



Серия «Математика»
2026. Т. 57. С. 81–95

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.957

MSC 35P25, 35P30, 35Q51, 35Q53, 37K15

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.81>

Смешанная задача для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка со специальным свободным членом

Г. У. Уразбоев¹, М. М. Хасанов^{1✉}

¹ Ургенчский государственный университет им. Абу Райхана Беруни, Ургенч,
Узбекистан

✉ hmuzaffar@mail.ru

Аннотация: Рассматривается смешанная задача для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза (мКдФ) отрицательного порядка со специальным свободным членом. Показано, что смешанная задача для нелинейного уравнения мКдФ отрицательного порядка со специальным свободным членом может быть проинтегрирована методом обратной спектральной задачи. Определена эволюция спектральных данных оператора Дирака с периодическим потенциалом, связанным с решением уравнения мКдФ отрицательного порядка со специальным свободным членом. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи для решения смешанной задачи для нелинейного уравнения мКдФ отрицательного порядка со специальным свободным членом. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина – Трубовица в классе трижды непрерывно дифференцируемых периодических функций. Показано, что построенное решение с помощью системы уравнений Дубровина – Трубовица и формулы следов удовлетворяет смешанной задаче для нелинейного уравнения мКдФ отрицательного порядка со специальным свободным членом.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза отрицательного порядка, смешанная задача для нелинейного уравнения, свободный член, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина – Трубовица, формулы следов

Ссылка для цитирования: Г. У. Уразбоев, М. М. Хасанов Смешанная задача для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка со специальным свободным членом // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 57. С. 81–95.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.81>

Research article

A Mixed Problem for the Negative Order Nonlinear Modified Korteweg–de Vries Equation with a Special Term

Gayrat U. Urazboev¹, Muzaffar M. Xasanov¹✉

¹ Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan

✉ hmuzaaffar@mail.ru

Abstract: In this paper, a mixed problem for the negative order nonlinear modified Korteweg–de Vries (mKdV) equation with a special free term is considered. It is shown that the mixed problem for the negative order nonlinear mKdV equation with a special free term can be integrated using the inverse spectral problem method. The evolution of the spectral data of the Dirac operator with a periodic potential associated with the solution to the negative order mKdV equation with a special free term is determined. The obtained results allow us to apply the inverse problem method to solving the mixed problem for the negative order nonlinear mKdV equation with a special free term. The solvability of the Cauchy problem for the infinite Dubrovin–Trubowits system of differential equations in the class of triply continuously differentiable periodic functions is proved. It is shown that the solution constructed using the Dubrovin–Trubowits system of equations and the trace formula satisfies the mixed problem for the negative order nonlinear mKdV equation with a special free term.

Keywords: the negative order modified Korteweg–de Vries equation, mixed problem for a nonlinear equation, free term, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin–Trubovits system of equations, trace formulas

For citation: Urazboev G. U., Xasanov M. M. A Mixed Problem for the Negative Order Nonlinear Modified Korteweg–de Vries Equation with a Special Term. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 57, pp. 81–95. (in Russian) <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.81>

1. Введение

Модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза (мКдФ) является одним из характерных представителей класса полностью интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, обладающих существенной прикладной значимостью. Полная интегрируемость данного уравнения методом обратной задачи рассеяния в классе быстроубывающих функций была впервые установлена М. Вадати (см. [26]). Исследованию уравнения мКдФ в классе конечнозонных функций посвящен ряд работ, в частности [1; 4].

В работе [16] методом обратной задачи рассеяния выполнено интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций. Отметим, что данное уравнение в классе быст-

роубывающих функций ранее исследовано в работе [10]. Кроме того, различные постановки нелинейных уравнений КдФ с самосогласованными источниками в периодическом случае были подробно рассмотрены в исследованиях [12].

Уравнение КдФ и уравнение КдФ отрицательного порядка со специально заданным свободным членом в классе периодических функций были исследованы в работах [13; 15]. Уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций изучено в работе [24], а в работе [20] изучена отрицательно-четная иерархия мКдФ и ее солитонные решения. Смешанные положительные и отрицательные иерархии исследованы в работах [19; 22].

Иерархии уравнения мКдФ отрицательного порядка с помощью рекуррентных методов исследованы в работе [23].

