



Серия «Математика»
2026. Т. 57. С. 66–80

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.9

MSC 35A01, 76D03

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.66>

Теорема существования и единственности слабого решения начально-краевой задачи для математической модели движения смеси жидкостей Кельвина – Фойгта

Д. А. Закора¹, Д. А. Прокудин²✉

¹ Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь,
Российская Федерация

² Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск,
Российская Федерация,
✉ prokudin@hydro.nsc.ru

Аннотация: Рассматриваются уравнения, описывающие трехмерные нестационарные движения смеси вязких несжимаемых жидкостей Кельвина – Фойгта. Доказывается теорема существования и единственности слабого решения начально-краевой задачи, соответствующей течениям смеси в ограниченной области. Для доказательства существования решения рассматривается аппроксимационная задача, устанавливаются ее разрешимость и априорные оценки, не зависящие от параметра аппроксимации. После чего осуществляется предельный переход по параметру аппроксимации и показывается, что решения аппроксимационной задачи слабо сходятся к решению исходной задачи. Единственность решения устанавливается при помощи неравенства Гронуолла.

Ключевые слова: теорема существования и единственности, начально-краевая задача, несжимаемая жидкость, многокомпонентная среда, модель Кельвина – Фойгта

Благодарности: Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1313.

Ссылка для цитирования: Закора Д. А., Прокудин Д. А. Теорема существования и единственности слабого решения начально-краевой задачи для математической модели движения смеси жидкостей Кельвина – Фойгта // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 57. С. 66–80.
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.66>

Research article

Existence and Uniqueness Theorem for a Weak Solution to the Initial-Boundary Value Problem for the Kelvin–Voigt Mathematical Model of the Motion of a Mixture of Fluids

Dmitry A. Zakora¹, Dmitry A. Prokudin^{2✉}

¹ Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation

² Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

✉ prokudin@hydro.nsc.ru

Abstract: Equations describing three-dimensional unsteady motions of Kelvin–Voigt mixture of viscous incompressible liquids are considered. The theorem of existence and uniqueness of a weak solution of an initial boundary value problem corresponding to flows in a limited domain is proved. To prove the existence of a solution, an approximation problem is considered, its solvability and a priori estimates independent of the approximation parameter are established. After that, a transition is made to the limit on the approximation parameter and it is shown that the solutions of the approximation problem weakly converge to the solution of the original problem. The uniqueness of the solution is established using the Gronwall inequality.

Keywords: existence and uniqueness theorem, initial boundary value problem, incompressible fluid, multicomponent medium, Kelvin–Voigt model

Acknowledgements: The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Agreement No. 075-02-2026-1313.

For citation: Zakora D. A., Prokudin D. A. Existence and Uniqueness Theorem for a Weak Solution to the Initial-Boundary Value Problem for the Kelvin–Voigt Mathematical Model of the Motion of a Mixture of Fluids. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 57, pp. 66–80. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.66>

1. Введение

Течение несжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ на промежутке времени $[0, T]$, $T = \text{const} > 0$, описывается следующей системой уравнений [2; 11]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \nabla p = \text{div } \mathbb{S} + \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости и v_1, v_2, v_3 — компоненты $\mathbf{v}$, p — давление в жидкости, $\mathbb{S}$ — вязкая часть тензора напряжений $\mathbb{P} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$, $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{f}$ — плотность внешних сил, действующих на жидкость.

Система (1.1)–(1.2) описывает течение всех видов жидкостей, однако в ней присутствует вязкая часть тензора напряжений $\mathbb{S}$, которая пока явно не выражена через неизвестные этой системы. Чтобы выразить вязкую часть тензора напряжений через неизвестные системы (1.1)–(1.2), как правило, используют реологические соотношения, связывающие $\mathbb{S}$ и тензор скоростей деформаций $\mathbb{D}(\mathbf{v})$, $\mathbb{D}_{ks}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_k} \right)$, $k, s = 1, 2, 3$, и его производные по времени, определяя тем самым тип жидкости. Например, реологическое соотношение $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v})$, где $\mu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости, отвечает ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости, течение которой описывается уравнениями Навье – Стокса [2]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.4)$$

