К. Кадиримбетова
Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина

Аннотация. Исследована задача оптимального управления тепловым процессом, описываемым интегро-дифференциальным уравнением в случае, когда управляющие параметры нелинейно входят как в уравнение, так и в граничное условие. Введено понятие слабо обобщенного решения краевой задачи и указан алгоритм его построения. Установлено, что оптимальные управления следует находить как решение системы нелинейных интегральных уравнений с дополнительными условиями в виде системы дифференциальных неравенств относительно функций источников.

Ключевые слова: краевая задача, слабо обобщенное решение, функционал, принцип максимума, оптимальное управление.

Введение

Математическая формализация некоторых прикладных задач приводит к задачам управления системами с распределенными параметрами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными [1; 2; 3]. Однако, несмотря на обилие исследований по теории управления, задачи управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями, в случае, когда параметры управления нелинейно входят в уравнение и в граничное условие, мало изучены [5; 6; 7; 8; 9; 10]. В данной статье исследована задача управления процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функция внешнего воздействия и граничное условие нелинейно содержат параметры управления. Качество управления оценивается обобщенным квадратичным функционалом. На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [3] условия оптимальности управления получены в виде системы равенств и неравенств, содержащих решения сопряженной краевой задачи. После исключения этих решений условия оптимальности приведены к более простому виду.

1. Краевая задача управляемого процесса

Пусть состояние теплового процесса описывается скалярной функцией $\nu(t,x)$, которая в области $Q=\{0<x<1; 0<t<T\}$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению [1; 2; 3]

$$\nu_t=\nu_{xx}+\mu\int_0^T K(t,\tau)\nu(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)], \tag{1.1}$$

а на границе области Q начальному

$$\nu(0,x)=\psi(x), 0<x<1 \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$\nu_x(t,0)=0, \nu_x(t,1)+\alpha\nu(t,1)=p[t,\vartheta(t)], 0<t\leq T, \tag{1.3}$$

где $K(t,\tau)$ – заданная функция, которая определена в области $D=\{0\leq t\leq T, 0\leq\tau\leq T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{1.4}$$

т. е. $K(t,\tau)\in H(D); \psi(x)\in H(0,1)$ – заданная функции; $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q), p[t,\vartheta(t)]\in H(0,T)$ – функции внешних источников, которые нелинейно зависят от функций управления $u(t,x)\in H(Q)$ и $\vartheta(t)\in H(0,T)$, причем имеют место соотношения

$$f_u[t,x,u(t,x)]\neq 0, p_\vartheta[t,\vartheta]\neq 0, \quad \forall t\in(0,T),\ x\in(0,1) \tag{1.5}$$

μ — параметр, постоянная $\alpha>0$, T — фиксированный момент времени; $H(Y)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Для краевой задачи (1.1)–(1.3) мы будем пользоваться понятием слабо обобщенного решения краевой задачи.

Определение 1. *Слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $\nu(t,x) \in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_0^1 (\nu\phi)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \Bigg[\nu(t,x)(\phi_t - \phi_{xx}) +$$
$$+\phi(t,x)\left(\mu\int_0^T K(t,\tau)\nu(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)]\right)\Bigg]dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\Big\{p[t,\vartheta(t)]\phi(t,1) - (\phi_x(t,1)+$$
$$+\alpha\phi(t,1))\nu(t,1) + \phi_x(t,0)\nu(t,0)\Big\}dt \qquad (1.6)$$

при любых t_1 и t_2 $0 < t_1 \leq t_2 \leq T$, и для любой функции $\phi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$, а также начальному и граничным условиям в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 \nu(t,x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 \psi(x)\phi_0(x)dx,$$
$$\lim_{x\to1}\int_0^T (\nu_x(t,x) - \alpha\nu(t,x))\phi_1(t)dt = \int_0^T p[t,\vartheta(t)]\phi_1(t)dt,$$
$$\lim_{x\to+0}\int_0^T \nu_x(t,x)\phi_1(t)dt = 0 \qquad (1.7)$$

имеют место для любых функций $\phi_0(x) \in H(0,1)$ и $\phi_1(t) \in H(0,T)$, где $C^{1,2}(Q)$ –– пространство функций, имеющих производную первого порядка по переменной t и второго порядка по переменной x.

