Серия «Математика»
2018. Т. 23. С. 46—63

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.925
MSC 34K18, 34D23
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.23.46

Области притяжения точек равновесия нелинейных систем: устойчивость, ветвление и разрушение решений*

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
Институт солнечно-земной физики СО РАН

Ю. Ли
Хунаньский университет

Аннотация. Рассмотрена динамическая модель, состоящая из дифференциального уравнения в банаховых пространствах и нелинейного операторного уравнения относительно двух элементов из разных банаховых пространств. Предполагается, что система имеет стационарные решения (точки покоя). Ставится задача Коши с начальным условием на одну из неизвестных функций. На вторую функцию, играющую роль управления соответствующего нелинейного динамического процесса, начальные условия не ставятся. Получены достаточные условия, при выполнении которых задача имеет глобальное классическое решение стабилизирующееся на бесконечности к точке покоя. При соответствующих достаточных условиях показано, что решение можно построить методом последовательных приближений. Если условия основной теоремы не выполнены, то задача может иметь несколько решений. Некоторые из них могут разрушиться за конечное время, а другие стабилизироваться к точке покоя. Приведены примеры иллюстрирующие построенную теорию.

* Работа выполнена в рамках программы развития основных научных направлений ИГУ на 2015–2019 гг., проект «Сингулярные операторно-дифференциальные системы уравнений и математические модели с параметрами», частично поддержана программой международного научно-технического сотрудничества Китая и России, грант No. 2015DFR70850, грантом ГФЕН No. 61673398 и программой фундаментальных исследований СО РАН, рег. № АААА-А17-117030310442-8, научный проект III.17.3.1.

Ключевые слова: динамические модели, точки покоя, устойчивость, стабилизация, blow-up, ветвление, задача Коши, бифуркация.

Памяти дорогого друга и коллеги
профессора Бориса Владимировича
Логинова посвящается

Введение

Рассмотрим систему

$$\mathbf{A}\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(x, u), \tag{0.1}$$

$$0 = \mathbf{G}(x, u). \tag{0.2}$$

Здесь линейный оператор $\mathbf{A} : D \subset X \to E$ имеет ограниченный обратный, нелинейные операторы $\mathbf{F} : X \dot{+} U \to E$, $\mathbf{G} : X \dot{+} U \to U$ непрерывны в окрестностях $||x - x_0||_X \leq r_1$, $||u - u_0||_U \leq r_2$ вещественных банаховых простанств X, U; E – линейное вещественное нормированное пространство. Предполагается, что справедливы разложения операторов

$$\mathbf{F}(x, u) = \mathbf{F}(x_0, u_0) + \mathbf{A}_1(x - x_0) + \mathbf{A}_2(u - u_0) + \mathbf{R}(x, u); \tag{0.3}$$

$$||\mathbf{R}(x, u)|| = o(||x - x_0|| + ||u - u_0||); \tag{0.4}$$

$$\mathbf{G}(x, u) = \mathbf{G}(x_0, u_0) + \sum_{k=1}^{n} d^k\big(\mathbf{G}(x_0, u_0); (x - x_0, u - u_0)\big) + \mathbf{r}(x, u); \tag{0.5}$$

$$||\mathbf{r}(x, u)||_U = o\big((||x - x_0|| + ||u - u_0||)^n\big). \tag{0.6}$$

В разложениях (0.3), (0.5) стоят производные и дифференциалы Фреше, вычисленные в точке (x_0, u_0)

$$\mathbf{A}_1 := \frac{\partial \mathbf{F}(x, u)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0, u=u_0} \in \mathcal{L}(X \to E);$$

$$\mathbf{A}_2 := \frac{\partial \mathbf{F}(x, u)}{\partial u}\bigg|_{x=x_0, u=u_0} \in \mathcal{L}(U \to E);$$

$$\mathbf{A}_3 := \frac{\partial \mathbf{G}(x, u)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0, u=u_0} \in \mathcal{L}(X \to U);$$

$$\mathbf{A}_4 := \frac{\partial \mathbf{G}(x, u)}{\partial u}\bigg|_{x=x_0, u=u_0} \in \mathcal{L}(U \to U);$$

$$d^k\left(\mathbf{G}(x_0, u_0); (x - x_0, u - u_0)\right) =$$

$$= \sum_{i+j=k} C_k^i \frac{\partial^k \mathbf{G}(x,u)}{\partial x^i \partial u^j}\bigg|_{x=x_0, u=u_0} (x-x_0)^i (u-u_0)^j;$$

$$\frac{\partial^k \mathbf{G}(x,u)}{\partial x^i \partial u^j} : \underbrace{X \dotplus \cdots \dotplus X}_{i \text{ раз}} \dotplus \underbrace{U \dotplus \cdots \dotplus U}_{j \text{ раз}} \to U.$$

Очевидно, что для разрешимости системы (0.1)–(0.2) необходимо, чтобы операторное нелинейное уравнение (0.2) имело вещественное решение. Поэтому в работе предполагается, что элементы x_0, u_0 из вещественных банаховых пространств X и U удовлетворяют операторным уравнениям $\mathbf{F}(x,u) = 0$, $\mathbf{G}(x,u) = 0$. Таким образом, x_0, u_0 — стационарное решение системы (0.1), (0.2) (точка равновесия или точка покоя модели).

При моделировании многих задач энергетики (см. обзоры, например, в монографиях [3; 15; 17; 18]), возникает частный случай системы (0.1)–(0.2), когда $X = E = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$ — конечномерные пространства. В работах [15; 17; 18] их называли «алгебро-дифференциальными системами» и рассматривали с начальным условием Коши

$$x(0) = \Delta, \tag{0.7}$$

где Δ — элемент из окрестности точки равновесия x_0. Строились решения $x(t)$, $u(t)$ на полуоси $[0, +\infty)$ такие, чтобы

$$\lim_{t \to +\infty} (||x(t)|| + ||u(t)||) = 0.$$

Функции $u(t)$ выбирались так, чтобы решение $x(t)$, $u(t)$ при $t \to +\infty$ стабилизировалось к точке покоя x_0, u_0. Такая задача важна для решения проблем автоматического регулирования. В классических работах российских математиков (А. И. Лурье, Е. А. Барбашин и др.) заложены основы современной теории автоматического регулирования. В ряде работ (см., например, [15; 17; 18; 20]) в этой области проведены интересные результаты численных расчетов конкретных моделей энергетики и демонстрируется сложность проблемы, связанная с возможностью бифуркации и разрушения решения (blow-up), см., например, работы [15; 18] и их библиографию. Поэтому исследование вопросов разрешимости задачи Коши (0.1), (0.2),(0.7) с точками равновесия и приближенных методов ее решения представляют теоретический и практический интерес.