Жидкостью Кельвина – Фойгта называется линейная вязкоупругая жидкость, реологическое соотношение которой имеет вид $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v}) + 2\kappa \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{v})}{\partial t}$, где $\kappa > 0$ — коэффициент ретардации, характеризующий упругие свойства жидкости Кельвина – Фойгта [1]. Подставляя данное реологическое соотношение для $\mathbb{S}$ в уравнения (1.1), (1.2), получим уравнения движения жидкости Кельвина – Фойгта:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \kappa \frac{\partial (\Delta \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{f}, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.6)$$

Проблема разрешимости уравнений (1.1), (1.2) — источник и своего рода пробный камень для многих новых методов математической физики, дифференциальных уравнений и функционального анализа. Для приложений особенно важно уметь решать теоретически и численно уравнения, описывающие движения жидкостей. Поиски, изучение решений или их численный расчет начинается с теорем о существовании, единственности и качественных свойствах. Особую ценность представляют теоремы о нелокальной разрешимости, т. е. характеризующие решение задачи без ограничений на входные данные и на размеры пространственно-временных областей. В течение последних полутора столетий преимущественно изучалась система уравнений Навье – Стокса (1.3)–(1.4) (см. работы [6; 10; 16] и библиографию в них). Исследованию системы уравнений Кельвина – Фойгта (1.5)–(1.6) посвящены работы [4; 5; 8; 9; 12; 13; 18; 19] и др. (см. также библиографию в данных работах).

Интерес представляет обобщение системы уравнений (1.1)–(1.2) на многокомпонентный случай [7; 20]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \mathbf{J}_i + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Здесь N — число компонент ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$), $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$ — вектор скорости, p_i — давление, $\mathbb{S}_i$ — вязкая часть тензора напряжений $\mathbb{P}_i = -p_i \mathbb{I} + \mathbb{S}_i$, $\mathbf{J}_i$ — интенсивность обмена импульсом между компонентами, $\mathbf{f}_i$ — плотность внешних сил.

$$\text{Реологические соотношения } \mathbb{S}_i = 2 \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \mathbb{D}(\mathbf{v}_j), \quad \mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i),$$

где μ_{ij} — коэффициенты вязкостей, образующие симметричную положительно определенную матрицу вязкостей $\mathbf{M}$, коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$, отвечают смеси ньютоновских вязких несжимаемых жидкостей, течение которой описывается обобщенными уравнениями Навье – Стокса [7; 20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} + \nabla p_i &= \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \Delta \mathbf{v}_j + \\ &+ \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.10)$$

Смесью жидкостей Кельвина – Фойгта будем называть смесь жидкостей, реологические соотношения которых имеют вид

$$\mathbb{S}_i = 2 \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \mathbb{D}(\mathbf{v}_j) + 2 \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{v}_j)}{\partial t}, \quad \mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i),$$

где коэффициенты κ_{ij} образуют симметричную положительно определенную матрицу $\mathbf{K}$. Подставляя данные реологические соотношения для $\mathbb{S}_i$ и $\mathbf{J}_i$ в уравнения (1.7), (1.8), получим уравнения движения смеси несжимаемых жидкостей Кельвина – Фойгта

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} + \nabla p_i &= \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \Delta \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \frac{\partial (\Delta \mathbf{v}_j)}{\partial t} + \\ &+ \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.12)$$