Для построения решения краевой задачи (1.1)–(1.3) используем собственные функции и собственные значения краевой задачи [3]

$$z_n''(x) + \lambda_n^2 z_n(x) = 0, \quad z_n'(0) = 0, \quad z_n'(1) + \alpha z_n(1) = 0. \qquad (1.8)$$

Собственные функции имеют вид

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x, \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad (1.9)$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, а соответствующие им собственные значения λ_n определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda x = \alpha$ и удовлетворяют условиям

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \lim_{k\to\infty}\lambda_k = \infty;$$
$$(n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), n = 1,2,3,\ldots. \qquad (1.10)$$

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$\nu(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(t) z_n(x), \tag{1.11}$$

где

$$\nu_n(t) = < \nu(t,x), z_n(x) > \tag{1.12}$$

является коэффициентами Фурье функции $\nu(t,x)$, символом $< \cdot, \cdot >$ обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве H(0,1). Будем пользоваться также разложениями

$$f[t,x,u(t,x)] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t,u) z_n(x),$$

$$f_n(t,u) = < f[t,x,u(t,x)], z_n(x) >= \int_0^1 f[t,x,u(t,x)] z_n(x) dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n z_n(x), \quad \psi_n = < \psi(x), z_n(x) >= \int_0^1 \psi(x) z_n(x) dx. \tag{1.13}$$

Следуя методике работы [5], формальное решение краевой задачи (1.1)– (1.3) находим согласно интегрального тождества (1.6). Тогда относительно $\nu_n(t) = < \nu(t,x), z_n(x) >$ получим соотношение

$$\begin{aligned} \nu_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \Big(\mu \int_0^T K_n(t,s) \nu_n(s) ds + \\ + f_n(\tau,u) + z_n(1) p[\tau,\vartheta] \Big) d\tau e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n, \end{aligned} \tag{1.14}$$

которое является линейным интегральным уравнением.

Уравнение (1.14) перепишем в виде

$$\nu_n(t) = \mu \int_0^T K_n(t,s) \nu_n(s) ds + a_n(t), \tag{1.15}$$

где

$$K_n(t,s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} K(\tau,s) d\tau, \tag{1.16}$$

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} [f_n(\tau,u) + z_n(1) p[\tau,\vartheta(\tau)]] d\tau. \tag{1.17}$$

Решение интегрального уравнения (1.15) находим по формуле [4]

$$\nu_n(t) = \mu \int_0^T R_n(t,s,\mu) a_n(s) ds + a_n(t), \tag{1.18}$$

где

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^{i-1}K_{n,i}(t,s), n=1,2,3,\ldots, \tag{1.19}$$

резольвента ядра $K_{n,1}(t,s)=K_n(t,s)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$ определяются по формулами [4]

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta, i=1,2,3,... \tag{1.20}$$

Установлено, что имеет место следующие оценки

$$\left|K_{n,i+1}(t,s)\right|^2\le\frac{\left(K_0T^2\right)^{i-1}}{(2\lambda_n^2)^i}\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta, \tag{1.21}$$

$$\mu:|\mu|<\sqrt{\frac{2}{K_0T}}\lambda_n,\quad n=1,2,3..., \tag{1.22}$$

$$\begin{gathered}\int_0^T R_n^2(t,s,\mu)ds\le\frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0T})^2},\\ K_0=\int_0^T\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta ds.\end{gathered} \tag{1.23}$$