Эта задача играет важную роль и в математическом моделировании нелинейных динамических систем с использованием подхода «вход» – «выход» [14; 19; 22], когда u – «вход», а «выход» $y = h(x,u)$. При этом выход в случае замкнутого контура должен удовлетворять заданному критерию в виде уравнения $\mathbf{G}(y) = 0$. (см. рис. 1)

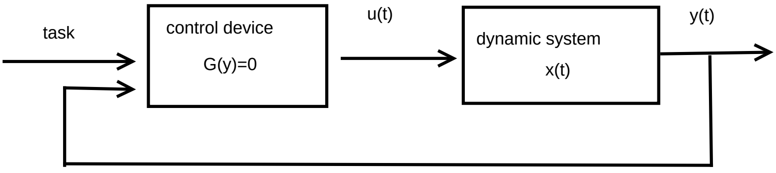

Рис. 1. Схема динамической системы с замкнутым контуром [17].

В работах [15;17;18] рассматривались только модели вида (0.1), (0.2) с обыкновенными дифференциальными уравнениями и проводились расчеты, демонстрирующие сложность проблемы связанной с анализом устойчивости и возможным разрушением решения. В настоящей работе рассмотрены нелинейные дифференциально-операторные системы в общем виде, что позволило с единой точки зрения исследовать модели «вход-выход» как с дифференциальными, так и с интегро-дифференциальными связями.

Не ограничевая общности пусть далее $(0,0)$ – точка равновесия системы (0.1), (0.2), т.е. в формулах (0.3) – (0.6) и далее $x_0 = 0$, $u_0 = 0$, $\mathbf{F}(0,0) = 0$, $\mathbf{G}(0,0) = 0$.

Определение 1. *Областью притяжения точки равновесия* $(0,0)$ *системы (0.1), (0.2) назовем шар* $||x|| \leq r$ *такой, что при любом* Δ *из этого шара существуют решения* $x : [0,+\infty) \to X$, $u : [0,+\infty) \to U$ *с начальным условием* $x(0) = \Delta$, *стабилизирующиеся к нулю на положительной полуоси.*

Если область притяжения точки равновесия не пуста $(r > 0)$, *то стационарное решение* $(0,0)$ *системы (0.1), (0.2) будем называть асимптотически устойчивым.*

Цели работы: построение достаточных условий непустоты области притяжения положения равновесия, доказательство теоремы существования и единственности решения задачи (0.1), (0.2) с начальным условием $x(0) = \Delta$; разработка метода последовательных приближений решения задачи Коши на полуоси $[0,+\infty)$. Кроме того, впервые приводятся достаточные условия разветвления решения задачи Коши для системы (0.1), (0.2) с анализом устойчивости отдельных ветвей этого решения.

Основная часть работы (п. 1-4) посвящена случаю, когда линейные операторы $\mathbf{A}, \mathbf{A}_4$ имеют ограниченные обратные. Важную роль в пп. 1-3 будет играть спектр линейного ограниченного оператора

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3), \qquad (0.8)$$

действующего из X в X.

В п. 3 в предположении, что $Re\,\lambda \leq -l < 0$ при всех $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$ доказана теорема 1 о существовании и единственности на полуоси $[0,\infty)$

и асимптотической устойчивости решения задачи Коши при достаточно малой норме $||x(0)||$. В п. 4 приведена схема последовательных приближений искомого решения. В п. 5 рассмотрены классы систем вида (0.1), (0.2) при условии, что $\mathbf{A}_4 = 0$, т.е. $\frac{\partial G(x,u)}{\partial u}|_{x=u=0} = 0$. Показано, что в этом случае может происходить ветвление решения задачи Коши, когда существует несколько решений $x(t)$, $u(t)$ с условием $x(0) = \Delta$. Некоторые из ветвей продолжаются на всю полуось $[0, +\infty)$ и стабилизируются к нулю при $t \to +\infty$, а другие могут разрушаться (уходят в бесконечность). Приводятся иллюстративные примеры.

1. Редукция нелинейной системы в окрестности точки равновесия к одному дифференциальному уравнению

Пусть $\mathbf{G}(x, u) = \mathbf{A}_3 x + \mathbf{A}_4 u + \mathbf{r}(x, u)$, где $||\mathbf{r}(x, u)|| = o(||x|| + ||u||)$.

Лемма 1. *Пусть оператор $\mathbf{A}_4$, где $\mathbf{A}_4 = \frac{\partial \mathbf{G}(x,u)}{\partial u}|_{x=u=0}$ — производная Фреше, имеет ограниченный обратный. Тогда для любого шара S_1 : $||x|| \leq r_1$ найдется шар S_2 : $||u|| \leq r_2$ такой, что при любом $x \in S_1$ уравнение (0.2) имеет единственное непрерывное решение $u(x)$ в шаре S_2. При этом имеет место асимптотическое представление решения при $||x|| \to 0$:*

$$u = -\mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 x + o(||x||), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}_3 = \left.\frac{\partial \mathbf{G}(x,u)}{\partial x}\right|_{x=u=0}$ — производная Фреше по переменной x.