В работе [21] изучены бризерные решения следующего уравнения мКдФ отрицательного порядка

$$\left(\frac{q_{xt}}{q}\right)_x + (2q^2)_t = 0$$

или

$$\rho_{xx} = q^2, q_{xt} + 2q\rho_{xt} + \alpha q = 0.$$

Нетрудно видеть, что заменой q на iq и преобразованием $\mu = \rho_x + \frac{\alpha}{2}t$ уравнение мКдФ отрицательного порядка примет следующий более простой вид:

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t \\ \mu_x = -q^2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Уравнение мКдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций изучено в работах [5; 7], тогда как нелинейное уравнение Шредингера отрицательного порядка в том же классе рассматриваются как для случаев без источника, так и с источником в работах [6; 14; 25].

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения мКдФ отрицательного порядка со специальным свободным членом в классе периодических функций.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка со специальным свободным членом:

$$\begin{cases} q_{xt}(x, t) = -2q(x, t)\mu_t(x, t) \\ \mu_x(x, t) = -q^2(x, t) + \omega(t) \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R} \quad (1.1)$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x, t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x, t) - \mu_t(x, t)]|_{x=0} = \beta(t), \quad (1.2)$$

где $q_0(x) \in C^3(\mathbf{R})$, $\omega(t), \mu_0(t) \in C^1[0, \infty)$ и $\beta(t) \in C[0, \infty)$ заданные действительные функции, $q_0(x)$ имеет период π , а $\omega(t)$ и $\beta(t)$ ограничена. Требуется найти действительные периодические по переменной x функции $q(x, t)$ и $\mu(x, t)$, причем

$$q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), \quad \mu_t(x + \pi, t) \equiv \mu_t(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

и удовлетворяющие условиям гладкости:

$$\begin{aligned} q(x, t) &\in C^2(\mathbf{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbf{R} \times [0, \infty)) \\ \mu(x, t) &\in C^1(\mathbf{R} \times [0, \infty)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Система уравнений Дирака допускает представление в следующем операторном виде:

$$L(t)y \equiv J \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.4)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x, t) \\ y_2(x, t) \end{pmatrix}.$$

Цель работы — дать процедуру построения решения $(q(x, t), \mu(x, t))$ задачи (1.1)–(1.3) в рамках метода обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (1.4).

2. Необходимые сведения о прямой и обратной спектральной задаче для оператора Дирака с периодическим коэффициентом

В этом пункте для полноты изложения приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическим коэффициентом (см. [2; 3; 9; 11; 17; 18]).

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой:

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная функция из класса $C^1(\mathbf{R})$, имеющая период π , а λ — комплексный параметр. Обозначим через $c(x, \lambda) = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^T$ и $s(x, \lambda) = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^T$ решения уравнения (2.1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda) = (0, 1)^T$.

Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ называется функцией Ляпунова, или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (2.1).

Через λ_n , $n \in \mathbf{Z}$ мы обозначим собственные значения, пронумерованные в порядке возрастания, либо периодической ($y_1(0) = y_1(\pi)$, $y_2(0) = y_2(\pi)$), либо антипериодической ($y_1(0) = -y_1(\pi)$, $y_2(0) = -y_2(\pi)$) задачи для уравнения Дирака (2.1).

Спектр оператора (2.1) состоит из следующего множества:

$$E = \{\lambda \in \mathbf{R} : -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = \mathbf{R} \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbf{Z}$ называются лакунами.

Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda) = 0$ обозначим через ξ_n , $n \in \mathbf{Z}$. Числа ξ_n , $n \in \mathbf{Z}$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$) для системы (2.1) и выполняются соотношения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbf{Z}$. Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbf{Z}$ и знаки $\sigma_n = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}$, $n \in \mathbf{Z}$ называются спектральными параметрами задачи (2.1). Спектральные параметры ξ_n , σ_n , $n \in \mathbf{Z}$ и границы спектра λ_n , $n \in \mathbf{Z}$ называются спектральными данными задачи (2.1).