Особенностью уравнений (1.11) является наличие в них производных второго и третьего порядков от скоростей всех компонент ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений. В отличие от однокомпонентного случая, где коэффициенты μ и κ — скаляры, в многокомпонентном случае коэффициенты μ_{ij} и κ_{ij} образуют соответственно матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$. Элементы матрицы $\mathbf{M}$ характеризуют вязкое трение. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{M}$ отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, а недиагональные — за вязкое трение между компонентами. В случае, когда $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$ — диагональные матрицы, уравнения (1.11) будут связаны только через младшие члены и, следовательно, вся система (1.11)–(1.12) подчиняется известной теории уравнений Кельвина – Фойгта динамики однокомпонентной вязкоупругой жидкости. В настоящей статье мы рассматриваем гораздо более сложный случай недиагональных и нетреугольных матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$, не налагая на них никаких упрощающих предположений, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определённости, обеспечивающих выполнение принципа Онзагера и неотрицательность производства энтропии для полной теплопроводной модели. Изучению гидродинамических уравнений с недиагональной матрицей вязкостей посвящены работы [3; 14; 15; 17; 21; 22] и др. (см. также библиографию в данных работах).

Работа организована следующим образом. Второй раздел посвящен постановке начально-краевой задачи, введению определения слабого решения и формулировке основного результата работы. В третьем разделе проводится доказательство основного результата. В заключении подводятся итоги проведенного исследования.

На протяжении всей работы будем использовать стандартные обозначения функциональных пространств. Через $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, обозначим пространство измеримых по мере Лебега вещественных функций на Ω , абсолютно интегрируемых с степенью p . Через $W_p^m(\Omega)$, $m \geq 1$, $p \geq 1$, обозначим пространства Соболева. $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций с компактными носителями в Ω . Обозначим $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$. Через H обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$, через V — замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ и V^2 — замыкание по норме $W_2^2(\Omega)$.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 и на промежутке времени $[0, T]$, $T = \operatorname{const} > 0$, исследуется следующая начально-краевая задача для уравнений движения смеси N несжимаемых жидкостей Кельвина – Фойгта ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_k} + \nabla p_i &= \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \Delta \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \frac{\partial (\Delta \mathbf{v}_j)}{\partial t} + \\ &+ \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}_i|_{t=0} = \mathbf{v}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}_i|_{(0,T) \times \partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$ — вектор скорости i -й компоненты, p_i — давление, $\mathbf{f}_i$ — плотность внешних сил, $\mathbf{v}_{0i}$ — начальная скорость, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ и $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ — некоторые постоянные.

Относительно данных задачи (2.1)–(2.4) будем предполагать, что

$$\mathbf{M} = (\mu_{ij})_{i,j=1}^N > 0, \quad \mathbf{K} = (\kappa_{ij})_{i,j=1}^N > 0, \quad (2.5)$$

где соотношения $\mathbf{M} = (\mu_{ij})_{i,j=1}^N > 0$, $\mathbf{K} = (\kappa_{ij})_{i,j=1}^N > 0$ означают, что матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$ положительно определены, т. е. существуют положительные постоянные μ_0 и κ_0 такие, что неравенства $\mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \mu_0 |\boldsymbol{\xi}|^2$, $\mathbf{K}\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq \kappa_0 |\boldsymbol{\zeta}|^2$ выполняются для всех $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^N$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\mathbf{v}_{0i} \in V^2, \quad \mathbf{f}_i \in L_2(0, T; L_2(\Omega)). \quad (2.6)$$

Определение 1. Слабым решением задачи (2.1)–(2.4) называется набор функций

$$\mathbf{v}_i \in L_\infty(0, T; V^2), \quad i = 1, \dots, N,$$

такой, что

$$1) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \in L_2(0, T; V), \quad i = 1, \dots, N,$$

2) выполнены интегральные равенства

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \operatorname{div} (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{j=1}^N \mu_{ij} (\nabla \otimes \mathbf{v}_j) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \left(\nabla \otimes \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} \right) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) - \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i - \right. \\ \left. - \mathbf{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \right) d\mathbf{x} dt = 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.7)$$

для почти всех $\tau \in (0, T)$ и всех тестовых вектор-функций φ_i , таких, что $\varphi_i \in L_\infty(0, T; V^2)$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \in L_2(0, T; V)$, $i = 1, \dots, N$,
 3) начальные условия (2.3) выполнены в смысле

$$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{0i}\|_H \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что данные задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяют требованиям, изложенным в разд. 2. Тогда задача (2.1)–(2.4) имеет единственное решение в смысле определения 1.*