Доказательство. Уравнение (0.2) в силу обратимости оператора $\mathbf{A}_4$ сводится к виду $u = \mathbf{\Phi}(u, x)$. Здесь $\mathbf{\Phi}(u, x) = -\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3 x - A_4^{-1} r(x, u)$. Поэтому для $\forall q \in (0, 1)$ найдется окрестность $||u|| \leq r_2$, в которой оператор $\mathbf{\Phi}$ будет равномерно по x из шара $||x|| \leq r_1$ сжимающим: $||\mathbf{\Phi}(u_1, x) - \mathbf{\Phi}(u_2, x)|| \leq q||u_1 - u_2||$. Кроме того, в этой окрестности имеет место неравенство $||\mathbf{\Phi}(u, x)|| \leq qr_2 + ||\mathbf{\Phi}(0, x)||$. Так как $\mathbf{\Phi}(0, 0) = 0$, то в силу непрерывности $\mathbf{\Phi}(0, x)$ найдется r в интервале $(0, r_1]$ такое, что $||\mathbf{\Phi}(0, x)|| \leq (1 - q)r_2$ при $||x|| \leq r$. Таким образом, при любых x из шара $||x|| \leq r$ и $\forall u$ из шара $||u|| \leq r_2$ оператор $\mathbf{\Phi}$ будет сжимающим и переводит шар $S(0, r_2)$ в себя. Следовательно, на основании принципа сжимающих отображений последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = \mathbf{\Phi}(u_{n-1} x)$, $x \in S(0, r)$, $u_0 = 0$, сходится равномерно по x к решению $u(x)$ единственному в шаре $||u|| \leq r_2$. Так как очевидно $u_n(x) \sim -\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3 x$ при $||x|| \to 0$, то имеем асимптотику

$$u(x) \sim -\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3 x \tag{1.2}$$

при $||x|| \to 0$. □

С помощью леммы 1 устанавливается

Лемма 2. *Существует окрестность* $||x|| \leq r$, $||u|| \leq r_2$, *в которой система (0.1), (0.2) однозначно сводится к одному дифференциальному уравнению*

$$\mathbf{A}\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.3}$$

Здесь отображение $f\,:\, S(0,r) \subset X \to E_2 := \mathbf{F}(x,u(x))$ *имеет представление*

$$f(x) = \mathbf{A}_1 x - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3 x + L(x). \tag{1.4}$$

Нелинейное отображение $L:\, X \to E$ *удовлетворяет оценке*

$$||L(x)|| = o(||x||).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно в представление (0.3) отображения $\mathbf{F}(x,u)$ подставить функцию $u(x)$, определенную в лемме 1 из уравнения (0.2). □

Замечание 1. Зная функцию $x(t)$ можно найти и соответствующее $u(t)$. Действительно, пусть $x(t)$— решение построенного в лемме 2 дифференциального уравнения (1.3). Тогда функция $u(t)$ на основании леммы 1 имеет асимптотику $u(t) \sim -\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3 x(t)$ при $||x|| \to 0$.

2. Априорная оценка решения задачи Коши

Рассмотрим систему (0.1), (0.2) с начальным условием Коши

$$x(0) = \Delta.$$

Лемма 3. *Пусть* $x\,:\,[0,+\infty) \to X$ *— решение задачи Коши для системы (0.1), (0.2), где в начальном условии* $||\Delta||$ *— достаточно мала. Пусть* $Re\lambda \leq -l < 0$ *при всех* $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$. *Тогда найдутся* $C \geq 1$ *и* $\varepsilon \in (0,l)$, *при которых* $||\exp \mathbf{M}t||_{\mathcal{L}(X\to X)} \leq Ce^{-lt}$ *и* $||x(t)||_X \leq ||\Delta||e^{(\varepsilon-l)t}$ *при всех* $t \in [0,+\infty)$.

Доказательство. Используя лемму 1 методом последовательных приближений из уравнения (0.2) найдем функцию $u(t)$ как функцию x. Подставив эту функцию в правую часть уравнения (0.1) придем к уравнению (1.3). Учитывая тождество $\mathbf{A}^{-1}f(x) = \mathbf{M}x + \mathbf{A}^{-1}L(x)$, перепишем результат в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{M}x + \mathbf{A}^{-1}L(x), \;\; x(0) = \Delta. \tag{2.1}$$

Поэтому

$$x(t) = \exp \mathbf{M}t\Delta + \int_0^t \exp \mathbf{M}(t-s)\mathbf{A}^{-1}L(x(s))\,ds =: \mathbf{\Phi}(x,t) \tag{2.2}$$

— суть интегральное уравнение Вольтерра для определения искомого решения $x(t)$ задачи Коши. Известно (см., например, [4]), что операторная экспонента ввиду условий леммы 3 на спектр $\sigma(\mathbf{M})$ удовлетворяет оценке

$$||\exp \mathbf{M}t||_{\mathcal{L}(X\to X)} \leq Ce^{-lt}, C \geq 1.$$

Поэтому очевидно выполнится неравенство

$$||x(t)|| \leq Ce^{-lt}||\Delta|| + C||\mathbf{A}^{-1}|| \int_0^t e^{-l(t-s)}||L(x(s))||\,ds.$$

Для $\forall\varepsilon > 0$ ввиду оценки $||L(x)|| = o(||x||)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $||\mathbf{A}^{-1}||||L(x)|| \leq \frac{\varepsilon}{C}||x||$ при $||x|| \leq \delta$. Поэтому до тех пор пока $||x(s)|| \leq \delta$ будет справедливо и неравенство $e^{lt}||x(t)|| \leq C||\Delta|| + C\int_0^t e^{ls}\frac{\varepsilon}{C}||x(s)||\,ds$. Отсюда в виду неравенства Гронуолла-Беллмана

$$e^{lt}||x(t)|| \leq C||\Delta||e^{\int_0^t \varepsilon ds} = C||\Delta||e^{\varepsilon t}.$$