Как следует из (1.22), радиус сходимости ряда (1.19) увеличивается с ростом $n=1,2,3,\ldots$. Ряд (1.19) сходится абсолютно для любого μ из интервала

$$|\mu|<\sqrt{\frac{2}{K_0T}}\lambda_1$$

и резольвента является непрерывной функцией по совокупности аргументов. Далее формулу (1.18) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\nu_n(t)=\psi_n[e^{-\lambda_n^2t}+\mu\int_0^T R_n(t,s\mu)e^{-\lambda_n^2s}ds]+\\ +\int_0^T\varepsilon_n(t,\tau,\mu)[f_n(\tau,u)+z_n(1)p(\tau,\vartheta(\tau))]d\tau,\end{gathered} \tag{1.24}$$

где

$$\varepsilon_n\left(t,\tau,\mu\right)=\begin{cases}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\mu\int_\tau^T R_n(t,s,\mu)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \mu\int_\tau^T R_n(t,s,\mu)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t\le\tau\le T,\end{cases} \tag{1.25}$$

и при $t=T$

$$\varepsilon_n(T,\tau,\mu)=e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}+\mu\int_\tau^T R_n(T,s,\mu)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds.$$

Из соотношения

$$\int_0^T \int_0^1 \nu^2(t,x)dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2(t)dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mu \int_0^T R_n(t,s,\tau)a_n(s)ds+$$

$$+a_n(t)\Big)^2 dt \leq 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ 4\psi_n^2 \Big[e^{-2\lambda_n^2 t} + \frac{\mu^2 K_0}{2\lambda_n^2(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0 T})^2} \Big] +$$

$$+\frac{2}{\lambda_n^2}\Big(1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0 T})^2}\Big) \Big[\int_0^T f_n^2(\tau,u)d\tau + \int_0^T p^2(t,\vartheta(t))dt \Big] \Big\} dt \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ 4\psi_n^2 \Big[\frac{1}{2\lambda_n^2} + \frac{\mu^2 K_0 T}{2\lambda_n^2(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0 T})^2} \Big] + \frac{4T}{2\lambda_n^2}\Big(1+$$

$$+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0 T})^2}\Big)\Big(\|f(t,x,u(t,x))\|^2_{H(Q)} + \|p(t,\vartheta(t))\|^2_{H(0,T)} \Big) \Big\} \leq$$

$$\leq 4\Big(1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0 T})^2}\Big) \Big\{ \|\psi(x)\|^2_{H(0,1)} + T\,\|f(t,x,u(t,x))\|^2_{H(Q)} +$$

$$+T\,\|p(t,\vartheta(t))\|^2_{H(0,T)} \Big\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq 4\Big(1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0 T})^2}\Big)\Big(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\Big)\times$$

$$\times\Big\{ \|\psi(x)\|^2_{H(0,1)} + T\,\|f(t,x,u(t,x))\|^2_{H(Q)} + T\,\|p(t,\vartheta(t))\|^2_{H(0,T)} \Big\} < \infty \tag{1.26}$$

следует, что решение краевой задачи (1.1)–(1.3), определяемое по формулам (1.11), (1.18), является элементом гильбертова пространства, т. е. $\nu(t,x) \in H(Q)$ при любом распределенном управлении $u(t,x)$ и граничном управлении $\vartheta(t)$.

2. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$I(u,\vartheta) = \int_0^1 \big[\nu(T,x) - \xi(x)\big]^2 dx+$$

$$+\beta \int_0^T \Big\{ \int_0^1 q^2[t,x,u(t,x)]dx + \theta^2[t,\vartheta(t)] \Big\} dt, \beta > 0 \tag{2.1}$$

на множестве решений краевой задачи (1.1)–(1.3), т. е. нужно найти такие управления $u^0(t,x) \in H(Q)$ и $\vartheta^0(t) \in H(0,T)$, которые вместе с соответствующим им решением $\nu^0(t,x)$ краевой задачи (1.1)–(1.3) доставляет наименьшее возможное значение функционалу (2.1). Здесь