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 состоит из нескольких этапов. В разд. 3.1 вводятся конечномерные галеркинские приближения $(\mathbf{v}_1^m, \dots, \mathbf{v}_N^m)$, $m \in \mathbb{N}$ для искомого слабого решения $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$. Индекс m означает размерность подпространства, которому принадлежит приближение $(\mathbf{v}_1^m, \dots, \mathbf{v}_N^m)$. В разд. 3.2–3.4 выводятся равномерные оценки галеркинских приближений. В разд. 3.5 эти оценки используются для обоснования предельного перехода при $m \rightarrow +\infty$, обеспечивающего существование слабого решения задачи (2.1)–(2.4). Раздел 3.6 посвящен обоснованию единственности слабого решения.

3.1. Приближения ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, которая состоит из собственных функций класса V^2 спектральной задачи

$$\int_{\Omega} (\nabla \otimes \psi_k) : (\nabla \otimes \Phi) \, d\mathbf{x} = \lambda_k \int_{\Omega} \psi_k \cdot \Phi \, d\mathbf{x} \quad \forall \Phi \in V^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где λ_k — положительные собственные значения, соответствующие собственным функциям ψ_k , и является ортонормированным базисом в H .

Построим слабое решение $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ задачи (2.1)–(2.4) как предел последовательности конечномерных приближений Галеркина

$$\mathbf{v}_i = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_i^m, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{v}_i^m = \sum_{k=1}^m \mathbf{v}_{ik}^m \psi_k, \quad i = 1, \dots, N, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

а коэффициенты $v_{ik}^m(t)$, $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, N$, определяются как решения системы mN обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{dv_{ik}^m}{dt} + \lambda_k \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \frac{dv_{jk}^m}{dt} + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_i^m \otimes \mathbf{v}_i^m) \cdot \boldsymbol{\psi}_k d\mathbf{x} + \\ & + \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \int_{\Omega} (\nabla \otimes \mathbf{v}_j^m) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\psi}_k) d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_j^m - \mathbf{v}_i^m) \cdot \boldsymbol{\psi}_k d\mathbf{x} - \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{f}_i \cdot \boldsymbol{\psi}_k d\mathbf{x} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.4)$$

с начальными условиями

$$v_{ik}^m(0) = v_{0ik}, \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

где постоянные v_{0ik} — это коэффициенты Фурье функции $\mathbf{v}_{0i}$ в базисе $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$v_{0ik} = \int_{\Omega} \mathbf{v}_{0i} \cdot \boldsymbol{\psi}_k d\mathbf{x}, \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Имеем

$$\mathbf{v}_{0i}^m = \sum_{k=1}^m v_{0ik} \boldsymbol{\psi}_k \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_{0i} \quad \text{сильно в } V^2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Поскольку $\lambda_k > 0$ и $(\kappa_{ij})_{i,j=1}^N > 0$, то уравнения (3.4) разрешимы относительно производных и задача (3.4)–(3.5) имеет решение v_{ik}^m , $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, N$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ на некотором интервале $(0, T^m)$. Соответственно, приближённое решение $(\mathbf{v}_1^m, \dots, \mathbf{v}_N^m)$ существует в цилиндре $(0, T^m) \times \Omega$.

3.2. ПЕРВАЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА

Лемма 1. *Предположим, что данные задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяют требованиям, изложенным в разд. 2. Тогда имеет место первая энергетическая оценка*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|\mathbf{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)} + \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^N \|\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m\|_{L_2(Q_T)} \leq C_1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $Q_T = (0, T) \times \Omega$, а положительная постоянная C_1 зависит от $N, T, \Omega, \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\|\mathbf{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N, \{\|\nabla \otimes \mathbf{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L_2(Q_T)}\}_{i=1}^N$ и не зависит от m .