Таким образом, $||x(t)|| \leq C||\Delta||e^{(\varepsilon-l)t}$ при $t > 0$. Выберем $\varepsilon \in (0,l)$. Тогда $||x(t)|| \leq C||\Delta||e^{-(l-\varepsilon)t} < C||\Delta||$ при $t \in (0,+\infty)$. Пусть в начальном условии $x(0) = \Delta$ выбрано достаточно малое Δ, а именно $||\Delta|| < \frac{\delta}{C}$. Т.к. $C \geq 1$, то $||x(0)|| < \delta$. Тогда $||x(t)|| < \delta$ при $\forall t \in [0,+\infty)$ и условие $||x|| \leq \delta$, использованное в процессе оценок, выполнится. Более того, $\sup\limits_{0\leq t<\infty} ||x(t)|| < \delta$ и при $\forall t^* \in [0,\infty)$ $||x(t^*)|| < \delta$. Таким образом, лемма 3 справедлива, непрерывное решение существует и единственно на интервале $[0,+\infty)$. Лемма 3 доказана. □

Априорная оценка решения обосновывает возможность продолжения локального непрерывного решения задачи Коши на весь интервал $[0,+\infty)$. В монографии [6] при обосновании возможности непрерывного продолжения решения использовалось также наличие априорной оценки решения. Априорная оценка решения, как правило, используется при доказательстве нелокальных теорем существования методом продолжения по параметру, см., например, п. 14 в [13].

3. Существование, единственность и асимптотическая устойчивость решения

Теорема 1. *Пусть* $(0,0)$ *— точка равновесия системы (0.1), (0.2). Пусть* $Re\lambda \leq -l < 0$ *при всех* $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$, $||\Delta||$ *— достаточно мала.*

Тогда система (0.1), (0.2) с условием $x(0) = \Delta$ *имеет единственное решение* $x : [0, +\infty) \to X$, $u : [0, +\infty) \to U$. *Более того,* $\lim\limits_{t\to+\infty}(||x(t)|| + ||u(t)||) = 0$.

Доказательство. В силу лемм 1, 2 и очевидной справедливости теоремы Пикара для уравнения (2.1) задача Коши (0.1), (0.2), $x(t_0) = x_0$ имеет единственное локальное решение при $\forall t_0 \in [0, \infty)$. Следовательно, множество значений аргументов t, при которых локальное решение непрерывно продолжается, открыто в любом интервале $[t_0, +\infty)$.

Так как решение рассматриваемой задачи Коши при достаточно малой $||x(0)||$ на основании леммы 3 удовлетворяет априорной оценке $x(t) < \delta$ при $\forall t \in (0, +\infty)$ и не достигает значений δ, то множество значений аргументов t, на которое может быть продолжено решение, будет и замкнутым. Поэтому на основании известных фактов о методе продолжения по параметру (см., например, [13], п. 14) решение уравнения (2.1) непрерывно продолжается на весь интервал $[0, +\infty)$. При этом ввиду лемм 1, 2 и 3 искомые функции $x(t), u(t)$ стабилизируются при $t \to +\infty$ к точке равновесия $(0, 0)$. □

Дополнительная информация об операторе $L(x)$ в уравнении (2.2) позволяет оценить снизу достаточную малость $||x||$, заложенную в условиях теоремы 1. Действительно, пусть найдена положительная непрерывно убывающая функция $q(r)$, $q(0) = 0$ такая, что

$$||L(x_1) - L(x_2)|| \le q(r)||x_1 - x_2||$$

при любых x_1, x_2 из шара $||x|| \le r$. Тогда для оператора $\mathbf{\Phi}$ в уравнении (2.2) имеем оценку

$$||\mathbf{\Phi}(x_1, t) - \mathbf{\Phi}(x_2, t)|| \le$$
$$\le C||\mathbf{A}^{-1}|| \int_0^t e^{-l(t-s)}||L(x_1(s)) - L(x_2(s))||\, ds \le$$
$$\le \frac{c}{l}||A^{-1}||q(r) \sup_{0\le s<\infty} ||x_1(s) - x_2(s)||.$$

Выберем $r^* > 0$ такое, чтобы при $\forall r \le r^*$ имело место неравенство

$$\frac{C}{l}||A^{-1}||q(r) \le q^* < 1.$$

Тогда оператор $\mathbf{\Phi}$ будет сжимающим в шаре $S(0, r^*)$. При этом при $||x|| \le r^*$ и $\forall t \in [0, +\infty)$

$$||\mathbf{\Phi}(x, t)|| \le ||\mathbf{\Phi}(x, t) - \mathbf{\Phi}(0, t)|| + ||\mathbf{\Phi}(0, t)|| \le q^* r^* +$$
$$+ || \exp \mathbf{M}t\Delta|| \le q^* r^* + C||\Delta||.$$

Выберем теперь $||\Delta|| \le \frac{(1-q^*)r^*}{C}$. При таком достаточно малом начальном значении Δ сжимающий оператор $\mathbf{\Phi}$ переводит шар $S(0, r^*)$ в себя и следовательно задача Коши (2.1) имеет единственное глобальное решение.

Пример 1.

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t,z)}{\partial t} = -x(t,z) + x^3(t,z) + u^2(t,z), \\ x(0,z) = \Delta(z), \quad t \in [0,+\infty), \; z \in [0,1], \\ u(t,z) + \int_0^1 zsu(t,s)\,ds + x^2(t,z) + u^2(t,z) = 0, \end{cases}$$

$|\Delta(z)| \le \varepsilon$, ε — достаточно мало. Здесь $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = I, \mathbf{A}_3 = 0$, $X = E = U = \mathcal{C}_{[0,1]}$. Оператор $\mathbf{A}_4 = I + \int_0^1 zs[\cdot]\,ds$ имеет ограниченный обратный

$$\mathbf{A}_4^{-1} = I - \frac{2}{3}\int_0^1 zs[\cdot]\,ds,$$

$\mathbf{M} = -I$. Если $|x(t,z)|$ — достаточно мала, то последовательность

$$\{u_n(t,z)\},$$

где

$$u_n(t,z) = -x^2(t,z) - u_{n-1}^2(t,z) + \frac{2}{3}\int_0^1 zs\{x^2(t,s) + u_{n-1}^2(t,s)\}\,ds,$$

$u_0(t,z) = 0$, сходится и позволяет найти решение $u(t,z)$ интегрального уравнения как функцию от $x(t,z)$. Подставляя это решение в дифференциальное уравнение, задачу сводим к одному дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{\partial x(t,z)}{\partial t} = -x(t,z) + \mathcal{O}(||x||^2), \; x(0,z) = \Delta(z).$$

При этом $||u|| = \mathcal{O}(||x||^2)$.