$\xi(x) \in H(0,1)$, $q[t,x,u(t,x)] \in H(Q)$ и $\theta[t,\vartheta(t)] \in H(0,T)$ — заданные функции, причем функции $q[t,x,u(t,x)]$ и $\theta[t,\vartheta(t)]$ по функциональным переменным $u(t,x)$ и $\vartheta(t)$ строго выпуклы и имеют производные (обобщенные) до второго порядка. Имеет место соотношение

$$I(u_1,\vartheta_1)+I(u_2,\vartheta_2) \geq 2I\Big(\frac{u_1+u_2}{2},\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\Big)+\frac{1}{2}\int_0^1\Big(\nu_1(T,x)-$$

$$-\nu_2(T,x)\Big)^2dx+2\beta\Bigg\{\int_0^T\int_0^1\Big(q[t,x,u_1(t,x)]-q[t,x,u_2(t,x)]\Big)^2dxdt+$$

$$+\int_0^T\Big(\theta[t,\vartheta_1(t)]-\theta[t,\vartheta_2(t)]\Big)^2dt\Bigg\}, \qquad (2.2)$$

которое доказывается непосредственным вычислением. Из (2.2), в силу неотрицательности последних трех слагаемых, имеем неравенство

$$I(u_1,\vartheta_1)+I(u_2,\vartheta_2) \geq 2I\Big(\frac{u_1+u_2}{2},\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\Big),$$

из которого следует, что функционал $I(u,\vartheta)$ является строго выпуклым и минимальное значение достигается лишь на единственном элементе $\big(u^0(t,x),\vartheta^0(t)\big)$.

Поскольку в силу условия (1.5) каждое векторное управление $\big(u^0(t,x),\vartheta^0(t)\big)$ единственным образом определяет управляемый процесс $\nu(t,x)$, то управлениям $u(t,x)+\Delta u(t,x)$ и $\vartheta(t)+\Delta\vartheta(t)$ соответствует решение краевой задачи (1.1)–(1.3) вида $\nu(t,x)+\Delta\nu(t,x)$, где $\Delta\nu(t,x)$ – приращение, соответствующее приращениям $\Delta u(t,x)$ и $\Delta\vartheta(t)$. Согласно методике вывода принципа максимума [3] приращение функционала (2.1) можно представить в виде

$$\Delta I(u,\vartheta)=I(u+\Delta u,\vartheta+\Delta\vartheta)-I(u,v)=$$

$$=-\int_0^T\int_0^1\omega(t,x)\Big\{\big[f(t,x,u+\Delta u)-f(t,x,u)\big]-\beta\big[q^2(t,x,u+\Delta u)-$$

$$-q^2(t,x,u)\big]\Big\}dxdt-\int_0^T\int_0^1\omega(t,1)\Big\{\big[p(t,\vartheta+\Delta\vartheta)-$$

$$-p(t,\vartheta)\big]-\beta\big[\theta^2(t,\vartheta+\Delta\vartheta)-\theta^2(t,\vartheta)\big]\Big\}dtdx+\int_0^1\Delta\nu^2(T,x)dx=$$

$$=-\int_0^T\int_0^1\Delta\Pi(t,x,\omega,u,\vartheta)dtdx+\int_0^1\Delta\nu^2(T,x)dx, \qquad (2.3)$$

где

$$\Delta\Pi(t,x,\omega,u,\vartheta)=\Pi(t,x,\omega,u+\Delta u,\vartheta+\Delta\vartheta)-\Pi(t,x,\omega,u,\vartheta), \qquad (2.4)$$

$$\Pi\big(t,x,\omega(t,x),u(t,x),\vartheta(t)\big)=\omega(t,x)f\big(t,x,u(t,x)\big)-\beta q^2\big(t,x,u(t,x)\big)+ \\ +\omega(t,1)p[t,\vartheta(t)]-\beta\theta^2\big(t,\vartheta(t)\big),$$

а функция $\omega(t,x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\begin{cases} \omega_t+\omega_{xx}+\mu\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau=0, \quad 0<x<1, \quad 0\le t<T, \\ \omega(\tau,x)+2[\nu(T,x)-\xi(x)]=0, \quad 0<x<1, \\ \omega_x(t,0)=0, \quad \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0, \quad 0\le t<T. \end{cases} \tag{2.5}$$

На основе этих вычислений сформулируем принцип максимума.