Нахождение спектральных данных задачи (2.1) называется прямой задачей, а восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (2.1) вместо $q(x)$ рассмотреть $q(x + \tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ : $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in \mathbf{Z}$, а спектральные параметры зависят от параметра τ : $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbf{Z}$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина – Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi) \xi_n, n \in \mathbf{Z},$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина – Трубовица, а также формула следов

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi(\tau))$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Лемма 1. Если вектор-функция $(y_1, y_2)^T$ является решением системы (2.1), то выполняются следующие тождества:

$$2y_2y_1 = \frac{1}{2\lambda}[y_2^2 - y_1^2]' + \frac{1}{\lambda}q(y_1^2 + y_2^2), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2}[y_2^2 + y_1^2]' = q(y_1^2 - y_2^2). \quad (2.3)$$

3. Эволюция спектральных параметров

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $(q(x, t), \mu(x, t))$ является решением задачи (1.1)–(1.3). Тогда границы $\lambda_n(t)$, $n \in \mathbf{Z}$ спектра следующего оператора

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \quad (3.1)$$

удовлетворяют уравнениям

$$2\lambda_n \dot{\lambda}_n = \dot{\omega}(t), n \in \mathbf{Z}, \quad (3.2)$$

а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина – Трубовица:

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \{q_t(0, t) - \mu_t(0, t)\} + \frac{1}{2\xi_n} \dot{\omega}(t), n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.3)$$

Знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}(t), \lambda_{2n}(t)]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.4)$$

где ξ_n^0 , σ_n^0 , $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ — спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Обозначим через $\xi_n(t)$, $n \in \mathbf{Z}$ собственные значения задачи Дирихле $(y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0)$ для уравнения (1.4). Пусть $y_n(x, t) = (y_{n,1}(x, t), y_{n,2}(x, t))^T$, $n \in \mathbf{Z}$ — ортонормированные собственные вектор-функции задачи Дирихле $(y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0)$ для уравнения (1.4), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n \in \mathbf{Z}$. Не ограничивая общность, можно считать собственные вектор-функции

$y_n(x, t)$, $n \in \mathbf{Z}$ действительными. Дифференцируя по t равенство $\xi_n(t) = (L(t)y_n, y_n)$ и пользуясь симметричностью оператора $L(t)$, имеем

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n(t) &= (\dot{\Omega}(x, t)y_n + L(t)\dot{y}_n, y_n) + (L(t)y_n, \dot{y}_n) = \\ &= (\dot{\Omega}(x, t)y_n, y_n) + (\dot{y}_n, L(t)y_n) + (L(t)y_n, \dot{y}_n) = \\ &= (\dot{\Omega}(x, t)y_n, y_n) + \xi_n(t)((y_n, y_n))' = (\dot{\Omega}(x, t)y_n, y_n).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Используя явный вид скалярного произведения:

$$(y, z) = \int_0^\pi [y_1(x)\bar{z}_1(x) + y_2(x)\bar{z}_2(x)] dx, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

равенство (3.5) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n(t) = 2 \int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2} q_t dx. \quad (3.6)$$

Используя формулу (2.2) получим следующее равенство

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)' q_t dx + \frac{1}{\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) q q_t dx, \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.7)$$

Равенство (3.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n &= \frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)] q_t(0, t) - \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2) q_{xt} dx + \\ &+ \frac{1}{\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) q q_t dx.\end{aligned}$$

Из системы уравнений (1.1) имеем

$$q q_t = -\frac{\mu_{xt}}{2} + \frac{\dot{\omega}(t)}{2}, \quad q_{xt} = -2q\mu_t. \quad (3.8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n &= \frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)] q_t(0, t) + \frac{1}{\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2) q \mu_t dx - \\ &- \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) \mu_{xt} dx + \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) \dot{\omega}(t) dx.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Теперь рассмотрим второй интеграл в равенстве (3.9):

$$\begin{aligned}I_1 &= -\frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) \mu_{xt} dx = \\ &= -\frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)] \mu_t(0, t) + \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2)' \mu_t dx.\end{aligned}\quad (3.10)$$

На основании (2.3) равенство (3.10) примет вид

$$I_1 = -\frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)] \mu_t(0, t) - \frac{1}{\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2) q \mu_t dx. \quad (3.11)$$

Следовательно, в равенстве (3.9) интегрируем последний интеграл

$$I_2 = \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 + y_{n,1}^2) \dot{\omega}(t) dx = \frac{1}{2\xi_n} \dot{\omega}(t). \quad (3.12)$$

Из (3.9), (3.11) и (3.12) выводим, что

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)] \{q_t(0, t) - \mu_t(0, t)\} + \frac{1}{2\xi_n} \dot{\omega}(t), \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.13)$$

Используя (3.13) и равенство [16]

$$y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi),$$

получим уравнение (3.3).