Таким образом, эта модель, состоящая из дифференциального и интегрального уравнения, удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет на полуоси $[0,\infty)$ единственное непрерывное решение $x(t,z)$, $u(t,z)$, стабилизирующееся при $t \to +\infty$ к точке покоя $(0,0)$, если $\max\limits_{0 \le z \le 1} |\Delta(z)|$ достаточно мал.

4. О построении решения нелинейной системы методом последовательных приближений

В условиях теоремы 1 искомое решение $x(t), u(t)$ системы (0.1), (0.2) с условием $x(0) = \Delta$ можно строить без предварительного сведения системы к одному дифференциальному уравнению. Действительно, введем две последовательности $\{x_n(t)\}$, $\{u_n(t)\}$ с условиями $x_n(0) = \Delta$, $n = 0, 1, \dots$, где $||\Delta||$ – достаточно мала. Пусть $u_0 = 0$, а $||\Delta||$ достаточно мала, $x_n(t)$ – решение задачи Коши $\mathbf{A}\frac{dx_n}{dt} = \mathbf{F}(x_n, u_{n-1})$, $x_n(0) = \Delta, n = 1, 2, \dots$. Решение $x_n(t)$ очевидно существует и единственно при $t \geq 0$ на основании теоремы 1.

Далее построим функции u_n по формуле $u_n = u_{n-1} + w_n$, где $u_0 = 0$. Учитывая обратимость оператора $\mathbf{A}_4$, функции w_n найдем из линейного уравнения $\mathbf{A}_4 w_n + \mathbf{G}(x_n, u_{n-1}) = 0, n = 1, 2, \dots$. Тогда в условиях теоремы 1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty}(||x(t)|| + ||u(t)||) = 0$. Условие малости $||\Delta||$ является существенным, так как в противном случае решение дифференциального нелинейного уравнения может уйти в бесконечность в точке t^* (см. ниже примеры).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{2} - u(t) + x^2(t), \\ 0 = 2u(t) - x(t) + 2u(t)\sin u(t) - x(t)\sin u(t) \end{cases}$$

с начальным условием $x(0) = \Delta$, $0 \leq t < +\infty$. Заменой $u(t) = \frac{x(t)}{2}$ эта система сведется к задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t), \\ x(0) = \Delta. \end{cases}$$

Легко проверить, что последняя имеет точное решение

$$x(t) = \frac{\Delta}{e^t(1-\Delta) + \Delta}.$$

Покажем, что точка $t^* = \ln\frac{\Delta}{\Delta-1}$ может оказаться точкой разрушения (blow-up) построенного решения. Рассмотрим 4 случая.

Случай 1. Если $\Delta \in (0, 1)$, то точка blow-up t^* — комплексное число, решение непрерывно при $t \in (0, +\infty)$ и стабилизируется к точке покоя $x = 0$ при $t \to +\infty$ (см. рис. 2).

Случай 2. Если $\Delta \in (-\infty, 0)$, то точка blow-up отрицательна, а на полуоси $[0, +\infty)$ решение непрерывно и стабилизируется к точке покоя $x = 0$ при $t \to +\infty$ (см. рис. 3).

Случай 3. Если $1 < \Delta < \infty$, то при $t^* = \ln\frac{\Delta}{\Delta-1}$, где $\frac{\Delta}{\Delta-1} > 0$, решение разрушится. При $t > t^*$ оно непрерывно и тоже стабилизируется к точке покоя $x = 0$ при $t \to +\infty$ (см. Рис. 4).

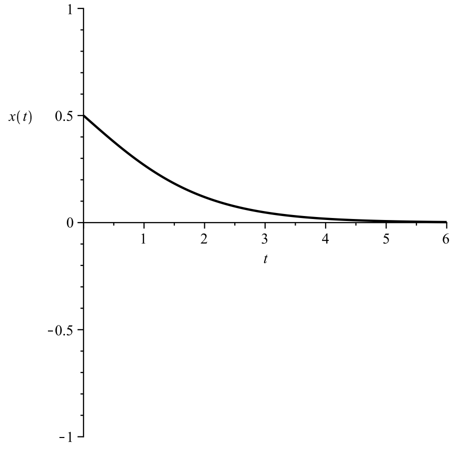

Рис. 2. $\Delta \in (0, 1)$.

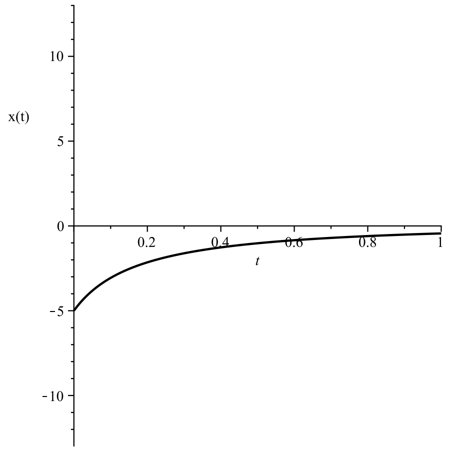

Рис. 3. $\Delta < 0$.

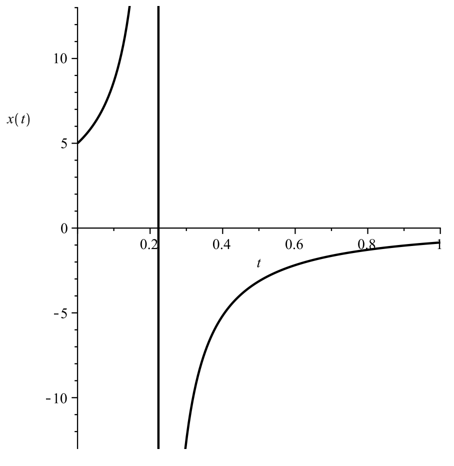

Рис. 4. $\Delta > 1$.