Доказательство. Умножим (3.4) на v_{ik}^m и просуммируем по k, i , получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\mathbf{v}_i^m|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \kappa_{ij} \int_{\Omega} (\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m) : (\nabla \otimes \mathbf{v}_j^m) d\mathbf{x} \right) + \\ & + \sum_{i,j=1}^N \mu_{ij} \int_{\Omega} (\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m) : (\nabla \otimes \mathbf{v}_j^m) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_i^m - \mathbf{v}_j^m|^2 d\mathbf{x} = \\ & = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i^m d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

интегрируя которое по t , приходим к (3.8). $\square$

3.3. ВТОРАЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА

Лемма 2. *Предположим, что данные задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяют требованиям, изложенным в разд. 2. Тогда справедлива вторая энергетическая оценка*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)} + \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|\Delta \mathbf{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^N \|\Delta \mathbf{v}_i^m\|_{L_2(Q_T)} \leq C_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $C_2 = \operatorname{const} > 0$ зависит от $C_1, N, T, \Omega, \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\|\mathbf{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N, \{\|\nabla \otimes \mathbf{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N, \{\|\Delta \mathbf{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L_2(Q_T)}\}_{i=1}^N$ и не зависит от m .

Доказательство. Умножим (3.4) на $\lambda_k v_{ik}^m$ и просуммируем по k, i , получим соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \kappa_{ij} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v}_i^m \cdot \Delta \mathbf{v}_j^m d\mathbf{x} \right) + \\ & + \sum_{i,j=1}^N \mu_{ij} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v}_i^m \cdot \Delta \mathbf{v}_j^m d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_{\Omega} |\nabla \otimes (\mathbf{v}_i^m - \mathbf{v}_j^m)|^2 d\mathbf{x} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{v}_i^m \otimes \mathbf{v}_i^m) \cdot \Delta \mathbf{v}_i^m d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{f}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_i^m d\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Интегрируя (3.11) по t , используя неравенства Гёльдера, Гронуолла, Коши и Юнга, а также первое энергетическое неравенство (3.8) и неравенства

$$\|\mathbf{v}_i^m\|_{L_4(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.12)$$

$$\|\nabla \otimes \mathbf{v}_i^m\|_{L_4(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\Delta \mathbf{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.13)$$

приходим к оценке (3.10). $\square$

Следствие 1. Из (3.10) следует оценка

$$\sum_{i=1}^N \|\mathbf{v}_i^m\|_{L_{\infty}(0,T;W_2^2(\Omega))} \leq C_3, \quad (3.14)$$

где положительная постоянная C_3 зависит только от C_2 и Ω .

3.4. РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ $\frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t}$ И $\nabla \otimes \frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t}$

Лемма 3. Предположим, что данные задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяют требованиям, изложенным в разд. 2. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^N \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} + \left\| \nabla \otimes \frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} \right) \leq C_4, \quad (3.15)$$

где $C_4 = \text{const} > 0$ зависит от $C_1, C_2, N, T, \Omega, \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L_2(Q_T)}\}_{i=1}^N$ и не зависит от m .

Доказательство. Умножая (3.4) на $\frac{d\mathbf{v}_{ik}^m}{dt}$ и суммируя по k, i , получим равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i,j=1}^N \kappa_{ij} \int_{\Omega} \left(\nabla \otimes \frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right) : \left(\nabla \otimes \frac{\partial \mathbf{v}_j^m}{\partial t} \right) d\mathbf{x} = \\ & = \sum_{i,j=1}^N \mu_{ij} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v}_j^m \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right) d\mathbf{x} + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_j^m - \mathbf{v}_i^m) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right) d\mathbf{x} - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{v}_i^m \otimes \mathbf{v}_i^m) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{f}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \right) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

откуда после интегрирования по t , с учетом (3.8), (3.10), приходим к оценке (3.15). $\square$

3.5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПРИ $m \rightarrow \infty$