Известно, что границы $\lambda_n(t)$, $n \in \mathbf{Z}$ спектра оператора (3.1) совпадают либо с собственными значениями периодической задачи, либо антипериодической задачи для уравнения Дирака (3.1). Обозначив через $v_n(x, t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, периодической или антипериодической задачи для уравнения Дирака (3.1), действуя вышеприведенным образом, выводим равенства (3.2). Для вывода формулы (3.2) в равенстве (3.13) введем обозначение $\xi_n(t) = \lambda_n(t)$. Используя периодические условия $y_1(0, t) = y_1(\pi, t)$, $y_2(0, t) = y_2(\pi, t)$ (или антипериодические условия $y_1(0, t) = -y_1(\pi, t)$, $y_2(0, t) = -y_2(\pi, t)$), получим $\dot{\lambda}_n(t) = \frac{1}{2\lambda_n} \dot{\omega}(t)$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Следовательно, имеем (3.2) $2\lambda_n \dot{\lambda}_n(t) = \dot{\omega}(t)$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. $\square$

Следствие 1. Если мы вместо $q(x, t)$ рассмотрим $q(x + \tau, t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ , t , а собственные значения ξ_n задачи Диракхе и знаки σ_n зависят от τ , t : $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbf{Z}$. В этом случае система (3.3) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{q_t(\tau, t) - \mu_t(\tau, t)\} + \frac{1}{2\xi_n} \dot{\omega}(t), \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.14)$$

Используя формулу следов

$$q(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \quad (3.15)$$

и равенство $\mu_x = -q^2 + \omega(t)$, получим, что

$$q_t(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\mu(\tau, t) = \mu_0(t) - \int_0^\tau q^2(s, t) ds + \omega(t)\tau, \quad (3.17)$$

$$\mu_t(\tau, t) = \mu'_0(t) - 2 \int_0^\tau q(s, t) q_t(s, t) ds + \dot{\omega}(t)\tau.$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1.1)–(1.3). Действительно, обозначим через $\lambda_n(t)$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \in \mathbf{Z}$, спектральные данные задачи

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x + \tau, t) \\ q(x + \tau, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}.$$

Найдем спектральные данные λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbf{Z}$, для уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q_0(x + \tau) \\ q_0(x + \tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}.$$

Решая уравнения (3.2) с начальными условиями $\lambda_n(t)|_{t=0} = \lambda_n(0)$, $n \in \mathbf{Z}$, находим

$$\lambda_n^2(t) = \lambda_n^2(0) + \int_0^t \dot{\omega}(s) ds, n \in \mathbf{Z}. \quad (3.18)$$

Далее, решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbf{Z} \quad (3.19)$$

для системы уравнений Дубровина – Трубовица (3.14). По формуле следов (3.15) находим решение $q(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3), а затем с помощью формулы (3.17) определяем $\mu(x, t)$.

Замечание 1. Из равенств (3.18) видно, что спектр оператора Дирака (3.1) двигается по оси, сохраняя начальную структуру, т. е. длины лакун не меняются.

Замечание 2. Покажем, что пара функций $(q(x, t), \mu(x, t))$, построенная с помощью системы уравнений Дубровина – Трубовица (3.14), (3.19) и формулы следа (3.15), а также формулы (3.17), удовлетворяет систему уравнений (1.1). При этом мы также будем использовать вторую формулу следов

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2(t) + \lambda_{2k}^2(t)}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right). \quad (3.20)$$

Дифференцируя формулу (3.20) по t , имеем

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\lambda_{2k-1}(t) \dot{\lambda}_{2k-1}(t) + \lambda_{2k}(t) \dot{\lambda}_{2k}(t) - \right. \\ \left. - 2\xi_k(\tau, t) \frac{\partial \xi_k(\tau, t)}{\partial t} \right) \quad (3.21)$$