Теорема 1. *Для того чтобы векторное управление* $(u^0(t,x),\vartheta^0(t))$ *было оптимальным необходимо и достаточно, чтобы функция* $\Pi\big(t,x,\omega(t,x),u(t,x),\vartheta(t)\big)$*, где* $\omega(t,x)$ *— решение сопряженной краевой задачи, соответствующее векторному управлению* $(u^0(t,x),\vartheta^0(t))$*, удовлетворяла бы условию*

$$\Pi\big(\cdot,u^0(t,x),\vartheta^0(t)\big)(=)\sup_{(u,\vartheta)\in F}\Pi\big(\cdot,u,\vartheta\big).$$

Здесь символ $(=)$ *означает равенство, справедливое почти всюду в области* $[0,1]\times[0,T]$*, а верхняя грань берется по всем значениям пары* (u,ϑ)*, изменяющейся на множестве допустимых значений* F*.*

Доказательство. Поскольку в формуле (2.3)остаточный член $\int_0^1\Delta\nu^2(T,x)dx$ неотрицательный, то нестрогое доказательство, с учетом (2.4), следует из представления (2.3). ☐

Решая задачу $\Pi\big(t,x,\omega(t,x),u(t,x),\vartheta(t)\big)\to\max$, относительно оптимальных управлений $\big(u^0(t,x),\vartheta^0(t)\big)$, получим следующие соотношения

$$\Pi_u\big(\cdot,u,\vartheta\big)=\omega(t,x)f_u(\cdot,u)-2\beta q(t,x,u)q_u(t,x,u)=0, \\ \Pi_\vartheta\big(\cdot,u,\vartheta\big)=\omega(t,1)p_\vartheta(\cdot,\vartheta)-2\beta\theta(t,\vartheta)\theta_\vartheta(t,\vartheta)=0, \tag{2.6}$$

$$\Pi_{uu}\big(\cdot,u,\vartheta\big)=\omega(t,x)f_{uu}-2\beta(q_u^2+qq_{uu})\le 0, \\ \Pi_{\vartheta\vartheta}\big(\cdot,u,\vartheta\big)=\omega(t,1)p_{\vartheta\vartheta}-2\beta(\theta_\vartheta^2+\theta\theta_{\vartheta\vartheta})\le 0, \tag{2.7}$$

которые называются условиями оптимальности.

3. Решение сопряженной краевой задачи

Решение сопряженной краевой задачи (2.5) ищем в виде

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x). \tag{3.1}$$

Коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$ определяются как решение линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t)=-2e^{-\lambda_n^2(T-t)}[\nu_n(T)-\xi_n]+\mu\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds, \tag{3.2}$$

где ядро имеет вид $B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}K(s,\tau)d\tau$. Решение интегрального уравнения находим по формуле [4]

$$\omega_n(t)=(\mu\int_0^T \widetilde{R}_n(s,t,\mu)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds+e^{-\lambda_n^2(T-t)})(-2)[\nu_n(T)-\xi_n], \tag{3.3}$$

где резольвента определяется как сумма ряда

$$\widetilde{R}_n(s,t,\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{i-1}B_{n,i}(s,t),\quad \forall n=1,2,\ldots, \tag{3.4}$$

сходящаяся при $|\mu|<\sqrt{\frac{2}{K_0T}}\lambda_1$, и удовлетворяет оценке

$$\int_0^T \widetilde{R}_n^2(s,t,\mu)ds\le\frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0T})^2}. \tag{3.5}$$

Далее с учетом соотношения

$$\nu_n(T)-\xi_n=-\xi_n-\psi_n[e^{-\lambda_n^2T}+\mu\int_0^T R_n(s,T,\mu)e^{-\lambda_n^2s}ds]+$$
$$+\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\mu)[f_n(\tau,u)+z_n(1)p(\tau,\vartheta(\tau))]d\tau \tag{3.6}$$