Случай 4. При $\Delta = 0$ и $\Delta = 1$ получим стационарные решения.

На основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод. В примере 2 при $\Delta \in (-\infty, 1)$ решение задачи Коши при $t \geq 0$ существует, единственно и стабилизируется к точке покоя при $t \to +\infty$. Отметим, что при $\Delta > 1$ решение задачи Коши разрушается за конечный промежуток времени равный $\ln \frac{\Delta}{\Delta - 1}$.

Замечание 2. Отсутствие вещественных точек покоя может порождать решения со счетным множеством точек разрушения.

5. О ветвлении решения задачи Коши

Пусть теперь в (0.1), (0.2) $E = X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A}$ — единичная матрица $n \times n$. Широкий класс таких систем, встречающихся в приложениях, имеет вид (5.1), (5.2).

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}u_k + R_i(x;u), \\ x_i(0) = \Delta_i, i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$0 = q_k(x;u),\ k = 1, \dots, m, \tag{5.2}$$

где

$$x := (x_1, \dots, x_n)^T,\ u := (u_1, \dots, u_m)^T,\ m \le n.$$

Пусть $R_i(x,u) = o(||x|| + ||u||)$,

$$q_k(x,u) = \mathbf{A}_k(x_k, u_k) + x_k^{N_k+1} r_k(x,u),\ k = 1, \cdots, m,$$

$$\mathbf{A}_k(x_k, u_k) := \sum_{s=0}^{N_k} m_{ks} x_k^{N_k - s} u_k^s + o((|x_k| + |u_k|)^{N_k}),$$

$r_k(x,u) = o(1)$ при $||x|| + ||u|| \to 0$, $N_k \ge 2$.

Будем искать малые решения $u = u(x) \to 0$ при $||x|| \to 0$ системы (5.2) в виде произведений $u_i = x_i w_i(x), i = 1, \dots, m$ с условием

$$\sum_{i=1}^{m} |w_i(0)| \ne 0.$$

Тогда функции w_i должны удовлетворять системе вида

$$x_k^{N_k} \sum_{s=0}^{N_k} m_{ks} w_k^s(x_k) + x_k^{N_k+1} r_k(x, x_1 w_1, \dots, x_m w_m) = 0,$$

$k = 1, \dots, m$. После сокращения на x_k^N придем к системе

$$\sum_{s=0}^{N_k} m_{ks} w_k^s(x_k) + x_k r_k(x, x_1 w_1, \dots, x_m w_m) = 0,\ k = 1, \dots, m.$$

Поэтому необходимо вектор $w(0) = (w_1(0), \dots, w_m(0))^T$ состоит из корней полиномов

$$\sum_{s=0}^{N_k} m_{ks} w_k^s(0) = 0,\ k = 1, \dots, m.$$

Пусть w_k^*, $k = 1, \ldots, m$ — простые корни соответствующих полиномов. На основании теоремы о неявной функции этим корням будет отвечать малое решение системы (5.2) вида

$$u_k(x) = x_k w_k^* + r_k(x),\ k = 1, \ldots, m,$$

где $|r_k(x)| = o(||x||)$. Функции $r_k(x)$ при малых x можно уточнить методом последовательных приближений. Подставляя $u_k(x)$ в дифференциальные уравнения (5.1) получим, как и при доказательстве леммы 2, дифференциальную систему относительно вектор-функции $x(t)$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=0}^{n} c_{ik} x_k + o(||x||)$$

с условиями $x_i(0) = \Delta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь

$$c_{ik} = \begin{cases} a_{ik}, i = 1, \cdots, n,\ k = m+1, \ldots, n, \\ a_{ik} + b_{ik} w_k^*, i = 1, \cdots, n,\ k = 1, \cdots, m. \end{cases}$$

Введем матрицу $M = \{c_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$. В итоге, как и при доказательстве теоремы 1, можно сделать

Вывод. Пусть $\sum_{k=1}^{n} |\Delta_k|$ — достаточно мало. Если при этом все собственные числа матрицы M имеют отрицательные вещественные части, то решение задачи (5.1), (5.2) существует, единственное и стабилизируется к точке покоя $(0, 0)$ при $t \to +\infty$. Так как полиномы $\sum_{s=0}^{N_k} m_{ks} w_k^s$, $k = 1, \ldots, m$ могут иметь несколько простых корней, при которых соответствующая матрица M имеет только собственные числа с отрицательными вещественными частями, то решение задачи (5.1), (5.2) в общем случае может иметь *несколько устойчивых решений* $x(t)$. Простым корням этих полиномов, при которых у матрицы M есть собственное число с положительной вещественной частью, будет отвечать неустойчивое решение $x(t)$.

Пример 3.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta u + u^2 + x^3, \\ x(0) = \Delta, \\ ax^2 + 2bxu + u^2 = 0, 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Здесь $(0, 0)$ — точка покоя. Полагая $u = cx$, $c - const$, получим квадратное уравнение $c^2 + 2bc + a = 0$. Следовательно, u определится двузначно по формуле

$$u_{1,2} = x(t)(-b \pm \sqrt{b^2 - a}). \tag{5.3}$$

Пусть $a < b^2$. Подставим найденные значения функции u в дифференциальное уравнение. Тогда задача определения функции $x(t)$ сведется к решению двух задач Коши

$$\begin{cases} \frac{dx_\pm}{dt} = (\alpha + \beta(-b \pm \sqrt{b^2 - a})x_\pm + (-b \pm \sqrt{b^2 - a})^2 x_\pm^2 + x_\pm^3, \\ x_\pm(0) = \Delta. \end{cases}$$

Пусть $\alpha + \beta(-b - \sqrt{b^2 - a}) < 0$. Тогда ветвь $x_-(t)$ при малом $|\Delta|$ существует при $t \geq 0$ и стабилизируется к нулю при $t \to +\infty$.

6. Возможные обобщения

В данной работе для простоты рассматривались только автономные системы. Это ограничение можно ослабить.