Далее, учитывая систему уравнений Дубровина (3.14) и $2\lambda_n \dot{\lambda}_n = \dot{\omega}(t)$, из (3.21) получим

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\dot{\omega}(t) - 2\xi_k(\tau, t) \left(\frac{(-1)^n}{\xi_n} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{q_t(\tau, t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_t(\tau, t)\} + \frac{\dot{\omega}(t)}{2\xi_n} \right) \right),$$

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\dot{\omega}(t) - 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{q_t(\tau, t) - \\ - \mu_t(\tau, t)\} - \dot{\omega}(t)). \quad (3.22)$$

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = -2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{q_t(\tau, t) - \mu_t(\tau, t)\}. \quad (3.23)$$

Тогда из (3.15) выводим равенство

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = 2q(q_t(\tau, t) - \mu_t(\tau, t)),$$

$$q_{\tau t}(\tau, t) = -2q\mu_t(\tau, t).$$

Дифференцируя формулу (3.17) по τ , находим $\mu_\tau(\tau, t) = -q^2(\tau, t) + \omega(t)$.

Перепишем систему Дубровина – Трубовица в следующем виде:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot f_n(\xi) g_n(\xi) + \frac{\dot{\omega}(t)}{2\xi_n}, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.24)$$

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.25)$$

где

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_n - \xi_k)^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{\beta(t)}{2\xi_n} \exp \left\{ 2 \int_0^x q(\tau, t) d\tau \right\}.$$

Заметим, что если в формуле (23) работы [8] положить $a(t) = 0$, $C(t) = 0$, $b(t) = 2\beta(t)$, то система уравнений Дубровина – Трубовица (22) из работы [8] аналогична нашей системе (3.24). В этом случае оценки (27) из [8] примут вид $|g_n(\xi)| \leq \frac{C_4}{|n|}$, $\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leq C_5 \frac{\gamma_m}{n}$, где $\gamma_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$. Поэтому в случае $q_0(x) \in C^3(\mathbf{R})$, как и в работе [8], нетрудно доказывается разрешимость задачи (3.24)–(3.25), т. е. решение задачи Коши (3.24)–(3.25) для всех $t > 0$ существует и единственно.

Список источников

1. Итс А. Р. Точное интегрирование в римановых-функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1977. 119 с.
2. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М. : Наука, 1988. 431 с.
3. Мисюра Т. В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1978. Вып. 30. С. 90–101.
4. Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза // Математический сборник. 1995. Т. 185, № 8. С. 103–114. <https://doi.org/10.1070/SM1995V082N02ABEN003575>
5. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 12. С. 1703–1712. <https://doi.org/10.31857/S0374064124120094>
6. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. О периодических решениях уравнения Шредингера отрицательного порядка с самосогласованным источником интегрального типа // Математические труды. 2025. Т. 28, № 3. С. 146–165. <https://doi.org/10.25205/1560-750X-2025-28-3-146-165>
7. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 80–90. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-630>
8. Хасанов А. Б., Нормуродов Х. Н., Худаёров У. О. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций // Теоретическая и математическая физика. 2023. Т. 214, № 2. С. 198–210. <https://doi.org/10.4213/tmf10365>
9. Хасанов А. Б., Ибрагимов А. М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узбекский математический журнал. 2001. № 3-4. С. 48–55.
10. Хасанов А. Б., Уразбоев Г. У. Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником // Узбекский математический журнал. 2003. № 1. С. 69–75.

11. Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б. Аналог обратной теоремы Г. Борга для оператора Дирака // *Узбекский математический журнал*. 2000. № 3. С. 40–46.
12. Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б. Об уравнении Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // *Теоретическая и математическая физика*. 2010. Т. 164, № 2. С. 214–221. <https://doi.org/10.4213/tmf6535>
13. Хасанов М. М., Рахимов И. Д. Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций // *Чебышевский сборник*. 2023. Т. 24, № 2. Р. 266–275. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275>
14. Хасанов М. М., Рахимов И. Д., Азимов Д. Б. Интегрирование нагруженного нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических функций // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*. 2024. Т. 50. С. 51–65. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51>
15. Яхшимуратов А. Б. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза со специальным свободным членом в классе периодических функций // *Уфимский математический журнал*. 2011. Т. 3, № 4. С. 144–150
16. Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // *Дифференциальные уравнения*. 2014. Т. 50, № 4. С. 536–543. <https://doi.org/10.1134/S0374064114040116>
17. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // *Proc. Edinb. Math. Soc.* 2017. Vol. 60. P. 615–633. <https://doi.org/10.1017/S0013091516000389>
18. Djakov P. B., Mityagin B. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators // *Russian Math. Surveys*. 2006. Vol. 61, Is. 4. P. 663–766. <https://doi.org/10.1070/RM2006V061N04ABEH004343>
19. Gomes J. F., de Melo G. R., Zimerman A. H. A class of mixed integrable models // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009. Vol. 42, N 27. P. 1–11. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/27/275208>
20. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions / J. F. Gomes, G. Starvaggi Franca, G. R. de Melo, A. H. Zimerman // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2009. Vol. 42. P. 445204. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/44/445204>
21. Jingqun Wang, Lixin Tian, Yingnan Zhang. Breather solutions of a negative order modified Korteweg–de Vries equation and its nonlinear stability // *Physics Letters A*. 2019. Vol. 383. P. 1689–1697. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.042>
22. Kundu A., Sahadevan R., Nalinidevi L. Nonholonomic deformation of KdV and mKdV equations and their symmetries, hierarchies and integrability // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009. Vol. 42, N 11. P. 1–13. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/11/115213>
23. Qiao Z., Strampp W. Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2002. Vol. 313, N 3–4. P. 365–380.
24. Urazboev G. U., Xasanov M. M., Ganjaev O. Y. Integration of the loaded negative order Korteweg–de Vries equation in the class of periodic functions // *International Journal of Applied Mathematics*. 2024. Vol. 37, N 1. P. 37–46. <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4>
25. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Babadjanova A. K. Integration of the Negative Order Nonlinear Schrödinger Equation in the Class of Periodic Functions // *Lobachevskii J. Math.* 2024. Vol. 45. P. 5305–5312. <https://doi.org/10.1134/S1995080224606106>

26. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // Phys. Soc. Japan. 1972. Vol. 32. P. 1681–1681. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.1456>

References

1. Its A.R. *Tochnoe integrirovanie v rimanovyh-funkcijah nelinejnogo uravnenija Shredingera i modifitsirovannogo uravnenija Kortevega-de Friza* [Exact Integration of the Nonlinear Schrodinger Equation and the Modified Korteweg–de Vries Equation in Riemann θ -functions]. Cand. sci. diss. Leningrad, 1977, 119 p. (in Russian)
2. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka* [Sturm–Liouville and Dirac Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 431 p. (in Russian)
3. Misjura T.V. Characterization of the spectra of the periodic and antiperiodic boundary value problems that are generated by the Dirac operator. *Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications*, 1978, iss. 30, pp. 90–101. (in Russian)
4. Smirnov A.O. Elliptic solutions of the nonlinear Schrodinger equation and the modified Korteweg–de Vries equation. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995, vol. 82, no. 2, pp. 461–470. <https://doi.org/10.1070/SM1995V082N02ABEH003575>
5. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Ismoilov O. B. Integration of the Negative-Order Modified Korteweg–de Vries Equation with a Loaded Term in the Class of Periodic Functions. *Differential Equations*, 2024, vol. 60, no. 12, pp. 1757–1766. <https://doi.org/10.1134/S1234567823601468>.
6. Urazboev G.U., Khasanov M.M. On Periodic Solutions of the Negative Order Schrödinger Equation with a Self-Consistent Integral Source. *Sib. Adv. Math.*, 2025, vol. 35, pp. 266–275. <https://doi.org/10.1134/S1055134425030095>.
7. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Ismoilov O.B. Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source. *Izv. IMI UdGU*, 2024, vol. 63, pp. 80–90. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-63-06>.
8. Khasanov A. B., Normurodov Kh.N., Hudayerov U.O. Integrating the modified Korteweg–de Vries-sine-Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions. *Theoret. and Math. Phys.*, 2023, vol. 214, no. 2, pp. 170–182. <https://doi.org/10.1134/S0040577923020022>
9. Khasanov A.B., Ibragimov A.M. On the inverse problem for the Dirac operator with periodic potential. *Uzbek Mat. J.*, 2001, pp. 48–55
10. Khasanov A.B., Urazboev G.U. A method for solving the mKdV equation with a self-consistent source. *Uzbek Mathematical Journal*, 2003, no. 1, pp. 69–75.
11. Khasanov A.B., Yakhshimuratov A. An analogue of G. Borg’s inverse theorem for the Dirac operator. *Uzbek Math. J.*, 2000, vol. 3, pp. 40–46.
12. Khasanov A.B., Yakhshimuratov A.B. The Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Theoret. and Math. Phys.*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 1008–1015. <https://doi.org/10.1007/s11232-010-0081-8>
13. Khasanov M.M., Rakhimov I.D. Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions. *Chebyshevskii Sbornik*, 2023, vol. 24, no. 2, pp. 266–275. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275>
14. Khasanov M.M. , Rakhimov I.D., Azimov D.B. Integration of the loaded negative order nonlinear Schrodinger equation in the class of periodic functions. *Известия*