$\omega_n(t)$ представим в виде

$$\omega_n(t)=E_n(T,t,\mu)l_n-\int_0^T E_n(T,t,\mu)\varepsilon_n(T,\tau,\mu)[f_n(\tau,u)+$$
$$+z_n(1)p(\tau,\vartheta(\tau))]d\tau \tag{3.7}$$

где

$$E_n(T,t,\mu)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\mu\int_0^T\widetilde{R}_n(s,t,\mu)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds,$$

$$\varepsilon_n(T,\tau,\mu) = e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} + \mu \int_0^T R_n(T,s,\mu) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds,$$

$$l_n = \xi_n - \psi_n [e^{-\lambda_n^2 T} + \mu \int_0^T R_n(T,s,\mu) e^{-\lambda_n^2 s} ds].$$

Непосредственной проверкой доказывается, что $\omega(t,x) \in H(Q)$.

В заключение отметим, что при подстановке решения сопряженной краевой задачи (2.5) в (2.7) получим трудно проверяемые неравенства. Для упрощения задачи, исключая $\omega(t,x)$ и $\omega(t,1)$ из (2.6) и (2.7), получаем систему интегральных уравнений

$$\beta \frac{q(t,x,u(t,x)) q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))} = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n(T,t,\mu) l_n -$$
$$- \int_0^T E_n(T,t,\mu) \varepsilon_n(T,\tau,\mu)[f_n(\tau,u) + z_n(1) p(\tau,\vartheta(\tau))] d\tau) z_n(x),$$
$$\beta \frac{\theta(t,\vartheta(t)) \theta_\vartheta(t,\vartheta(t))}{p_\vartheta(t,\vartheta(t))} = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n(T,t,\mu) l_n - \int_0^T E_n(T,t,\mu) \varepsilon_n(T,\tau,\mu) \times$$
$$\times [f_n(\tau,u) + z_n(1) p(\tau,\vartheta(\tau))] d\tau) z_n(1), \tag{3.8}$$

и неравенства

$$\begin{aligned} p_\vartheta(t,\vartheta(t)) \Big(\frac{\theta(t,\vartheta(t)) \theta_\vartheta(t,\vartheta(t))}{p_\vartheta(t,\vartheta(t))} \Big)_\vartheta \geq 0, \\ f_u(t,x,u(t,x)) \Big(\frac{q(t,x,u(t,x)) q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))} \Big)_u \geq 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Заметим, что неравенства (3.9) ограничивают класс функций внешних воздействий $f[t,x,u(t,x)]$ и $p[t,\vartheta(t)]$.

Таким образом, оптимальные управления $u^0(t,x)$ и $\vartheta^0(t)$ следует находить как решение задачи (3.8)–(3.9), которая требует дополнительного исследования.

Список литературы

1. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В. С. Владимиров // Труды МИАН. – 1961. – Т. 61. – С. 3–158.
2. В. Вольтера. Теория функциоанлов, интегралов и интегро-дифференциальных уравнений : пер. с англ. / под ред. П. И. Кузнецова. – М. : Наука, 1982. – 304 с.
3. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров. – М. : Наука, 1978. – 500 с.

4. Краснов М. В. Интегральные уравнения / М. В. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 303 с.
5. Kowalewski A. Optimal Control of an Infinite Order Hyperbolic System with Multiple Time-Varying Lags / A. Kowalewski // Automatyka. – 2011. – Vol. 15. – P. 53–65.
6. Asatur zh. Khurshudyan. On optimal boundary and distributed control of partial integro–differential equations // Archives of Control Sciences. – 2014. – Vol. 24 (LX), N 1. – P. 5—25.
7. Sachs E. W. Efficient solution of partial integro-differential equations in finance / E. W. Sachs, A. K. Strauss // Applied Numerical Math. – 2008. – Vol. 58 (11). – P. 1687–1703.
8. Thorwe J. Solving partial integro–differential equations using Laplace transform method / J. Thorwe, S. Bhalekar // American J. of Computational and Applied Math. – 2012. – Vol. 2(3). – P. 101–104.
9. Kerimbekov A. K. On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations / A. K. Kerimbekov // Proceedings World Congress on Engineering. – London, UK, 2011. – Vol. 1. – P. 270—275.
10. Kerimbekov A. On the Solvability of a Nonlinear Optimal Control Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations / A. Kerimbekov // Current Trends in Analysis and Its Applications (Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakyw 2013). A series of trends in mathematics. – Switzerland : Springer International Publishing, 2015, – Vol. XVI. – P. 803–811.