Например, если имеется система

$$\begin{cases} \mathbf{A}\frac{dx}{dt} = (\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_1(t))x(t) + (\mathbf{A}_2 + \tilde{\mathbf{A}}_2(t))u(t) + \mathbf{R}(x, u, t), \\ 0 = \mathbf{A}_3 x + \mathbf{A}_4 u + \mathbf{r}(x, u, t), \end{cases}$$

где $\tilde{\mathbf{A}}_1(t) \to 0$, $\tilde{\mathbf{A}}_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $||\mathbf{R}(x, u, t)|| = o(||x|| + ||u||)$ и $||\mathbf{r}(x, u, t)|| = o(||x|| + ||u||)$ при $||x|| + ||u|| \to 0$ равномерно по $t \geq 0$, то результаты теоремы 1 сохраняются.

В теории систем (0.1), (0.2) наиболее сложным оказался случай, когда производная Фреше $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{G}(x, u)$ в точке покоя не обратима и следовательно для отображения $\mathbf{G}(x, u) = 0$ не выполнена теорема о неявном операторе.

В п. 5 рассмотрен только один случай, когда это условие не выполнено и происходит ветвление решения. Другие более сложные случаи ветвления решений могут быть исследованы с помощью результатов современной аналитической теории ветвления решений нелинейных уравнений, полученных в работах В. А. Треногина, Б. В. Логинова, Н. А. Сидорова, А. Д. Брюно, J. Toland и др. Не менее интересной является проблема анализа систем (0.1), (0.2) с разрывом в окрестности точек покоя, когда не выполнено условие устойчивости по первому приближению и надо привлекать более тонкие методы, например методы, связанные с построением функции Ляпунова, оценивать расположение потенциальных точек blow-up привлекая, например, вариант метода выпуклых мажорант Л. В. Канторовича из работ [11; 19; 22].

В этом случае при разработке алгоритмов анализа устойчивости и построения оценок областей притяжения точек покоя электроэнерегетических систем типа вход-выход целесообразно использовать методы основанные на теории вектор-функции Ляпунова и теории систем с разрывными правыми частями, построенной в работах В. М. Матросова, см., например, [7; 8] и развитой в его научной школе.

Наконец, определенный интерес представляет система (0.1), (0.2) с точками покоя при необратимом операторе $\mathbf{A}$. В этом случае стандартная задача Коши может не иметь классических решений и целесообразно вводить другие начальные условия. Если необратимый оператор $\mathbf{A}$

допускает скелетное разложение конечной длины, то новые корректные начальные условия для задачи (0.1), (0.2) можно поставить, используя результаты работ [12; 21–23].

Список литературы

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. – М. : Либроком, 2014. – 230 с.
2. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
3. Комплекс интеллектуальных средств для предотвращения крупных аварий в электроэнергетических системах / Н. И. Воропай, В. Г. Курбацкий, Н. В. Томин, Д. А. Панасецкий, Д. Н. Сидоров, А. В. Жуков, Д. Н. Ефимов, А. Б. Осак, В. А. Спиряев, А. В. Домышев. – Новосибирск : Наука, 2016. – 332 с.
4. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 471 с.
6. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – М.: Наука и техника, 1972. – 668 с.
7. Матросов В. М. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. III / В. М. Матросов // Дифференц. уравнения. – 1969. – N 5 (7). – С. 1171–1185.
8. Матросов В. М. О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями. I / В. М. Матросов // Дифференц. уравнения. – 1967. – N.3(3). – С. 395–409.
9. Сидоров Н. А. Точки бифуркации нелинейных уравнений / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / под ред. В. А. Треногина, А. Ф. Филиппова // М. : Физматлит, 2013. – С. 5–50.
10. Сидоров Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей. Теория и приложения / Д. Н. Сидоров. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.
11. Сидоров Д. Н. Существование и разрушение главных по Канторовичу непрерывных решений интегральных уравнений / Д. Н. Сидоров // Дифференц. уравнения. – 2014. – N 50(9). – С. 1231–1237. https://doi.org/10.1134/S0012266114090080
12. Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах ветвления / Н. А. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 1982. – 312 с.
13. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Физматлит, 2002. – 488 с.
14. Халил Х.К. Нелинейные системы / Х. К. Халил ; пер. с англ. под ред. А. Л. Фрадкова. – 3-е изд. – М. : Ин-т компьтер. исслед., 2009. – 832 с.
15. Ayasun S. Computation of singular and singularity induced bifurcation points of differential-algebraic power system model / S. Ayasun, C. O. Nwankpa, H. G. Kwatny // IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications. – 2004. – N 51 (8). – P. 1525–1538. https://doi.org/10.1109/TCSI.2004.832741
16. Buffoni B. Analytic Theory of Global Bifurcation: An Introduction / Princeton series in applied mathematics / B. Buffoni, J. Toland. – Princeton University Press, 2003. – 169 p. https://doi.org/10.1515/9781400884339

17. Machowski J. Power system dynamics. Stability and control / J. Machowski, J. W. Bialek, J. R. Bumby. – Oxford : John Wiley, 2008. – 658 p.
18. Milano F. Power system modelling and scripting / F. Milano. – Berlin: Springer, 2010. – 578 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13669-6
19. Sidorov D. Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations / D. Sidorov, N. Sidorov // Banach J. of Mathematical Analysis. – 2012. – Vol. 6, N 1. – P. 1–10. https://doi.org/10.15352/bjma/1337014661
20. Sjöberg J. Model reduction of nonlinear differential-algebraic equations / J. Sjöberg, K. Fujimoto, T. Glad // IFAC Proceedings Volumes. – 2007. – Vol. 40, Issue 12. – P. 176–181. https://doi.org/10.3182/20070822-3-ZA-2920.00030
21. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Springer Series: Mathematics and Its Applications, Vol. 550, 2013. – 568 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6
22. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control / D. Sidorov ; ed. by L. O. Chua. —Singapore, London : World Scientific Publ., 2015. – Vol. 87 of World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. – 258 p. https://doi.org/10.1142/9789814619196_bmatter
23. Sidorov D. N. Solution of irregular systems of partial differential equations using skeleton decomposition of linear operators / D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Vestn. YuUrGU. Ser. Matem. modelirovanie i programmirovanie. – 2017. – Vol. 10, N 2. – P. 63–73. https://doi.org/10.14529/mmp170205

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Россия, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1,
(e-mail: `sidorovisu@gmail.com`);

Сидоров Денис Николаевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел.: +7 (3952) 500 646 ext. 258; Институт солнечно-земной физики СО РАН, Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 126-а,
(e-mail: `dsidorov@isem.irk.ru`);

Ли Юн, доктор наук, профессор, колледж электроэнергетики и информатики, Хунаньский университет, Чанша 410082, КНР, тел.: +86 15211076213, (e-mail: `yongli@hnu.edu.cn`).