Построив решения $(\mathbf{v}_1^m, \dots, \mathbf{v}_N^m)$ задачи (3.4)–(3.5) при всех $m \in \mathbb{N}$, а затем при необходимости продолжив их на интервал $(0, T)$, мы можем использовать для них оценки (3.14), (3.15). На основании этих оценок из последовательности $(\mathbf{v}_1^m, \dots, \mathbf{v}_N^m)$, $m \in \mathbb{N}$, может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же), для которой имеют место сходимости

$$\mathbf{v}_i^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_i \quad \star\text{-слабо в } L_\infty(0, T; V^2), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^m}{\partial t} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

Заметим, что V^2 компактно вложено в V . В связи с этим, в силу (3.14), (3.15) и теоремы о компактности Обена-Лионса, выбирая при необходимости ещё одну подпоследовательность, устанавливаем, что

$$\mathbf{v}_i^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_i \quad \text{сильно в } C([0, T]; V), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.19)$$

Теперь, исходя из (3.17)–(3.19), предельный переход в (3.4)–(3.5) при $m \rightarrow +\infty$ по выбранной подпоследовательности вполне стандартен. В результате предельного перехода выводим интегральные равенства (2.7) и соотношения (2.8), тем самым завершая обоснование существования слабого решения задачи (2.1)–(2.4).

3.6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ

Пусть $(\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(1)})$ и $(\mathbf{v}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(2)})$ — два слабых решения задачи (2.1)–(2.4), соответствующие одним и тем же входным данным. Положим $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$. Вычитая (2.7) _{i} с $(\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(1)})$ из (2.7) _{i} с $(\mathbf{v}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(2)})$ для каждого $i = 1, \dots, N$, принимая $\mathbf{u}_i$ за тестовые функции и суммируя по i , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \kappa_{ij} \int_{\Omega} (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) : (\nabla \otimes \mathbf{u}_j) d\mathbf{x} + \\ & + \sum_{i,j=1}^N \mu_{ij} \int_0^\tau \int_{\Omega} (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) : (\nabla \otimes \mathbf{u}_j) d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^\tau \int_{\Omega} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|^2 d\mathbf{x} dt = \\ & = - \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \int_{\Omega} (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i d\mathbf{x} dt - \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \int_{\Omega} (\mathbf{v}_i^{(2)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i d\mathbf{x} dt. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Оценим слагаемые в правой части (3.20) с помощью второй энергетической оценки (3.10):

$$-\sum_{i=1}^N \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}_i \, d\mathbf{x} dt \leq C_5(\Omega, C_2) \sum_{i=1}^N \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} dt, \quad (3.21)$$

$$-\sum_{i=1}^N \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_i^{(2)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i \, d\mathbf{x} dt \leq C_6(\Omega, C_2) \sum_{i=1}^N \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} dt. \quad (3.22)$$

Здесь C_5, C_6 — положительные постоянные.

Таким образом, из (3.20), с учетом (3.21)–(3.22), следует неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} \leq \\ & \leq C_7 \int_0^{\tau} \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} \right) dt, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где положительная постоянная $C_7 = C_7(\{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^N, C_5, C_6)$. Используя лемму Гронуолла, из неравенства (3.23) выводим равенство

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.24)$$

которое равносильно единственности решения. Теорема 1 доказана.

4. Заключение

Для системы дифференциальных уравнений динамики смеси вязких несжимаемых жидкостей Кельвина – Фойгта проведен анализ разрешимости в общем случае трех пространственных переменных. Доказаны существование и единственность слабого решения начально-краевой задачи, соответствующей течениям смеси в ограниченной области с условиями прилипания на границе области течения.

Список источников

1. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М. : Мир, 1971. 350 с.
2. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А. Механика сплошных сред. Ч. 1. Основы и классические модели жидкостей. М. : Наука : Физматлит, 2000. 256 с.