Керимбеков Акылбек, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Кыргызско-Российский Славянский университет, 720000, Бишкек, пр. Чуй, 6, тел.: (+996 312)360232, (e-mail: akl7@rambler.ru)

Наметкулова Райхан Жанузаковна, соискатель, кафедра прикладной математики и информатики, Кыргызско-Российский Славянский университет, 720000, Бишкек, пр. Чуй, 6, тел.: (+996 312)360232, (e-mail: akl7@rambler.ru)

Кадиримбетова Айша Казахбаевна, соискатель, кафедра прикладной математики и информатики, Кыргызско-Российский Славянский университет, 720000, Бишкек, пр. Чуй, 6, тел.: (+996 312)360232, (e-mail: akl7@rambler.ru)

A. Kerimbekov, R. J. Nametkulova, A. K. Kadirimbetova

Optimality Conditions in the Problem of Thermal Control with Integral-Differential Equation

Abstract. The optimal control problem for thermal process described by Fredholm integral-differential equation is considered. The definition of the weak generalized solution of the boundary problem is given. The algorithm of its construction is presented. It was found that the optimal control should be found as the solution of nonlinear integral equations with additional conditions in the form of differential inequalities with respect to the source functions.

Keywords: a boundary value problem, weak generalized solution, functional, the maximum principle, the optimal control.

References

1. Vladimirov V.S. Mathematical problems of one-speed particle transport theory.(in Russian). *Works MIAN*, 1961, vol. 61, pp.3-158.
2. Volterra V. Theory of functionals, integral and integro-differential equations (in Russian). Moscow, Russia, Nauka, 1982. 304 p.
3. Egorov A.I. Optimal control of thermal and diffusion processes(in Russian). Moscow, Russia, Nauka, 1978. 500 p.
4. Krasnov M.V. Integral equations. (in Russian). Moscow, Russia: Nauka, 1975. 303 p.
5. Kowalewski A. Optimal Control of an Infinite Order Hyperbolic System with Multiple Time-Varying Lags. *Automatyka*, 2011, vol, 15, pp. 53-65.
6. Asatur zh. Khurshudyan. On optimal boundary and distributed control of partial integro–differential equations. *Archives of Control Sciences*, 2014, vol. 24(LX), no 1, pp. 5–25.
7. Sachs E.W., Strauss A.K. Efficient solution of partial integro-differential equations in finance.*Applied Numerical Math.*, 2008, vol. 58(11), pp. 1687-1703.
8. Thorwe J., Bhalekar S. Solving partial integro–differential equations using Laplace transform method.*American J. of Computational and Applied Math.*, 2012, vol. 2(3), pp. 101-104.
9. Kerimbekov A.K. On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations. *Proceedings World Congress on Engineering 2011*, London, UK, 6–8 July 2011, vol. 1, pp. 270–275.
10. Kerimbekov A. On the Solvability of a Nonlinear Optimal Control Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations.*Current Trends in Analysis and Its Applications (Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakyw 2013, A series of trends in mathematics.)* SwitzerlZand, Springer International Publishing, 2015, vol. XVI, pp. 803-811.

Kerimbekov Akylbek, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Kyrgyz-Russian Slavic University, 6, av. Chuy, Bishkek, 720000,
tel.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)

Nametkulova Rayhan Januzakovna, Applicant, Department of Applied Mathematics and Informatics, Kyrgyz-Russian Slavic University, 6, av. Chuy, Bishkek, 720000, tel.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)

Kadirimbetova Aysha Kazahbaevna, Applicant, Department of Applied Mathematics and Informatics, Kyrgyz-Russian Slavic University, 6, av. Chuy, Bishkek, 720000, tel.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)