Поступила в редакцию 10.02.18

N. A. Sidorov, D. N. Sidorov, Li Yong

Areas of Attraction of Equilibrium Points of Nonlinear Systems: Stability, Branching and Blow-up of Solutions

Abstract. The dynamical model consisting of the differential equation with a nonlinear operator acting in Banach spaces and a nonlinear operator equation with respect to two elements from different Banach spaces is considered. It is assumed that the system has stationary solutions (rest points). The Cauchy problem with the initial condition with respect to one of the unknown functions is formulated. The second function playing the role of controlling the corresponding nonlinear dynamic process, the initial conditions are not set. Sufficient conditions are obtained for which the problem has the global classical solution stabilizing at infinity to the rest point. Under suitable sufficient conditions it is shown that a solution can be constructed by the method of successive approximations. If the conditions of the main theorem are not satisfied, then several solutions can exists. Some of them can blow-up in a finite time, while others stabilize to a rest point. Examples are given to illustrate the constructed theory.

Keywords: dynamical models, rest point, stability, blow-up, branching, Cauchy problem, bifurcation.

References

1. Barbashin E.A. *Introduction to stability theory.* M., Libercom, 2014. 230 p. (in Russian)
2. Vainberg M.M., Trenogin V.A. A *Theory of branching of solutions of non-linear equations.* Leyden, 1974.
3. Voropai N.I., Kurbatsky V.G. et al. *Complex of intelligent tools for preventing major accidents in electric power systems.* Novsibirsk, Nauka, 2016. 332 p. (in Russian)
4. Daleckii Ju.L., Krein M.G. *Stability of solutions of differential equations in Banach space.* Ser. "Translations of Mathematical Monographs", vol. 43. Rhode Island, AMS Publ., 2002. 386 p.
5. Demidovich B.P. *Lectures on mathematical stability theory.* Moscow, Nauka Publ., 1967. 471 p. (in Russian)
6. Erugin N.P. *The Book for Reading on General Course of Differential Equations.* Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1972. 668 p. (in Russian)
7. Matrosov V.M. The comparison principle with a vector-valued Ljapunov function. III. *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no 7, pp. 1171-1185.
8. Matrosov V.M. Differential equations and inequalities with discontinuous right member. I. *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 3, no 3, pp. 395–409.
9. Sidorov N.A., Trenogin V.A. *Bifurcation points of nonlinear equation.* In the book "Nonlinear analysis and nonlinear differential equations". Edts V.A. Trenogin and A.F. Filippov. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, pp. 5–50. (in Russian)
10. Sidorov D.N. *Methods of analysis of integral dynamical models. Theory and applications.* Irkutsk, ISU Publ., 2013. 293 p. (in Russian)
11. Sidorov D.N. Existence and blow-up of Kantorovich principal continuous solutions of nonlinear integral equations. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 9, pp. 1217-1224. https://doi.org/10.1134/S0012266114090080
12. Sidorov N.A. *General issues of regularization in branching problems.* Irkutsk, ISU Publ., 1982. 312 p. (in Russian)
13. Trenogin V.A. *Functional analysis.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 488 p. (in Russian)
14. Khalil H.K. *Nonlinear systems.* Prentice hall, 1991.
15. Ayasun S., Nwankpa C.O., Kwatny H.G. Computation of singular and singularity induced bifurcation points of differential-algebraic power system model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 2004, vol. 51, no 8, pp. 1525–1538. https://doi.org/10.1109/TCSI.2004.832741
16. Buffoni B., Toland J. *Analytic Theory of Global Bifurcation: An Introduction.* Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, 2003. 169 p. https://doi.org/10.1515/9781400884339

17. Machowski J., Bialek J.W., Bumby J.R. *Power system dynamics. Stability and control.* Oxford, John Wiley, 2008. 658 p.
18. Milano F. *Power system modelling and scripting,* Berlin, Springer, 2010. 578 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13669-6
19. Sidorov D., Sidorov N. Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations. *Banach J. of Mathematical Analysis*, 2014, vol. 6, no 1, pp. 1-10. https://doi.org/10.15352/bjma/1337014661
20. Sjöberg J., Fujimoto K., Glad T. Model reduction of nonlinear differential-algebraic equations. *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 40, issue 12, 2007, pp. 176-181. https://doi.org/10.3182/20070822-3-ZA-2920.00030
21. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications.* Springer Series: Mathematics and Its Applications, 2013, vol. 550. 568 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6
22. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control; Ed. by L. O. Chua, Singapore, London: World Scientific Publ., 2015, vol. 87 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A.* 258 p. https://doi.org/10.1142/9789814619196_bmatter
23. Sidorov D.N., Sidorov N.A. Solution of irregular systems of partial differential equations using skeleton decomposition of linear operators. *Vestn. YuUrGU. Ser. Matem. modelirovanie i programmirovanie*, 2017, vol. 10, no 2, pp. 63-73. https://doi.org/10.14529/mmp170205

Sidorov Nikolai Aleksandrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics, Economics and Informatics, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation; (e-mail: sidorovisu@gmail.com)

Sidorov Denis Nikolaevich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Lead Research Fellow, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel. (+7) 500 646 ext. 258;
Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS, 126a, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, (e-mail: dsidorov@isem.irk.ru);

Li Yong, PhD (Power Engineering), College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, People's Republic of China, tel. +86 15 211076213, (e-mail: yongli@hnu.edu.cn).

Received 10.02.18