3. Загора Д. А. Задача о малых движениях смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20, № 2. С. 1552–1589. <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.096>
4. Звягин А. В. Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина–Фойгта // Известия вузов. Математика. 2018. Т. 3. С. 91–95.
5. Звягин В. Г., Турбин М. В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3–144.
6. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : ГИФМЛ, 1961. 204 с.
7. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М. : Наука, 1987. 359 с.
8. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Труды МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
9. Осколков А. П. Нелокальные проблемы для уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта и их ε -аппроксимаций в классах гладких функций // Записки научного семинара ПОМИ. 1995. Т. 230. С. 214–242.
10. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. М. : Мир, 1981. 408 с.
11. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М. : Физматгиз, 1962. 432 с.
12. Antontsev S. N., Oliveira H. B., Khompysh Kh. Kelvin-Voigt equations for incompressible and nonhomogeneous fluids with anisotropic viscosity, relaxation and damping // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2022. Vol. 29. Art. N 60. <https://doi.org/10.1007/s00030-022-00794-z>
13. Antontsev S. N., Oliveira H. B., Khompysh Kh. The classical Kelvin-Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity. 2021. Vol. 34, N 5. P. 3083–3111. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/abe51e>
14. Frehse J., Goh S., Malek J. On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2005. Vol. 36, N 4. P. 1259–1281. <https://doi.org/10.1137/S0036141003433425>
15. Frehse J., Weigant W. On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // Applications of Mathematics. 2008. Vol. 53, N 4. P. 319–345. <https://doi.org/10.1007/s10492-008-0029-6>
16. Leray J. Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures. Appl. 1933. Vol. 12. P. 1–82.
17. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-d existence // Methods and Applications of Analysis. 2013. Vol. 20, N 2. P. 179–196. <https://doi.org/10.4310/MAA.2013.v20.n2.a5>
18. Mohan M. T. On the three dimensional Kelvin-Voigt fluids: global solvability, exponential stability and exact controllability of Galerkin approximations // Evolution Equations and Control Theory. 2020. Vol. 9, N 2. P. 301–339. <https://doi.org/10.3934/eect.2020007>
19. Oskolkov A. P. Theory of nonstationary flows of Kelvin-Voigt fluids // Journal of Mathematical Sciences. 1985. Vol. 28. P. 751–758. <https://doi.org/10.1007/BF02112340>
20. Rajagopal K. R., Tao L. Mechanics of Mixtures. Singapore : World Scientific, 1995. 195 p.
21. Zakora D. A. Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 283, N 2. P. 231–254. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07252-4>

22. Zakora D. A. Spectral properties of the operator in the problem of oscillations in a mixture of viscous compressible fluids // *Differential Equations*. 2023. Vol. 59, N 4. P. 473–490. <https://doi.org/10.1134/S0012266123040043>