- Иркутского государственного университета. Серия Математика*, 2024, vol. 50, pp. 51–65. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51>
15. Yakhshimuratov A.B. Integrating the Korteweg-de Vries equation with a special free term in the class of periodic functions. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 144–150.
 16. Yakhshimuratov A.B., Khasanov M.M. Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 485–491. <https://doi.org/10.1134/S0374064114040116>
 17. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 2017, vol. 60, pp. 615–633. <https://doi.org/10.1017/S0013091516000389>
 18. Djakov P.B., Mityagin B.S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators. *Russian Math. Surveys*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–766. <https://doi.org/10.1070/RM2006V061N04ABEH004343>
 19. Gomes J.F., de Melo G.R., Zimerman A.H. A class of mixed integrable models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, no. 27, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/27/275208>
 20. Gomes J.F., Starvaggi Franca G., de Melo G.R., Zimerman A.H. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, vol. 42, no. 44, pp. 445204. doi:10.1088/1751-8113/42/44/445204
 21. Jingqun Wang, Lixin Tian, Yingnan Zhang. Breather solutions of a negative order modified Korteweg-de Vries equation and its nonlinear stability. *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, pp. 1689–1697. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.042>
 22. Kundu A., Sahadevan R., Nalinidevi L. Nonholonomic deformation of KdV and mKdV equations and their symmetries, hierarchies and integrability. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, no. 11, pp. 1–13. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/11/115213>
 23. Qiao Z., Strampp W. Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2002, vol. 313, no. 3–4, pp. 365–380.
 24. Urazboev G.U., Xasanov M.M., Ganjaev O.Y. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions. *International Journal of Applied Mathematics*, 2024, vol. 37, no. 1, pp. 37–46. <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4>
 25. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Babadjanova A.K. Integration of the Negative Order Nonlinear Schrödinger Equation in the Class of Periodic Functions. *Lobachevskii J Math*, 2024, vol. 45, pp. 5305–5312. <https://doi.org/10.1134/S1995080224606106>
 26. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. *Phys. Soc. Japan*, 1972, vol. 32, pp. 1681–1681. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.1456>

Об авторах

Уразбоев Гайрат Уразалиевич,
д-р физ.-мат. наук, доц., Ургенчский
государственный университет им.
Абу Райхана Беруни, Ургенч, 220100,
Узбекистан, email: gayrat71@mail.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-7420-2516>

About the authors

Gayrat U. Urazboev, Dr. Sci.
(Phys.-Math.), Urgench State
University named after Abu Rayhan
Biruni, Urgench, 220100, Uzbekistan,
gayrat71@mail.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-7420-2516>

Хасанов Музаффар

Машрипович, канд. физ.-мат.
наук, доц., Ургенчский
государственный университет им.
Абу Райхана Беруни, Ургенч, 220100,
Узбекистан, hmuzaffar@mail.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-2347-1484>

Muzaffar M. Khasanov, Cand. Sci.
(Phys.-Math.), Assoc. Prof., Urgench
State University named after Abu
Rayhan Biruni, Urgench, 220100,
Uzbekistan, hmuzaffar@mail.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-2347-1484>

Поступила в редакцию / Received 22.12.2025

Поступила после рецензирования / Revised 16.02.2026

Принята к публикации / Accepted 20.02.2026