References

1. Betchov R., Kriminale V. *Issues of Hydrodynamic Stability*. Moscow, Mir Publ., 1971, 350 p. (in Russian)
2. Goldshteyn R.V., Gorodtsov V.A. *Continuum Mechanics. Part 1: Fundamentals and Classical Models of Fluids*. Moscow, Nauka Publ., Fizmatlit Publ., 2000, 256 p. (in Russian)
3. Zakora D.A. The problem on small motions of a mixture of viscous compressible fluids. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 1552–1589. <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.096> (in Russian)
4. Zvyagin A.V. Weak Solvability of Kelvin-Voigt Model of Thermoviscoelasticity. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 3, pp. 79–83. <https://doi.org/10.3103/S1066369X18030106>
5. Zvyagin V.G., Turbin M.V. The Study of Initial-Boundary Value Problems for Mathematical Models of the Motion of Kelvin-Voigt Fluids. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 168, no. 2, pp. 157–308. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-9981-2>
6. Ladyzhenskaya O.A. *Mathematical Issues of the Dynamics of Viscous Incompressible Fluid*. Moscow, GIFML Publ., 1961, 204 p. (in Russian)
7. Nigmatulin R.I. *Dynamics of multiphase media. Part 1*. Moscow, Nauka Publ., 1987, 359 p. (in Russian)
8. Oskolkov A.P. Initial-Boundary Value Problems for Equations of Motion of Kelvin-Voigt Fluids and Oldroyd Fluids. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 179, pp. 137–182.
9. Oskolkov A.P. Nonlocal Problems for the Equations of Kelvin-Voigt Fluids and their ε -Approximations in Classes of Smooth Functions. *Zap. nauchn. sem. POMI*, 1995, vol. 230, pp. 214–242. (in Russian)
10. Temam R. *Navier-Stokes Equations*. Moscow, Mir Publ., 1981, 408 p. (in Russian)
11. Freudenthal A., Geiringer H. *Mathematical Theories of Inelastic Continuous Media*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, 432 p. (in Russian)
12. Antontsev S.N., Oliveira H.B., Khompysh Kh. Kelvin-Voigt Equations For Incompressible and Nonhomogeneous Fluids with Anisotropic Viscosity, Relaxation and Damping. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 2022, vol. 29, art. no. 60. <https://doi.org/10.1007/s00030-022-00794-z>
13. Antontsev S.N., Oliveira H.B., Khompysh Kh. The Classical Kelvin-Voigt problem for Incompressible Fluids with Unknown Non-Constant Density: Existence, Uniqueness and Regularity. *Nonlinearity*, 2021, vol. 34, no. 5, pp. 3083–3111. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/abe51e>
14. Frehse J., GojS., Malek J. On a Stokes-Like System for Mixtures of Fluids. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2005, vol. 36, no. 4, pp. 1259–1281. <https://doi.org/10.1137/S0036141003433425>
15. Frehse J., Weigant W. On Quasi-Stationary Models of Mixtures of Compressible Fluids. *Applications of Mathematics*, 2008, vol. 53, no. 4, pp. 319–345. <https://doi.org/10.1007/s10492-008-0029-6>
16. Leray J. Etude de Diverses Equations Integrales Nonlineaires et de Quelques Problemes que Pose l'Hydrodynamique. *J. Math. Pures. Appl.*, 1933, vol. 12, pp. 1–82.

17. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Viscous Compressible Multi-Fluids: Modeling and Multi-D Existence. *Methods and Applications of Analysis*, 2013, vol. 20, no. 2, p. 179–196. <https://doi.org/10.4310/MAA.2013.v20.n2.a5>
18. Mohan M.T. On the Three Dimensional Kelvin-Voigt Fluids: Global Solvability, Exponential Stability and Exact Controllability of Galerkin Approximations. *Evolution Equations and Control Theory*, 2020, vol. 9, no. 2, pp. 301–339. <https://doi.org/10.3934/eect.2020007>
19. Oskolkov A.P. Theory of Nonstationary Flows of Kelvin-Voigt Fluids. *Journal of Mathematical Sciences*, 1985, vol. 28, pp. 751–758. <https://doi.org/10.1007/BF02112340>
20. Rajagopal K.R., Tao L. *Mechanics of Mixtures*. Singapore, World Scientific, 1995, 195 p.
21. Zakora D.A. Spectral Properties of Operators in the Problem on Normal Oscillations of a Mixture of Viscous Compressible Fluids. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, vol. 283, no. 2, pp. 231–254. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07252-4>
22. Zakora D.A. Spectral Properties of the Operator in the Problem of Oscillations in a Mixture of Viscous Compressible Fluids. *Differential Equations*, 2023, vol. 59, no. 4, p. 473–490. <https://doi.org/10.1134/S0012266123040043>

Об авторах

Закора Дмитрий

Александрович, д-р физ.-мат. наук, доц., Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, 295007, Российская Федерация, dmitry.zkr@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6084-1114>

Прокудин Дмитрий Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, доц., Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 630090, Российская Федерация, prokudin@hydro.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3833-0390>

About the authors

Dmitry A. Zakora, Dr. Sci.

(Phys.-Math.), Assoc. Prof., Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007, Russian Federation, dmitry.zkr@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6084-1114>

Dmitry A. Prokudin, Dr. Sci.

(Phys.-Math.), Assoc. Prof., Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, prokudin@hydro.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3833-0390>

Поступила в редакцию / Received 29.10.2025

Поступила после рецензирования / Revised 22.12.2025

Принята к публикации / Accepted 24.12.2025